Vasile Brînzănescu Octavian Stănăşilă

MATEMATICI SPECIALE

teorie, exemple, aplicaţii

Matematici speciale

– teorie, exemple, aplicaţii –

Ediţia a II-a

MATEMATICI SPECIALE – TEORIE, EXEMPLE, APLICAŢII

Vasile Brînzănescu, Octavian Stănăşilă

ISBN 973-9337-87-2

Editura **ALL EDUCATIONAL S. A.**
Bucureşti
Bd. Timişoara nr. 58, sect.6
☎ 413 11 58, 413 43 21, 413 18 50
Fax: 413 05 40

Departamentul difuzare ☎ 413 03 29, 413 16 12, 413 07 15

Redactor: Viorica Fătu, Marius Şomodi
Coperta: Stelian Stanciu
Desene: Adriana Sima

PRINTED IN ROMANIA

Vasile Brînzănescu Octavian Stănăşilă

Matematici speciale

– teorie, exemple, aplicaţii –

Algebră liniară... Geometrie... Ecuaţii diferenţiale...
Analiză complexă... Spaţii Hilbert... Fizică matematică

Ediţia a II-a

Colecția *Matematică – Fizică – Automatică*, a editurii **ALL** cuprinde:

1. **Lecții de analiză matematică,**
   P. Flondor, O. Stănăşilă
2. **Algebră liniară; geometrie analitică şi diferențială,**
   C. Radu
3. **Probleme de fizică**
   M. Penescu
4. **Fizică** – Vol. I, Vol. II
   Cornelia Moțoc
5. **Teoria sistemelor. Sinteza robustă. Metode numerice de calcul,**
   V. Ionescu, A. Varga.
6. **Stabilizarea sistemelor liniare,**
   A. Halanay, V. Drăgan
7. **Probleme rezolvate de fizică nucleară,**
   colectiv Cat. de Fizică Atomică şi Nucleară
   Facultatea de Fizică, Univ. Bucureşti
8. **Simularea Monte Carlo a transportului radiațiilor,**
   O. Sima
9. **Analiză matematică** – culegere de probleme – Vol. I, şi II,
   N. Donciu, D. Flondor
10. **Probleme de algebră liniară, geometrie analitică, diferențială şi ecuații diferențiale**
    G. Atanasiu, Gh. Munteanu, Mihai Postolache
11. **Algebră liniară** – teorie şi probleme rezolvate,
    Teodor Stihi
12. 1000 de probleme rezolvate şi exerciții fundamentale,
    Ana Niță, Tatiana Stănăşilă, O. Stănăşilă
13. **Elemente de aritmetică,**
    Constantin Vraciu, Mariana Vraciu
14. **Subiecte de licență, Facultatea de automatică şi Electronică,**
    coordonatori: Nicolae Cupcea, Ion Fătu

CUPRINS

PARTEA A III- A

PREFAȚĂ

Acest curs a fost elaborat pe baza lecțiilor de matematici speciale ținute de autori pentru studenții anilor I și II ai Facultăților de Automatică și Electronică din Institutul Politehnic București. Lucrarea răspunde unor programe analitice modernizate, urmărind întărirea laturii algoritmice și reflectând atenția deosebită acordată atât rigorii în prezentarea noțiunilor, cât și vigorii pe care aplicațiile și modelele matematice o generează. Demonstrațiile rezultatelor de bază cerute de programă sunt complete și doar în cadrul unor observații sau rezultate - anexă sunt indicate dezvoltări ale teoriei fără detalii de demonstrație. Tot din rațiuni didactice, la sfârșitul cărții am introdus o listă de probleme date la probele scrise ale examenelor.

Autorii au avut în vedere micșorarea dificultăților trecerii de la liceu la facultate și de aceea au prevăzut revederea succintă a unor elemente de algebră sau geometrie analitică studiate în învățămîntul mediu, asigurând o pantă mai lină de ascensiune spre matematica superioară.

Cartea are trei părți, corespunzînd în principiu celor trei semestre când se predau matematicile speciale (exceptând analiza numerică). Prima parte cuprinde noțiunile și rezultatele de bază ale algebrei liniare și geometriei liniare, aceasta din urmă acoperind calculul vectorial, geometria analitică și studiul geometriei spațiilor vectoriale înzestrate cu produs scalar. Am introdus totodată unele elemente de matematică discretă cerute de noile programe.

Partea a II-a cuprinde mai întâi unele elemente de geometrie diferențială a curbelor și suprafețelor, incluzând noțiuni de calcul tensorial, orientate spre nevoile fizicii și analizei sistemelor neliniare. Studiul ecuațiilor diferențiale ordinare și sistemelor diferențiale este făcut subliniind atât aspectul geometric (câmpurile de vectori, linii de câmp etc.), cât și cel calculatoriu - procedural (rezolvarea efectivă a unor clase de ecuații diferențiale).

Ultima parte a cursului tratează succint unele teorii centrale ale matematicii, interesând mult pe inginer, fizician sau chimist. Analiza complexă este o teorie de mare coerență internă și largă aplicabilitate, iar calculul operațional este un permanent instrument de lucru. Transformarea Fourier și transformarea Laplace stabilesc legături profunde între domeniile - timp, frecvență și domeniul complex, studiul acestor conexiuni fiind dezvoltat mai departe în cadrul teoriei matematice a sistemelor. În ultimul capitol se dau unele elemente de bază ale teoriei ecuațiilor cu derivate parțiale, care utilizează multe rezultate anterioare și pregătesc conexiuni firești cu alte cursuri de specialitate.

Apelul la intuiția geometrică și la desen reprezintă o sursă matematică inepuizabilă și de aceea am căutat să frânăm unele tendințe de algebrizare excesivă. Știm că tehnica modernă de vârf cere stabilirea unor modele tot mai perfecționate ale diverselor procese, ale căror legi de evoluție se traduc în ecuații. Am căutat să dăm multe exemple în acest sens, subliniind locul metodelor matematice, conjugabile cu utilizarea calculatorului. Aceste metode se folosesc după ce ecuațiile și condițiile inițiale (sau la limită) au fost formulate pe baza înțelegerii de fond a modelului fizic. Am constatat de altfel că dificultățile întâmpinate de studenți sau de tinerii absolvenți apar nu la aplicarea matematicii ci un pas mai înainte, la stabilirea modelului fizico-tehnico-matematic, deci pe teritoriul sinuos, multidisciplinar, al "specialistului colectiv".

Prin efortul exemplar al Editurii ALL, acest tratat, împreună cu lucrarea "Lecții de analiză matematică", acoperă, chiar cu oarecare prisos, matematica predată în învățământul tehnic românesc.

Ne adresăm deci studenților-ingineri aflați în preajma examenelor, dar și multor profesori, cercetători și elevi neindiferenți la priceperea lor matematică.

Capitolele I § 2, 3; II, V, VII au fost elaborate de V. Brînzănescu, iar I § 1, 4; III, IV, VI, VIII, IX de O. Stănășilă.

București, aprilie '94 Autorii

NOTĂ LA EDIȚIA A II-A

Întreg conținutul primei ediții a fost păstrat pentru că programele analitice în învățământul tehnic superior nu au fost încă modificate.

București, februarie '98 Autorii

PARTEA I

Capitolul I ALGEBRĂ LINIARĂ

Algebra liniară studiază multe obiecte matematice importante - spaţii vectoriale, aplicaţii liniare, operatori, forme pătratice etc., oferind totodată limbajul necesar exprimării unor idei fecunde ca "principiul suprapunerii" sau faptul că "local, orice proces este liniar". Sunt necesare câteva pregătiri, care constituie şi un liant util între cunoştinţele din liceu şi dezvoltările lor superioare.

§ 1. Seturi de numere

1.1. Numere şi funcţii

Cele mai importante obiecte matematice le reprezintă numerele şi funcţiile. Se poate spune că evoluţia omului a însemnat şi evoluţia ideii de număr. În acest sens este suficient să ne gîndim puţin la momentele apariţiei, în conştiinţa matematică a oamenilor, a numerelor 1, 2, 10, 1000, 0, -1, $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}$, $\pi, e, 2+i$ etc.

Prin **sistem de numere** se înţelege o mulţime de elemente cu care se pot efectua unele **operaţii** (adunări, înmulţiri, operaţii logice etc.), unele dintre elemente fiind în anumite **relaţii** (de exemplu, relaţii de ordine). Dar aceasta nu constituie o definiţie în sensul strict al cuvîntului.

În cursul cunoaşterii ştiinţifice, contemplarea oricărei porţiuni a realităţii este urmată de asocierea unui model fizic în care se precizează mărimile şi legile de evoluţie. O etapă esenţială este aceea prin care mărimilor fizice li se asociază numere, dependenţe funcţionale, ecuaţii. Calculatorul nu se poate substitui acestor etape, el fiind doar un instrument de lucru, o unealtă de mare rafinament, care prelucrează nu numai seturi de numere ci şi şiruri de simboluri prezentate convenabil.

Fără a intra în detalii, indicăm definiţiile (descriptive!) ale celor mai importante sisteme de numere.

a) **Codul binar** $\mathbb{B} = \{0,1\}$.

Cele două elemente sînt notate şi prin alte simboluri: (nu/da); (deschis/închis); (fals/adevărat); (F/A) etc.

Uneori este util să se presupună că $0 < 1$ şi să se definească operațiile de adunare şi înmulțire în $\mathbb{B}$ după regulile cunoscute:

$$0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+0=1,\ 1+1=0;$$

$$0\cdot 0=0,\ 0\cdot 1=0,\ 1\cdot 0=0,\ 1\cdot 1=1.$$

Astfel, $x^2 = x$ şi $2x = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{B}$ (punînd $x^2 = x \cdot x$ şi $2x = x + x$).

b) **Sistemul numerelor naturale** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$.

Pentru orice $n \geq 0$ vom nota $S_n = \{0, 1, ..., n\}$. Aşadar,

$$S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset ... \text{ şi } \mathbb{N} = \bigcup_{n\geq 0} S_n$$

Mulțimea $\mathbb{N}$ are o proprietate specifică, anume admite un element inițial 0 (zero) şi orice element x admite un succesor, $x+1$. De aceea $\mathbb{N}$ este prototipul sistemelor dinamice iterative, definite printr-o **inițializare** şi prin **recurență** pas cu pas. Orice algoritm este strîns legat de indicarea unor date inițiale şi de parcurgerea recurentă a unor instrucțiuni, astfel încît teoria algoritmilor se dezvoltă în conexiune intimă cu studiul sistemului numerelor naturale.

Nu insistăm asupra introducerii operațiilor algebrice uzuale (adunare, înmulțire, ridicare la putere etc.) în $\mathbb{N}$ sau asupra relației de ordine ($\leq$) sau divizibilitate ($\vdots$). Merită să subliniem că $S_1 = \{0, 1\}$ dar $S_1 \neq \mathbb{B}$, deoarece $1+1 = 2$ în $\mathbb{N}$, în timp ce $1+1 = 0$ în $\mathbb{B}$.

c) **Mulțimea numerelor întregi** $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ şi **mulțimea numerelor raționale** $\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q > 0\}$ au fost studiate în detaliu în liceu.

Reamintim că $\mathbb{Z}$ este un inel comutativ şi $\mathbb{Q}$ este un corp comutativ (relativ la operațiile de adunare şi înmulțire uzuale).

d) **Prin sistem de numere reale** se înțelege orice corp comutativ $\mathbb{R}$ (deci în $\mathbb{R}$ sînt definite operațiile de adunare, scădere, înmulțire şi împărțire cu elemente nenule, cu proprietățile bine cunoscute din liceu), pe care în plus este definită o relație de ordine $\leq$ (reflexivă, tranzitivă, antisimetrică şi astfel încît pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$; $0 \leq x$, $0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$ şi în plus, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$); de asemenea se presupune că orice submulțime nevidă majorată a lui $\mathbb{R}$ admite un cel mai mic majorant.

Exemplul tipic al unui sistem de numere reale îl constituie mulțimea $\mathbb{R}$ a tuturor fracțiilor zecimale infinite. Numerele reale au şi o "definiție" fizică, ca măsuri ale unor mărimi fizice din realitate. Defectul acesteia este dublu: anume, nu se precizează ce sînt măsurile, mărimile, realitatea etc. şi totodată nu permite dezvoltarea calculului cu numere (ea are totuşi meritul de a circumscrie natura modelatoare a numerelor reale, atîta timp cît orice mărime fizică - temperatură, presiune, timp, viteză etc., se exprimă prin

numere reale). Din liceu este cunoscută definiția mulțimii $\mathbb{C}$ a numerelor complexe ($\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, cu operațiile respective).

Lanțul de incluziuni $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \dots$ exprimă lărgirea noțiunii de număr. Trecerea de la $\mathbb{N}$ la $\mathbb{Z}$ (respectiv de la $\mathbb{Z}$ la $\mathbb{Q}$) este motivată de nevoia de a rezolva ecuații de forma $a + x = b$ cu $a, b \in \mathbb{N}$ (respectiv a unor ecuații de tipul $ax = b$ cu $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$). Trecerea de la $\mathbb{Q}$ la $\mathbb{R}$ este justificată în geometrie şi în analiza matematică ($\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) iar considerarea mulțimii $\mathbb{C}$ este legată în primul rînd de posibilitatea rezolvării ecuațiilor algebrice (de exemplu, ecuația $x^2 - 2x + 2 = 0$ nu are soluții în $\mathbb{R}$ dar are soluțiile $x_{1,2} = 1 \pm i$).

OBSERVAȚIE. Indicăm o legătură între numerele reale şi numerele naturale. Să presupunem că $a_1, a_2, \dots, a_k$ reprezintă un şir finit de numere reale şi pozitive. Considerînd reprezentările lor zecimale şi limitînd lungimea acestora atît cît permite registrul de memorie, numerele respective pot fi înlocuite cu trunchieri (rotunjiri) ale lor

$$\begin{array}{llllll} a_1 = \alpha_1, & a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^M \\ a_2 = \alpha_2, & a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^M \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ a_k = \alpha_k, & a_k^1 & a_k^2 & a_k^3 & \cdots & a_k^M \end{array}.$$

Înmulțind toate aceste numere cu 10^M, se obțin numere naturale. Deci $10^M a_1 = b_1, \dots, 10^M a_k = b_k$ cu $b_1, \dots, b_k$ naturale. Aşadar, numerele reale $a_1, \dots, a_k$ sînt puse în corespondență cu numerele naturale $b_1, \dots, b_k$, ceea ce sugerează o legătură între date continue (în număr finit) şi date discrete.

Fie A o mulțime oarecare. Se notează:

$A^0 = \mathbb{1}$, mulțimea finită formată dintr-un singur element, notat $\wedge$;

$A^1 = A$;

$A^2 = A \times A = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$, mulțimea perechilor ordonate de elemente din A.

Pentru orice întreg $n \geq 1$ se defineşte mulțimea sistemelor ordonate de cîte n elemente din A,

$A^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in A\}$.

DEFINIȚIA 1.1. Orice element al mulțimii A^n ($n \geq 1$), se numeşte **set** de n elemente din A. Prin definiție, două elemente $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ din A^n se consideră **egale** dacă $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$ (Aşadar, o egalitate în A^n revine la n egalități în A).

Submulțimile lui A^n, $n \geq 1$, se mai numesc **relații** n**-are** pe mulțimea A. De exemplu, relația de ordine pe $\mathbb{R}$ este prin definiție relația binară

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \le y\}$. În mod similar, $\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid z = x+y\}$ este o relație ternară pe $\mathbb{N}$].

Uneori seturile de n elemente din A se mai numesc **cuvinte** de lungime n, formate cu **litere** din A. Notăm $A^* = \bigcup_{n\geq 0} A^n$ (mulțimea tuturor cuvintelor cu litere din A).

EXEMPLE. 1) $\mathbb{B}^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

2) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se identifică prin planul cartezian al geometriei analitice.

3) $\mathbb{B}^n$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{N}^n$ sînt mulțimi de seturi de cîte n elemente din $\mathbb{B}$ (respectiv din $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{N}$). Elementele lui $\mathbb{B}^n$ se mai numesc **cuvinte binare de lungime** n (sau **seturi de** n **biți**); numărul acestora este 2^n. De exemplu, mulțimea $\mathbb{B}^8$ a octeților are $2^8 = 256$ elemente.

DEFINIȚIA1.2. Fie A și B două mulțimi. Se numește **corespondență** (sau **relație binară**) **de la** A **la** B orice triplet $\rho = (A, B, R)$, unde $R \subset A \times B$ este o submulțime, numită **graficul** lui ρ.

Se mai scrie $\rho : A \to B$. În loc de $(x, y) \in R$ se mai scrie $x \xrightarrow{\ \rho\ } y$ (sau $x \rho y$ sau chiar $x R y$) și se citește: x este în relația ρ cu y. În situații concrete relațiile sînt notate prin simboluri specifice $\le, \subset, <, \mid, \equiv$ etc. Mulțimea $D\rho = \{x \in A \mid \exists y \in B,\ x \xrightarrow{\ \rho\ } y\}$ se numește **domeniul strict de definiție** al lui ρ, iar mulțimea $C\rho = \{y \in B \mid \exists x \in A,\ x \xrightarrow{\ \rho\ } y\}$ se numește **codomeniul strict** al lui ρ. Dacă $A' \subset A$, atunci tripletul $\rho' = (A', B, R')$, unde $R' = R \cap (A' \times B)$ *se* numește **restricția** corespondenței ρ la A', notată $\rho' = \rho / A'$.

Dacă $\rho = (A, B, R)$ și $\rho' = (B, C, S)$ sînt două corespondențe, atunci se definește **compusa** lor $\rho' \circ \rho = (A, C, T)$, unde

$$T = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B, (a, b) \in R \text{ și } (b, c) \in S\}.$$

Pentru orice corespondență $\rho = (A, B, R)$ se definește **inversa** ei

$$\rho^{-1} = (B, A, S) \text{ unde } S = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}.$$

DEFINIȚIA1.3. Dacă A și B sînt două mulțimi, se numește **funcție parțială** (sau **relație funcțională**) de la A la B orice corespondență $\rho = (A, B, f)$ astfel încît ori de cîte ori $a \in A$; $b, b' \in B$ și $a \xrightarrow{\ \rho\ } b, a \xrightarrow{\ \rho\ } b'$, rezultă că $b = b'$. Aici $D_f = \{x \in A \mid \exists y \in B,\ x \xrightarrow{\ f\ } y\}$ și se scrie $y = f(x)$ în loc de $x \xrightarrow{\ f\ } y$.

Funcția parțială $f : A \to B$ se numește **totală** (sau **aplicație peste tot definită**) dacă $D_f = A$. Vom nota cu B^A mulțimea tuturor funcțiilor totale (aplicațiilor) de la A la B. Dacă $i : A \to B$ este o aplicație injectivă, atunci aplicația $A \to i(A)$, $x \to i(x)$ este bijectivă și orice element $x \in A$ se poate identifica prin $i(x)$, iar A poate fi atunci considerată ca o submulțime a lui B.

Dacă M este o mulţime şi $n \geq 1$ este un întreg, se numeşte **operaţie algebrică n-ară** pe M orice funcţie parţială $\omega : M^n \to M$. Dacă nu se specifică contrariul, vom considera doar operaţii algebrice peste tot definite, numite şi legi de compoziţie.

Operaţiile algebrice **unare** sînt funcţii $M \to M$, iar operaţiile **binare**, funcţii $M^2 \to M$. Se pot considera şi operaţii **nulare** $M^0 = \{\wedge\} \to M$; o astfel de operaţie revine la fixarea unui element din M.

O aplicaţie $p : M^n \to \mathbb{B}$ $(n \geq 1)$ se numeşte **predicat n-ar** pe mulţimea M, iar mulţimea $M_p = \{x \in M^n | p(x) = 1\}$ se numeşte **mulţimea de adevăr a lui p**. Corespondenţele, funcţiile, operaţiile şi predicatele sînt noţiuni utilizate curent.

Vom nota cu $\text{Rel}\, M$ mulţimea relaţiilor binare pe o mulţime M deci $\text{Rel}\, M = \mathscr{P}(M \times M)$. Reamintim că o relaţie $\rho \in \text{Rel}\, M$, $\rho = (M, M, R)$, se numeşte **reflexivă** dacă $\forall\, x \in M$, $x \xrightarrow{\rho} x$; **simetrică** dacă $\forall\, x, y \in M$, $x\, R\, y \Rightarrow y\, R\, x$; **antisimetrică** dacă $\forall\, x, y \in M$, $x\, R\, y$ şi $y\, R\, x$ implică $x = y$; **tranzitivă** dacă $\forall\, x, y, z \in M$, $x\, R\, y$ şi $y\, R\, z$ implică $x\, R\, z$ [deci $\rho \circ \rho \subset \rho$; într-adevăr, $\forall (x, z) \in \rho \circ \rho$, $\exists\, y \in M$ astfel încît $x\, R\, y$, $y\, R\, z$ deci $x\, R\, z$ şi $(x, z) \in \rho$].

Orice relaţie reflexivă şi tranzitivă se numeşte relaţie de **preordine.** O preordine antisimetrică se numeşte ordine **parţială**, iar o preordine simetrică se numeşte **relaţie de echivalenţă.**

Orice pereche $(M, \leq)$ formată dintr-o mulţime M şi o relaţie de ordine parţială $\leq$ pe M se numeşte **mulţime ordonată.** Dacă $(N, <)$ este o altă mulţime ordonată, orice aplicaţie $f : M \to N$ cu proprietatea că $\forall\, u, v \in M$, $u \leq v \Rightarrow f(u) < f(v)$ se numeşte **izotonă** (sau **monoton crescătoare**).

Fie acum $\rho =$ "$\equiv$" o relaţie de echivalenţă pe o mulţime nevidă M. Pentru orice element $x \in M$ se poate considera **clasa de echivalenţă** a lui x,

$$\hat{x} = \{y \in M \mid y \equiv x\}.$$

Este evident că $\forall\, x, y \in M$, avem $x \in \hat{x}$ şi $(x \equiv y) \leftrightarrow \hat{x} = \hat{y}$. Mulţimea tuturor claselor $\hat{x}$, $x \in M$ se notează M/ρ şi se numeşte **mulţimea - cît** a lui M prin relaţia ρ. Se poate defini aplicaţia $p : M \to M/\rho$, $x \to \hat{x}$ (numită **surjecţia canonică**).

Ideea principală în considerarea mulţimii - cît este aceea de a înlocui relaţia de echivalenţă pe M printr-o relaţie de egalitate pe mulţimea M/ρ.

Vom ilustra această idee în cazul construcţiilor sistemelor de numere $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Q}$ pornind de la $\mathbb{N}$. Multe alte construcţii matematice (de exemplu, construcţia lui Cantor a lui $\mathbb{R}$ cu ajutorul claselor de echivalenţă de şiruri de numere din $\mathbb{Q}$, vectorii liberi ca fiind clase de echipolenţă ale segmentelor orientate, cardinalele de mulţimi prin clasele de echipotenţă, completarea unui spaţiu metric, etc sînt obţinute trecînd la mulţimi - cît, convenabil definite).

Am definit anterior diversele sisteme de numere, prin explicitarea elementelor lor. De exemplu, $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$; dar o analiză atentă arată că numerele întregi negative nu sînt convenabil introduse. Această inadvertență logică poate fi evitată, cu prețul unor construcții suplimentare, în modul următor: pornind de la mulțimea $\mathbb{N}$, definim pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ următoarea relație binară:

$$(x, y)\, \rho\, (x', y') \leftrightarrow x + y' = x' + y.$$

Se verifică imediat că ρ este o relație de echivalență. Notăm cu $\mathbb{Z}' = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \rho$, mulțimea claselor $\widehat{(x, y)}$ de perechi de numere naturale. Această mulțime are o structură de inel comutativ, relativ la operațiile definite prin

$$\widehat{(x, y)} + \widehat{(x', y')} = \widehat{(x + x', y + y')},$$

$$\widehat{(x, y)} \cdot \widehat{(x', y')} = \widehat{(xx' + yy', xy' + x'y)},\ 0 = \widehat{(0, 0)} \text{ și } 1 = \widehat{(1, 0)}$$

Aplicația $i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}'$, $x \to \widehat{(x, 0)}$ este injectivă și ca atare, orice număr natural x poate fi identificat prin clasa perechii $\widehat{(x, 0)}$. În plus, aplicația $f\colon \mathbb{Z}' \to \mathbb{Z} = \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$, $\widehat{(x, y)} \to x - y$ este bine definită [pentru că dacă $\widehat{(x, y)} = \widehat{(x', y')}$, atunci $(x, y)\, \rho\, (x', y')$ deci $x + y' = x' + y$ adică $x - y = x' - y'$], este bijectivă și chiar un izomorfism de inele deci $\mathbb{Z}'$ se identifică prin $\mathbb{Z}$; în particular, numărul întreg $-n$, $n \geq 1$ se identifică prin $\widehat{(0, n)}$ și astfel dispare inadvertența logică, dar pe seama îndepărtării de intuiție.

În mod similar, pe mulțimea $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ se poate considera următoarea relație de echivalență:

$$(x, y)\, \rho_1\, (x', y') \leftrightarrow xy' = x'y$$

și mulțimea - cît corespunzătoare A/ρ_1 are o structură de corp comutativ izomorf cu $\mathbb{Q}$; numărul rațional $\dfrac{p}{q}$, $q \neq 0$ se identifică prin clasa de echivalență $\widehat{(p, q)}$.

1.2. Vectorii multidimensionali, polinoamele și matricele ca seturi de numere

În cele ce urmează, vom considera diverse seturi de numere, organizate, în mod convenabil, cu structuri algebrice utilizate frecvent în probleme teoretice sau aplicative.

a) **Spațiul** $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ este mulțimea tuturor seturilor ordonate de n numere reale, numite și **vectori aritmetici** n**-dimensionali**:

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n);\ x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n.$$

Prin definiție (simbolizată prin notația Δ) două elemente $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ din $\mathbb{R}^n$ se consideră **egale** dacă ele au aceleaşi componente; mai precis, $x = y \overset{\Delta}{\longleftrightarrow} x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_n = y_n$.

Aşadar, o egalitate în $\mathbb{R}^n$ este echivalentă cu n egalități de numere reale.

În mulțimea $\mathbb{R}^n$ se introduce operația algebrică binară de **adunare,** notată cu eticheta "+" punînd $x + y \overset{\Delta}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ (aşadar, $"+" : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x, y) \to "+"(x, y) = x + y$). Se pot considera vectorii aritmetici remarcabili n-dimensionali următori: vectorul nul $\mathbf{0} = (0, 0, ..., 0)$ şi vectorii "unitari" $e_1 = (1, 0, ..., 0)$; $e_2 = (0, 1, ..., 0)$; ...; $e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$.

Pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ şi pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ se defineşte **multiplicarea** $\lambda x \overset{\Delta}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$ şi totodată operația externă $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(\lambda, x) \to \lambda x$.

EXEMPLE.

1) Pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, avem $x + \mathbf{0} = \mathbf{0} + x = x$.

2) Pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, avem

$$x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n = x_1(1, 0, ..., 0) + x_2(0, 1, 0, ..., 0) + ... + x_n(0, 0, ..., 1) =$$
$$= (x_1, 0, ..., 0) + (0, x_2, 0, ..., 0) + ... + (0, 0, ..., x_n) = (x_1, x_2, ..., x_n) = x.$$

Reținem deci că $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i$.

3) Fie vectorii aritmetici 3-dimensionali $a = (2, 1, 1)$, $b = (0, 1, 2)$, $c = (3, 0, 0)$. Pentru orice $x \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ se notează $-x = (-1)x = (-x_1, -x_2, -x_3)$. Atunci

$$2a + 5b - c = (4, 2, 2) + (0, 5, 10) - (3, 0, 0) = (1, 7, 12).$$

Să presupunem că $\alpha a + \beta b + \gamma c = \mathbf{0}$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$); atunci

$$(2\alpha, \alpha, \alpha) + (0, \beta, 2\beta) + (3\gamma, 0, 0) = (0, 0, 0) \text{ deci}$$
$$(2\alpha + 3\gamma, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta) = (0, 0, 0) \text{ adică } 2\alpha + 3\gamma = 0, \alpha + \beta = 0, \alpha + 2\beta = 0,$$

de unde $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

Mulțimea $\mathbb{R}^n$, înzestrată cu operația de adunare (cu eticheta "+") şi cu elementul neutru $\mathbf{0}$ este evident cu monoid comutativ. [Reamintim că se numeşte **monoid** orice triplet $(M, *, e)$, format dintr-o mulțime M, o operație algebrică binară * pe M, care este asociativă şi are elementul neutru $e \in M$.]

Cu această structură, $\mathbb{R}^n$ se numeşte **spațiul aritmetic n-dimensional**. În particular, $\mathbb{R}^1$ este chiar $\mathbb{R}$, iar $\mathbb{R}^2$ este în corespondență bijectivă cu mulțimea punctelor oricărui plan π relativ la un sistem xOy de axe (prin bijecția lui R. Descartes, 1596-1650). În mod similar, $\mathbb{R}^3$ este în corespondență bijectivă cu mulțimea punctelor din spațiul fizic raportat la un reper adică la

un sistem $Oxyz$ de axe, iar $\mathbb{R}^4$ se identifică prin mulțimea seturilor ordonate de patru numere reale $\varepsilon = (x, y, z, t)$, numite și **evenimente punctuale**, în care sînt indicate atît coordonatele spațiale ale punctului (relativ la un reper fixat) cît și momentul la care acestea sînt măsurate; $\mathbb{R}^4$ se mai numește **spațiul Minkowski-Poincaré** (H. Minkowski, 1864-1909; H. Poincaré, 1854–1912).

OBSERVAȚIE. Una din justificările principale ale introducerii și studiului spațiilor aritmetice n-dimensionale $\mathbb{R}^n$ constă în aceea că evoluția unor sisteme fizice este strîns legată de indicarea la fiecare moment a parametrilor lor de stare, care pot fi considerați ca n mărimi fizice; atunci seturile ordonate de n parametri de stare sînt tocmai elemente din $\mathbb{R}^n$.

O altă motivație constă în simplificarea notațiilor. Astfel, orice funcție $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, de n variabile reale cu valori reale, poate fi considerată ca o funcție $f(x)$ de o singură variabilă vectorială $x \in A$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

În mod firesc, se pot considera mulțimile $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ și $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$. În algebra liniară, cele mai importante sînt $\mathbb{R}^n$ și $\mathbb{C}^n$.

b) **Polinoame și serii formale**

DEFINIȚIA1.4. Se numește **serie formală cu coeficienți reali** într-o nedeterminată X orice șir de numere reale $S = (a_0, a_1, a_2, a_3, ...)$. Două astfel de serii formale se consideră **egale** dacă ele coincid pe componente. O serie ca mai sus se poate reprezenta astfel:

$$S = \sum_{n \geq 0} a_n X^n = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ...,$$

semnul "+" ca și litera X neavînd semnificație (ceea ce justifică termenul de "formal"). Vom nota cu $\mathbb{R}[[X]]$ mulțimea tuturor seriilor formale în X cu coeficienți reali. Seria **nulă** este $0 = (0, 0, 0, ...)$. Dacă

$$S = \sum_{n \geq 0} a_n X^n = (a_0, a_1, a_2, ...),\ T = \sum_{n \geq 0} b_n X^n = (b_0, b_1, b_2, ...)$$

și dacă $\lambda \in \mathrm{R}$, atunci se pot construi noi serii formale:

$$\textbf{suma}\quad S + T \overset{\Delta}{=} (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, ...);$$

$$\textbf{produsul}\ S \cdot T \overset{\Delta}{=} (c_0, c_1, c_2, c_3, ...),$$

unde $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, ..., c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ etc.;

$$\textbf{produsul cu scalar}\ \lambda S \overset{\Delta}{=} (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, ...).$$

Un caz particular foarte important de serii formale îl constituie polinoamele. O serie formală $S = (a_0, a_1, a_2, ...)$ se numeşte **polinom de grad** $d \geq 0$ dacă $a_d \neq 0$ şi $a_{d+1} = a_{d+2} = ... = 0$. În acest caz se scrie

$$S = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_dX^d$$

şi se obţine definiţia uzuală a polinoamelor. Se notează cu $\mathbb{R}[X]$ mulţimea polinoamelor cu coeficienţii reali, într-o nedeterminată X şi cu $\mathbb{R}_d[X]$ submulţimea lui $\mathbb{R}[X]$ a polinoamelor de grad $\leq d$.

Printre polinoame se remarcă: **polinomul nul** $0 = (0, 0, 0, ...)$ cu toţi coeficienţii nuli, polinomul $X = (0, 1, 0, 0, ...)$, ca şi $X^2 = (0, 0, 1, 0, ...)$.

Constantele nenule $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se identifică prin polinoame de grad zero, anume $(k, 0, 0, ...)$. Polinomul nul se consideră prin convenţie ca avînd gradul $-\infty$.

Reţinem că egalitatea a două polinoame de grad $\leq d$ $(d \geq 0)$ revine la $d + 1$ egalităţi de numere reale.

EXEMPLU. Se consideră polinoamele

$$P = (2, 1, 0, -1, 0, 0, ...), Q = (1, 2, 1, 0, 0, ...).$$

Ne propunem să arătăm că dacă $\alpha P + \beta Q = 0$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Pentru aceasta să observăm că $\alpha P + \beta Q = (2\alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \beta, -\alpha, 0, 0, ...)$ iar relaţia $\alpha P + \beta Q = 0 = (0, 0, ..., 0)$ revine sistemul la $2\alpha + \beta = 0$, $\alpha + 2\beta = 0$, $\beta = 0$, $-\alpha = 0$ deci $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

În mod similar se definesc $\mathbb{C}[[X]]$, $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{Z}[X]$ etc. Remarcăm de asemenea că se pot defini polinoame de grad $\leq d$ cu coeficienţi reali în mai multe nedeterminate $X_1, X_2, ..., X_p$, ca fiind "expresii" de forma

$$\sum_{\substack{i_1 \geq 0, .. i_p \geq 0 \\ i_1 + i_2 + ... + i_p \leq d}} a_{i_1 i_2 ... i_p} X_1^{i_1} X_2^{i_2} ... X_p^{i_p}$$

Reamintim că un monoid $(G, *, e)$ se numeşte **grup** dacă orice element $x \in G$ admite un invers (relativ la operaţia $*$); grupul se numeşte **comutativ** (sau **abelian**; N. H. ABEL, 1802-1829) dacă operaţia $*$ este comutativă. Un **inel** $(A, +, \cdot, 0, 1)$ este o mulţime A înzestrată cu două operaţii algebrice $+, \cdot$ astfel încît $(A, +, 0)$ să fie un grup comutativ, $(A, \cdot, 1)$ să fie un monoid şi în plus, $\forall\, x, y, z \in A$, $x\,(y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ şi $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$.

Inelul se numeşte **comutativ** dacă înmulţirea este comutativă. Se spune că inelul A este **integru** dacă ori de cîte ori $x, y \in A$ şi $x \neq 0$, $y \neq 0$, rezultă $x \cdot y \neq 0$ (adică $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $y = 0$). Un inel $(A,+,\cdot,0,1)$ se numeşte **corp** dacă orice element nenul $x \in A$ admite un invers relativ la înmulţire. În orice corp A se definesc cele patru operaţii: anume, pentru orice $x,y \in A$ au sens $x + y$; $x - y = x + (-y)$; $x \cdot y$; iar dacă $y \neq 0$, atunci are sens cîtul $x/y = x \cdot y^{-1}$.

EXEMPLE. 1) $\mathbb{Z}$ este un inel comutativ şi integru, care nu este corp.

2) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sînt corpuri comutative.

3) $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}[[X]]$, $\mathbb{C}[X]$ sînt inele comutative şi integre (şi nu sînt corpuri). Dar $\mathbb{R}_2[X]$ nu este inel.

c) **Matrice.** Pentru orice întreg $n \geq 1$, notăm $J_n = \{1, 2, ..., n\}$. Reamintim că se numeşte **matrice cu** m **linii şi** n **coloane** ($m, n \geq 1$), cu coeficienți reali orice funcție $\mu : J_m \times J_n \to \mathbb{R}$, $(i, j) \to \mu(i, j)$.

Notînd $\mu(i, j) = a_{ij}$, matricea μ se mai poate reprezenta astfel:

$$\mu = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}},$$

iar elementele a_{ij} pot fi dispuse într-un tablou dreptunghiular, obținîndu-se astfel definiția uzuală. Vom nota mulțimea tuturor acestor matrice cu $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Dacă $m = n$, atunci se obțin matricele pătratice şi se scrie $\mu = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ şi $M_n(\mathbb{R})$, în locul notațiilor precedente.

Se ştie ce înseamnă $A = B$, $A + B$, λA pentru $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$, în compatibilitate cu definițiile date în cazul funcțiilor.

Dacă $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B = (b_{uv})_{\substack{1 \leq u \leq n, \\ 1 \leq v \leq p}}$ atunci se poate defini **produsul** matricelor A, B în această ordine, ca fiind matricea $AB = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq j \leq p}}$, unde $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times b_{kj}$.

La baza acestei definiții stau rațiuni geometrice, legate de compunerea transformărilor liniare.

Mulțimea matricelor pătratice $M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$ este un inel (neintegru şi necomutativ, pentru $n \geq 2$). $M_1(\mathbb{R})$ se identifică prin $\mathbb{R}$.

Matricele din $M_{1,n}(\mathbb{R})$ se mai numesc **matrice-linie** (sau vectori-linie din $\mathbb{R}^n$) iar matricele din $M_{n,1}(\mathbb{R})$ se numesc **matrice-coloană** (sau vectori-coloană din $\mathbb{R}^n$).

Pentru orice matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ din $M_{m,n}(\mathbb{R})$ se poate defini **transpusa** lui A ca fiind matricea $A^T = (a'_{uv})$ unde $a'_{uv} = a_{vu}$; deci $A^T \in M_{n,m}(\mathbb{R})$. O matrice pătratică $A \in M_n(\mathbb{R})$ se zice **simetrică** (respectiv **antisimetrică**) dacă $A = A^T$ (respectiv $A = -A^T$). Se verifică relațiile

$$(A + B)^T = A^T + B^T, (\lambda A)^T = \lambda A^T, (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T,$$

în condiții lesne de explicitat.

Reținem că o egalitate de matrice din $M_{m,n}(\mathbb{R})$ este echivalentă cu $m \cdot n$ egalități de numere reale deci reprezintă economie de notație şi concentrare de informație.

Algebră universală

Algebra de liceu s-a identificat cu calculul cu numere reale şi cu proprietăţile de calcul ale funcţiilor elementare. În algebra modernă se studiază noi obiecte matematice (serii formale, matrice, vectori multidimensionali etc.), organizate în cadrul structurilor algebrice - monoizi, grupuri, inele, corpuri, spaţii vectoriale etc. Dăm definiţia unui concept general, anume de algebră peste o signatură, care extinde deopotrivă toate aceste tipuri de structuri algebrice.

Pentru orice mulţime A se notează cu OpA mulţimea tuturor operaţiilor algebrice pe A, $OpA = \bigcup_{n \geq 0} A^{(A^n)}$. **Funcţia de aritate** $\nu_A : OpA \to \mathbb{N}$ asociază oricărei operaţii aritatea ei (deci unei operaţii binare i se asociază 2, unei operaţii unare 1, iar unei operaţii nulare i se asociază 0).

Se numeşte **signatură** orice pereche (Ω, ν), în care Ω este o mulţime ale cărei elemente se numesc **etichete** de operaţii, iar ν este o funcţie $\Omega \to \mathbb{N}$.

EXEMPLE. 1) Fie $\Omega = \{+, *\}$ cu $\nu(+) = 2$, $\nu(*) = 3$.

2) O signatură de monoid este de tipul $\Omega = \{\cdot, \perp\}$, unde $\nu(\cdot) = 2$ şi $\nu(\perp) = 0$.

3) Dacă A este o mulţime, atunci (OpA, ν_A) este o signatură.

DEFINIŢIA1.5. Să fixăm o signatură (Ω, ν). Se numeşte Ω - **algebră** orice pereche (Q, δ) formată dintr-o mulţime Q şi o aplicaţie $\delta : \Omega \to OpQ$ astfel încît $\forall\, \omega \in \Omega$, aritatea operaţiei $\delta(\omega)$ să fie $\nu(\omega)$.

Dacă (Q, δ) şi (Q', δ') sînt două Ω - algebre, se numeşte Ω - **morfism de la** (Q, δ) **la** (Q', δ') orice aplicaţie $f : Q \to Q'$ astfel încît $\forall\, \omega \in \Omega$ şi pentru orice număr $n = \nu(\omega)$ de elemente $a_1, ..., a_n \in Q$, să aibă loc relaţia

$$f(\delta(\omega)(a_1, ..., a_n)) = \delta'(\omega)(f(a_1), ..., f(a_n)).$$

Pentru $n = 0$ aceasta revine la faptul că $\forall\, \omega \in \Omega$ cu $\nu(\omega) = 0$, avem

$$f(\delta(\omega)) = \delta'(\omega).$$

Morfismul f se numeşte **monomorfism** (respectiv **epimorfism**) dacă f este aplicaţie injectivă (respectiv surjectivă). Dacă morfismul f este bijectiv, atunci el se numeşte un **izomorfism.** Dacă Q este o Ω - algebră, orice izomorfism $f : Q \to Q$ se numeşte **automorfism al lui** Q.

Fie (Q, δ) o Ω - algebră; se numeşte **subalgebră** a lui Q orice submulţime $Q_1 \subset Q$ conţinînd toate elementele lui Q fixate prin operaţii nulare şi în plus, pentru orice n, pentru orice $\omega \in \Omega$ cu $\nu(\omega) = n$ şi oricare ar fi $a_1, ..., a_n \in Q_1$, să rezulte $\delta(\omega)(a_1, ..., a_n) \in Q_1$. Dacă (Q, δ) este o Ω - algebră şi P este o

submulţime a lui Q, atunci intersecţia tuturor subalgebrelor lui Q care conţin P este o subalgebră a lui Q, anume cea mai mică subalgebră care conţine P (numită şi Ω - **subalgebra lui Q generată de P**).

EXEMPLE. 1) Dacă $\Omega = \varnothing$, Ω - algebrele coincid cu mulţimile.

2) Fie $\Omega = \{*, \perp\}$ o signatură cu $\nu(*) = 2$, $\nu(\perp) = 0$. Atunci orice Ω - algebră este o mulţime Q şi o aplicaţie $\delta : \Omega \to OpQ$ astfel încît $\cdot = \delta(*)$ este o operaţie binară pe Q, iar $\delta(\perp)$ este un element $e \in Q$ (operaţie nulară). Dacă operaţia "$\cdot$" este asociativă şi are elementul neutru e, atunci Q este un monoid.

Dacă $\Omega = \{+, \cdot\}$ este o signatură cu $\nu(+) = \nu(\cdot) = 2$, A, B sînt inele şi $f: A \to B$ un morfism de inele, atunci A, B au structuri de Ω - algebre şi f este un morfism de Ω - algebre.

3) O întrebare firească este următoarea: fiind dată o signatură Ω, ce mulţimi admit structuri de Ω - algebră? Răspunsul nu este imediat. Astfel, se poate arăta că pe orice mulţime se poate introduce o structură de grup, dar nu pe orice mulţime se poate introduce o structură de corp (de exemplu, nu există corp cu 6 elemente). Se poate demonstra că pentru orice mulţime X se poate defini o Ω - algebră $\hat{X}$ şi o aplicaţie injectivă $i : X \to \hat{X}$ astfel încît pentru orice Ω - algebră Q şi pentru orice aplicaţie de mulţimi $g : X \to Q$ să existe şi să fie unic un morfism de Ω - algebre $G : \hat{X} \to Q$ astfel încît $G \circ i = g$. În plus, $\hat{X}$ care este unică (pînă la un izomorfism), este "cea mai mică" Ω - algebră care conţine X şi se numeşte Ω - **algebra liberă generată de mulţimea** X.

1.3. Proprietăţi de calcul în inele

Dacă $(A, +, \cdot, 0, 1)$ este un inel, notat pe scurt A, atunci pentru orice $x, y \in A$ sînt definite alte două elemente din A, anume $x + y$ şi xy şi sînt permise următoarele reguli de calcul:

a) $x + (y + z) = (x + y) + z$ şi $x + y = y + x$ pentru orice $x, y, z \in A$;

b) pentru orice $x \in A$, $0 + x = x$ şi există $-x \in A$ astfel ca $x + (-x) = 0$;

c) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$ pentru orice $x, y, z \in A$;

d) pentru orice $x \in A$, $1 \cdot x = x$ şi $x \cdot 1 = x$.

Punînd $x - y = x + (-y)$, se verifică imediat proprietăţile următoare, care reprezintă disponibilităţi de calcul în orice inel (nu neapărat comutativ).

e) $x = y$ dacă şi numai dacă $x - y = 0$;

f) $-0 = 0$, $-(-x) = x$, $-(x + y) = -x - y$, $-(x - y) = -x + y$; $x \cdot 0 = 0$, $0 \cdot x = 0$, $x \cdot (-y) = -(x \cdot y) = (-x) \cdot y$, $(-x) \cdot (-y) = xy$, $(-1) \cdot x = -x$, $(-1) \cdot (-x) = x$, pentru orice $x, y \in A$;

g) dacă inelul A are cel puţin două elemente, atunci $0 \neq 1$;

h) pentru orice element $a \in A$ se pot defini **multiplii întregi** ai lui a astfel: dacă $n \in \mathbb{N}$, se pune $0 \cdot a = 0$, $1 \cdot a = a$ şi inductiv, $(n + 1)a = na + a$.

Apoi $(-n) \cdot a = -(na)$ şi se probează că pentru orice $m, n \in \mathbb{Z}$ şi $a, b \in A$, avem $(m+n)a = ma + na$, $m(a+b) = ma + mb$ şi $m(na) = (mn)a$;

i) pentru orice $a \in A$ se pot defini **puterile naturale** ale lui a astfel: $a^0 = 1$, $a^1 = a$ şi inductiv $a^{n+1} = a^n \cdot a$. Se verifică uşor că

$$a^m \cdot a^n = a^n \cdot a^m = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn} \text{ pentru orice } a \in A \text{ şi } m, n \in \mathbb{N};$$

j) pentru orice două elemente $a,b \in A$ se defineşte **comutatorul** lor $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$. Dacă $[a, b] = 0$, adică $a \cdot b = b \cdot a$, atunci se verifică imediat prin inducţie că $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{n-k} \cdot b^k \text{ şi } a^n - b^n = (a-b) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} \cdot b^{k-1} \right).$$

Dacă K este un inel în care $0 \neq 1$ şi dacă orice $x \in K$, $x \neq 0$ admite invers relativ la înmulţire (notat x^{-1} sau $\frac{1}{x}$), atunci K este un corp. De exemplu $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sînt corpuri comutative, ca şi mulţimea $\mathbb{R}(X)$ a funcţiilor raţionale –cîturi de polinoame din $\mathbb{R}[X]$. Primul exemplu de corp necomutativ a fost corpul $\mathbb{H}$ al cuaternionilor datorat lui W. R. Hamilton, 1805-1865; cuaternionii sînt elemente de forma $x = a + bi + cj + dk$ unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ iar i, j, k sînt elemente fixate, avînd proprietăţile $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $-ji = ij = k$, $-kj = jk = i$, $-ik = ki = j$, adunarea şi înmulţirea cuaternionilor fiind definite în mod natural.

Dacă K este un corp comutativ, la proprietăţile de calcul valabile în orice inel se adaugă unele noi:

a) pentru orice $a \in K$, $a \neq 0$ se pot defini **puterile întregi** ale lui a, punînd $a^{-n} = (a^{-1})^n$; evident $K^* = K \setminus \{0\}$ este grup relativ la înmulţire.

b) în orice corp K se pot efectua: adunări $(x + y)$, scăderi $(x - y)$, înmulţiri $(x \cdot y)$ şi împărţiri cu elemente nenule $(x/y = x \cdot y^{-1})$; în plus. $\forall\, a, b, z \in K$ şi

$$\forall\, x, y \in K^*, \text{ avem } (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}, xz/xy = z/y, a/x + b/y = (ay + bx)/xy,$$

$$a/x \cdot b/y = ab/xy \text{ şi } (a/x)/(b/y) = ay/bx (b \neq 0).$$

Regula lui Cramer. Fie A un inel comutativ şi un sistem liniar de n ecuaţii şi n necunoscute

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ 1 \leq i \leq n,$$

în care toate elementele a_{ij}, b_i aparţin lui A. Să notăm cu Δ determinantul sistemului (1) şi să considerăm pentru orice $1 \leq k \leq n$ determinanţii

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \overset{k}{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Dacă A_{ij} este complementul algebric al elementului a_{ij}, atunci se cunosc relațiile

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = \Delta \cdot \delta_{ij}\, ; \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot A_{kj} = \Delta \cdot \delta_{ij}\, ,$$

unde am folosit simbolul lui Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad i = j \\ 0 & \text{dacă} \quad i \neq j \end{cases}$$

(L. Kronecker, 1823-1891).

Înmulțind prima ecuație a sistemului (1) cu A_{1k}, a doua cu A_{2k} etc., ultima cu A_{nk} și adunînd relațiile obținute, va rezulta că pentru orice k fixat, $1 \leq k \leq n$, avem

$$(a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}) \cdot x_k = b_1 \cdot A_{1k} + b_2 \cdot A_{2k} + \ldots + b_n \cdot A_{nk}.$$

Am obținut astfel

TEOREMA 1.1. (regula lui G. Cramer, 1704-1752). **Pentru orice sistem** (1), **au loc relațiile**

$$\Delta \cdot x_k = \Delta_k,\ 1 \leq k \leq n.$$

Dacă A este un corp comutativ și dacă $\Delta \neq 0$, atunci sistemul (1) **admite o soluție unică și anume** $(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$ **deci** $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, $1 \leq k \leq n$.

Prezentăm demonstrația dată mai sus utilizînd calculul cu sume: fixînd $1 \leq k \leq n$, înmulțind relația $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j$ cu A_{ik}, rezultă $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ik} x_j = A_{ik}\, b_i$; adunînd aceste n relații, se obține $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, A_{ik}\, x_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ik}\, b_i$ și inversînd ordinea de însumare în membrul stîng, obținem $\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, A_{ik} = \Delta_k$ adică $\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \Delta \cdot \delta_{jk} = \Delta_k$ deci $\Delta \cdot x_k = \Delta_k$ pentru $1 \leq k \leq n$.

Pentru orice matrice $M \in M_n(A)$ pătratică de ordin $n \geq 1$ cu coeficienți într-un inel comutativ A, $M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, fie $\widetilde{M} = (A_{ij})^T_{1 \leq i, j \leq n}$, adică transpusa matricei formate cu complemenții algebrici ai elementelor lui M.

TEOREMA 1. 2. Dacă A este un inel comutativ și $M \in M_n(A)$, atunci $M \cdot \widetilde{M} = M \cdot \widetilde{M} = \Delta \cdot I_n$, I_n fiind matricea unitate de ordin n. În plus, dacă elementul $\Delta = \det M$ din A admite invers față de înmulțire, atunci matricea M admite inversă, anume $M^{-1} = \Delta^{-1} \cdot \widetilde{M}$.

DEMONSTRAȚIE. Fie $M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Deoarece $\widetilde{M} = (A_{ji})_{1 \leq i, j \leq n}$, rezultă că elementul de pe linia i și coloana j din produsul $M \cdot \widetilde{M}$ este egal cu

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = \Delta \cdot \delta_{ij}.$$

Așadar,

$$M \cdot \widetilde{M} = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} \Delta & & \cdots & 0 \\ & \Delta & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \Delta \end{pmatrix} = \Delta \cdot I_n.$$

În mod similar se dovedește că $\widetilde{M} \cdot M = \Delta \cdot I_n$. Înmulțind relația $M \cdot \widetilde{M} = \Delta \cdot I_n$ cu Δ^{-1} rezultă $\Delta^{-1} \cdot (M \cdot \widetilde{M}) = I_n$ adică $M \cdot (\Delta^{-1} \widetilde{M}) = I_n$; la fel din relația $\widetilde{M} \cdot M = \Delta I_n$, rezultă $(\Delta^{-1}\widetilde{M}) \cdot M = I_n$ deci $\Delta^{-1}\widetilde{M}$ este inversa matricei M.

OBSERVAȚIE. Fără demonstrație formulăm două proprietăți mai speciale ale determinanților peste un inel comutativ A:

1) Dacă $P \in M_{n,m}(A)$, $Q \in M_{m,n}(A)$, $n \leq m$ sînt două matrice, atunci

$$\det(P \cdot Q) = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_n \leq m} P^{12\ldots n}_{k_1 k_2 \ldots k_n} \cdot Q^{k_1 k_2 \ldots k_n}_{12\ldots n}$$

unde $P^{12\ldots n}_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ este minorul din matricea P situat pe liniile $1, 2, \ldots, n$ și coloanele $k_1, k_2, \ldots, k_n$, iar $Q^{k_1 k_2 \ldots k_n}_{12\ldots n}$ este minorul din Q situat pe liniile $k_1, k_2, \ldots, k_n$ și coloanele $1, 2, \ldots, n$.

Aceasta se mai numește **regula Binet-Cauchy** (*J.Ph.Binet 1786-1856; A.Cauchy, 1789-1857*). În cazul cînd $m = n$, rezultă de aici direct că pentru orice $P, Q \in M_n(A)$,

$$\det(P \cdot Q) = (\det P) \cdot (\det Q).$$

Ca o consecință a teoremei 1.2, rezultă că dacă K este un corp comutativ, o matrice $M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ din $M_n(K)$ admite inversă relativ la înmulțire dacă și numai dacă $\det M \neq 0$ și în acest caz, $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M} \cdot \widetilde{M}$. [Să observăm că,

într-adevăr, dacă M admite inversa N, atunci $M \cdot N = I_n$ deci $(\det M) \cdot (\det N) = \det(M \cdot N) = \det I_n = 1$ şi ca atare $\det M \neq 0$, iar cealaltă implicaţie rezultă direct din teorema 1.2].

2) Dacă într-un determinant de ordin $n \geq 2$ se fixează k linii (respectiv coloane), $1 \leq k \leq n - 1$, atunci suma produselor minorilor de ordin k, cuprinşi în liniile (respectiv coloanele) fixate, cu complemenţii algebrici ai acestora este egală cu valoarea acelui determinant (**regula lui P. S. Laplace**, *1749 – 1827*). Pentru $k = 1$ se obţine dezvoltarea unui determinant după o linie (respectiv coloană).

Revenind la proprietăţile generale de calcul cu elementele unui inel, reamintim că un inel A se numeşte integru dacă $x, y \in A$ şi $x y = 0$ implică $x = 0$ sau $y = 0$. Inelele $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}[[X]]$, $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ sînt inele integre. De asemenea, orice corp este inel integru. Dar $\mathbb{Z}_4$ nu este inel integru (căci $\hat{2} \cdot \hat{2} = \hat{0}$) şi la fel $M_2(\mathbb{R})$ [pentru că luînd $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avem $x \cdot y = 0$ şi $x \neq 0, y \neq 0$]. Dacă $n \geq 2$ este un întreg, se ştie că inelul $\mathbb{Z}_n$, al claselor de resturi modulo n, este integru dacă şi numai dacă n este prim şi în acest caz, $\mathbb{Z}_n$ este un corp.

Dacă A este un inel şi B este un subinel al lui A (adică $1 \in B$ şi $\forall x, y \in B$, rezultă $x - y \in B$ şi $xy \in B$), atunci vom mai scrie $B \hookrightarrow A$. De exemplu, $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R}[X] \hookrightarrow \mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X] \hookrightarrow \mathbb{R}[[X]]$.

DEFINIŢIA1.6. O submulţime $\underline{a} \subset A$ a unui inel comutativ A se numeşte un **ideal** al lui A dacă sînt satisfăcute condiţiile următoare:

1) $\forall\, x, y \in \underline{a},\ x + y \in \underline{a}$;

2) $\forall\, x \in \underline{a}, \forall\, z \in A,\ x \cdot z \in \underline{a}$.

Este clar că $0 \in \underline{a}$ (deoarece alegînd $x \in \underline{a}$, avem $-x \in \underline{a}$ şi $0 = x + (-x)$ deci $0 \in \underline{a}$).

Un ideal $\underline{a} \subset A$ se numeşte **principal** dacă există un element $u \in A$ astfel încît $a = uA \overset{\Delta}{=} \{u \cdot z \mid z \in A\}$. Inelul comutativ A se numeşte **principal** dacă orice ideal al său este principal.

EXEMPLE. 1) $\mathbb{Z}$ este un subinel al lui $\mathbb{Q}$, dar nu este un ideal al lui $\mathbb{Q}$ (pentru că produsul dintre un număr întreg şi unul raţional nu este neapărat întreg).

2) Mulţimea numerelor întregi multipli ai unui întreg fixat k este un ideal al lui $\mathbb{Z}$, notat $k\mathbb{Z}$.

3) Dacă A şi B sînt două inele, A comutativ şi $f : A \to B$ este un morfism de inele (deci $\forall\, x, y \in A$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ şi $f(0) = 0$, $f(1) = 1$) atunci nucleul lui f, $\operatorname{Ker} f = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$ este un ideal al lui A.

TEOREMA 1.3. Inelele $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{R}[X]$ sînt inele principale

DEMONSTRAŢIE. Fie $\underline{a}$ un ideal al lui $\mathbb{Z}$. Dacă $\underline{a} = \{0\}$, atunci luăm $u = 0$ şi rezultă $\underline{a} = uA$. Dacă $\underline{a} \neq \{0\}$, atunci alegem $h \in \underline{a}$, $h \neq 0$. Atunci $-h \in \underline{a}$ şi ca atare mulţimea $\underline{a}$ conţine numere întregi ≥ 1. Fie $u \geq 1$ minim, astfel încît $u \in \underline{a}$. Atunci rezultă prin dublă incluziune $\underline{a} = uA$. (Dacă $x \in uA$, atunci $x \in \underline{a}$ conform însăşi definiţiei unui ideal; invers, dacă $x \in \underline{a}$, atunci împărţind x la u, există $q, r \in \mathbb{Z}$ astfel încît $x = q \cdot u + r$ cu $0 \leq r < u$. Dar, în acest caz, $r = x - u \cdot q$ deci $r \in \underline{a}$. Dacă am avea $r \geq 1$, atunci cum $r < u$ s-ar nega minimalitatea lui u; deci unica posibilitate este $r = 0$, $x = q \cdot u$ adică $x \in uA$).

Fie acum $\underline{a}$ un ideal oarecare al inelului $\mathbb{R}[X]$. Dacă $\underline{a} = \{0\}$, atunci luăm $u = 0$ (polinom nul) şi rezultă $\underline{a} = u \cdot \mathbb{R}[X]$. În cazul cînd $\underline{a} \neq \{0\}$ există polinoame nenule situate în $\underline{a}$ şi fie H un polinom de grad minim conţinut în $\underline{a}$. Vom arăta prin dublă incluziune că $\underline{a} = H \cdot \mathbb{R}[X]$. Mai întîi, pentru orice $S \in H \cdot \mathbb{R}[X]$, avem $S = H \cdot T$ cu $T \in \mathbb{R}[X]$ şi cum $H \in \underline{a}$, iar $\underline{a}$ este un ideal, rezultă $S \in \underline{a}$. Invers, pentru orice $S \in \underline{a}$, împărţind S cu H, rezultă că există polinoame C, R astfel încît $S = C \cdot H + R$, cu $R = 0$ sau $\operatorname{gr} R < \operatorname{gr} H$. Deoarece $S, H \in \underline{a}$, rezultă că $R \in \underline{a}$ şi cum H a fost ales de grad minim printre polinoamele din $\underline{a}$, nu putem avea $\operatorname{gr} R < \operatorname{gr} H$ ci numai $R = 0$. Dar atunci rezultă $S = C \cdot H$ şi ca atare $S \in H \cdot \mathbb{R}[X]$, deci $\underline{a} = H \cdot \mathbb{R}[X]$.

1.4. Polinoame şi funcţii polinomiale

Fie A un inel comutativ. Orice polinom $P \in A[X]$ cu coeficienţi în A se reprezintă sub forma $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_k X^k$, unde X este o nedeterminată, identificată cu polinomul $(0, 1, 0, \ldots)$. Oricărui polinom $P \in A[X]$ ca mai sus i se asociază o funcţie $\tilde{P} : A \to A$, $\tilde{P}(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k$ numită **funcţia polinomială asociată lui** P. Este evident că $(P+Q)^{\sim} = \tilde{P} + \tilde{Q}$, $(P \cdot Q)^{\sim} = \tilde{P} \cdot \tilde{Q}$ şi $(\lambda P)^{\sim} = \lambda \cdot \tilde{P}$, pentru orice $P, Q \in A[X]$ şi $\lambda \in A$. Dacă $P = Q$, atunci evident $\tilde{P} = \tilde{Q}$. Dar, are loc şi reciproca, anume

TEOREMA 1.4. Dacă A este un inel comutativ, integru, infinit şi dacă $P, Q \in A[X]$, $\tilde{P} = \tilde{Q}$, atunci $P = Q$.

DEMONSTRAŢIE. Notăm $R = P - Q$, deci $\tilde{R} = \tilde{P} - \tilde{Q}$ şi conform ipotezei avem $\tilde{R} = 0$. Dacă $R = c_0 + c_1 X + \ldots + c_p X^p$ cu $c_i \in A$, faptul că $\tilde{R} = 0$ revine la aceea că pentru orice $z \in A$ avem $c_0 + c_1 z + \ldots + c_p z^p = 0$. Deoarece A are o infinitate de elemente, putem alege $p + 1$ elemente distincte $z_1, z_2, \ldots, z_{p+1} \in A$ şi au loc relaţiile

$$c_0 + c_1 z_1 + c_2 z_1^2 + \dots + c_p z_1^p = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$c_0 + c_1 z_{p+1} + c_2 z_{p+1}^2 + \dots + c_p z_{p+1}^p = 0$$

Aceste relaţii definesc un sistem liniar omogen cu $p+1$ ecuaţii şi $p+1$ necunoscute $c_0, c_1, \dots, c_p$. Determinantul sistemului este

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_{p+1} & z_{p+1}^2 & \dots & z_{p+1}^p \end{vmatrix}$$

şi este un determinant Vandermonde, cu valoarea $\Delta = \prod_{1 \le i < j \le n} (z_j - z_i)$. Toate diferenţele $z_j - z_i$, $i < j$, fiind elemente nenule din A, iar A fiind integru, rezultă că $\Delta \neq 0$. Conform teoremei 1.1., rezultă că $\Delta \cdot c_i = 0$ pentru $0 \le i \le p$ şi cum $\Delta \neq 0$, atunci $c_i = 0$ pentru orice $0 \le i \le p$ adică $R = 0$. În concluzie, $P = Q$.

OBSERVAŢIE. Condiţia ca A să fie inel integru infinit este esenţială. De exemplu, dacă $A = \mathbb{Z}_2$, pentru polinoamele $P = X^2$, $Q = X$ avem $\tilde{P} = \tilde{Q}$ (pentru că $x^2 = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}_2$), dar $P \neq Q$.

Aşadar, polinoamele nu se identifică totdeauna cu funcţiile polinomiale asociate. Totuşi dacă A este un inel comutativ integru infinit (de exemplu pentru $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), asocierea $P \to \tilde{P}$ este injectivă şi ca atare, P se poate identifica prin $\tilde{P}$. De exemplu, polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = X^2 - X$ se identifică cu funcţia reală polinomială de gradul doi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$.

Fixăm un inel comutativ A şi un polinom $P \in A[X]$. Reamintim că un element $\alpha \in A$ se numeşte **rădăcină** a lui P dacă $\tilde{P}(\alpha) = 0$. În cazul inelelor oarecare pot apărea unele fenomene curioase. De exemplu, polinomul $P = X^2 - 2X$ de gradul doi are patru (!) rădăcini în $\mathbb{Z}_8$, anume $\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}$.

În mod similar, polinomul $(2X+1)^2$ considerat în $\mathbb{Z}_4[X]$ are gradul 0 şi nu 2 cum ne spune intuiţia. Dacă A este un inel comutativ şi integru, astfel de lucruri nu se întîmplă, pentru că în acest caz, dacă $P \neq 0$ este un polinom de grad n, atunci P are cel mult n rădăcini distincte (altminteri raţionînd ca în demonstraţia teoremei 1.4. ar rezulta că $P = 0$), iar dacă P, Q sînt două polinoame nenule, atunci $\text{gr}\, PQ = \text{gr}\, P + \text{gr}\, Q$; în particular, inelul $A[X]$ este integru.

Reamintim acum o serie de proprietăţi ale polinoamelor, care vor fi folosite în continuare.

a) Dacă A este un corp comutativ (de exemplu $A = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sau $\mathbb{R}(X)$), atunci în inelul $A[X]$ are loc teorema împărţirii cu rest: pentru orice două polinoame

P, Q există şi sînt unice alte două polinoame C şi R astfel ca $P = Q \cdot C + R$, unde ($\text{gr}\, R < \text{gr}\, Q$) sau ($R = 0$). Un astfel de rezultat nu are loc în $\mathbb{Z}[X]$ şi nici în inelul polinoamelor în două sau mai multe nedeterminate.

b) dacă $P \in \mathbb{Z}[X]$ şi $a \in \mathbb{Z}$ este o rădăcină a lui P atunci $\tilde{P}(0)$ este divizibil cu α.

c) Fie $P \in \mathbb{C}[X]$ şi α o rădăcină de ordin k, $k \geq 1$, a lui P, adică P este divizibil cu $(X-a)^k$ dar P nu este divizibil cu $(X-a)^{k+1}$. Atunci $\tilde{P}(\alpha) = \tilde{P}'(\alpha) = \ldots = \tilde{P}^{(k-1)}(\alpha) = 0$, $\tilde{P}^{(k)}(\alpha) \neq 0$ şi reciproc. O astfel de proprietate nu are loc pentru polinoame cu coeficienţi din corpuri finite. De exemplu, luînd $P = X^{10} + 1$ în $\mathbb{Z}_5[X]$ se constată că $P^{(k)} = 0$ pentru orice $k \geq 1$ şi totuşi $P = (X-2)^5(X-3)^5$.

d) dacă $P \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ şi $\alpha = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ este o rădăcină a lui P de ordin k, atunci $\overline{\alpha} = a - bi$ are aceeaşi proprietate.

e) orice polinom de grad ≥ 1 din $\mathbb{C}[X]$ are cel puţin o rădăcină în $\mathbb{C}$ (**teorema fundamentală a algebrei**); ca o consecinţă, orice polinom $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$ de grad $n \geq 1$ se descompune în factori liniari (de gradul întîi), $P = a_0(X - x_1)^{k_1} \ldots (X - x_p)^{k_p}$ cu $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{C}$ distincte, $1 \leq k_1, \ldots, k_p \leq n$ şi $k_1 + \ldots + k_p = n$.

Ca un fapt de cultură, menţionăm că ecuaţiile algebrice ($P(x) = 0$ cu $P \in \mathbb{C}[X]$) de gradul 2, 3 şi 4 pot fi rezolvate prin radicali, dar nu acelaşi lucru are loc pentru ecuaţii algebrice de grad $n \geq 5$ (teorema lui N.Abel, 1802 – 1829).

f) Fie $Q = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 \neq 0$ un polinom din $\mathbb{R}[X]$; el se descompune, unic pînă la ordinea factorilor, ca produs de polinoame de grad ≤ 2:

$$Q(X) = a_0 \prod_{i=1}^{r} (X - x_i)^{k_i} \cdot \prod_{j=1}^{s} \left[(X - \alpha_j)^2 + \beta_j^2 \right]^{l_j}$$

$x_1, \ldots, x_r$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$; $\beta_1, \ldots, \beta_s$ reale, $\beta_j \neq 0$ şi $k_1, \ldots, k_r$; $l_1, \ldots, l_s$ întregi ≥ 1 astfel încît $k_1 + \ldots + k_r + 2l_1 + \ldots + 2l_s = n$.

Fie P un alt polinom din $\mathbb{R}[X]$ astfel încît $\text{gr}\, P < \text{gr}\, Q$. Atunci există şi sînt unice numerele reale A_{ij}, C_{ik}, D_{ik} astfel încît să aibă loc "descompunerea în fracţii simple"

$$\frac{P}{Q} = \frac{A_{11}}{(X - x_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{X - x_1} + \frac{A_{21}}{(X - x_2)^{k_2}} + \ldots +$$

$$+ \frac{A_{2k_2}}{X - x_2} + \ldots + \frac{A_{r1}}{(X - x_r)^{k_r}} + \ldots + \frac{A_{rk_r}}{X - x_r} +$$

$$+\frac{C_{11}X+D_{11}}{\left[(X-\alpha_1)^2+\beta_1^2\right]^{l_1}}+\ldots+\frac{C_{1l_1}X+D_{1l_1}}{(X-\alpha_1)^2+\beta_1^2}+\ldots+$$

$$+\ldots+\frac{C_{s1}X+D_{s1}}{\left[(X-\alpha_s)^2+\beta_s^2\right]^{l_s}}+\ldots+\frac{C_{sl_s}X+D_{sl_s}}{(X-\alpha_s)^2+\beta_s^2}$$

Numerele A_{ij}, C_{ik}, D_{ik} se determină, după aducere la același numitor, prin "metoda coeficienților nedeterminați".

De exemplu,

$$\frac{X^4+1}{X^4-X^3-X+1}=1+\frac{X^3+X}{(X-1)^2(X^2+X+1)}=1+\frac{A}{(X-1)^2}+\frac{B}{X-1}+\frac{CX+D}{X^2+X+1}$$

și în mod similar,

$$\frac{X^2+X+2}{X^3(X^2+4X+5)^2}=\frac{A}{X^3}+\frac{B}{X^2}+\frac{C}{X}+\frac{DX+E}{(X^2+4X+5)^2}+\frac{FX+G}{X^2+4X+5}\text{ etc.}$$

Din cele menționate mai sus, se observă rolul important pe care îl are mulțimea de unde sînt luați coeficienții polinoamelor. Un fenomen unde se subliniază sugestiv acest fapt îl constituie ireductibilitatea polinoamelor. Reamintim că dacă K este un corp comutativ, un polinom $P \in K[X]$ este ireductibil peste K dacă el nu este produsul a două polinoame din $K[X]$ de grad strict mai mic. Astfel, X^2+1 este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ și peste $\mathbb{R}$, dar nu peste $\mathbb{C}$. Apoi X^2-3 este ireductibil peste $\mathbb{Q}$ dar nu și peste $\mathbb{R}$, după cum X^2+X+1 este ireductibil în $\mathbb{R}[X]$ și în $\mathbb{Z}_2[X]$ dar nu și în $\mathbb{Z}_3[X]$, deoarece în acest caz $X^2+X+1=(X+2)^2$.

1.5. Aplicații ale seturilor de numere în codificare

Fie $\mathbb{B}$ codul binar identificat cu $\mathbb{Z}_2$. Dacă $1 \le m \le n$ sînt întregi fixați, numim **codificare binară** orice aplicație injectivă $c:\mathbb{B}^m \to \mathbb{B}^n$. Așadar, oricăror cuvinte binare distincte de lungime m le corespund, prin c, cuvinte binare distincte de lungime mai mare, anume egală cu n. Indicăm două moduri de a construi codificări binare, folosind matricele și respectiv polinoamele.

a) Fie $M \in M_{n,m}(\mathbb{B})$ o matrice de rang m, presupus maxim. Atunci aplicația

$$c:\mathbb{B}^m \to \mathbb{B}^n,\ c(x) = x\cdot M^T$$

care asociază oricărui vector m-dimensional $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ vectorul n–dimensional $x\cdot M^T$ este injectivă deci o codificare. [Într-adevăr, dacă $x, y \in \mathbb{B}^m$ și $c(x)=c(y)$, atunci $x\cdot M^T=y\cdot M^T$ și punînd $z=x-y$, rezultă $z\cdot M^T=0$. Deoarece M^T este o matrice $m\times n$ avînd rangul m, rezultă că sistemul liniar $z\cdot M^T=0$ admite numai soluția banală, anume $z=0$ deci $x=y$]. Matricea M se numește **cheia** codificării.

Exemplu. Fie $m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; matricea M admite rangul 2 şi defineşte o codificare $c : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^3$, $c(x) = x \cdot M^T$. În mod explicit,

$$c(0,0) = (0,0,0);\ c(0,1) = (0,1,1);$$
$$c(1,0) = (1,0,1);\ c(1,1) = (1,1,0).$$

Fie $c : \mathbb{B}^m \to \mathbb{B}^n$ o codificare binară. Dacă $L \subset \mathbb{B}^m$ este o colecţie de cuvinte binare de lungime m şi notăm cu $L_1 = c(L)$ mulţimea tuturor cuvintelor din L traduse în cuvinte binare de lungime n, atunci este definită o aplicaţie bijectivă $c : L \to L_1$, a cărei inversă $c^{-1} : L_1 \to L$ este numită **aplicaţia de decodificare**.

b) Fixăm un întreg $n \geq 1$ şi un polinom $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_p X^p \in \mathbb{Z}_2[X]$ de grad p, cu $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_p \neq 0$ (numit **cheia** codificării).

Definim aplicaţia $c : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^{n+p}$ astfel:
pentru orice $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{B}^n$, considerăm polinomul
$P_a = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1}$ şi produsul de polinoame
$P_a \cdot Q = a_0\alpha_0 + (a_0\alpha_1 + a_1\alpha_0)X + \ldots + a_{n-1}\alpha_p X^{n+p-1}$, care este un polinom de grad $n + p - 1$ din inelul $\mathbb{Z}_2[X]$, de polinoame cu coeficienţi în $\mathbb{Z}_2$. Punem prin definiţie $c(a) = (a_0\alpha_0, a_0\alpha_1 + a_1\alpha_0, \ldots, a_{n-1}\alpha_p) \in \mathbb{B}^{n+p}$. Se obţine astfel o codificare binară. [Într-adevăr, dacă $a, b \in \mathbb{B}^n$ şi dacă $c(a) = c(b)$, atunci $P_a \cdot Q = P_b \cdot Q$ deci $P_a = P_b$ şi $a = b$].

Exemplu. Luăm $Q = 1 + X^3 + X^4$ şi $n = 2$. Atunci aplicaţia $c : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^6$, asociată lui Q, "lucrează" astfel:

$$c(0, 0) = (0, 0, 0, 0, 0, 0);\ c(0, 1) = (0, 1, 0, 0, 1, 1);$$
$$c(1, 0) = (1, 0, 0, 1, 1, 0);\ c(1, 1) = (1, 1, 0, 1, 0, 1).$$

§ 2. Spaţii vectoriale, baze; aplicaţii liniare şi matrice asociate

2.1. Spaţii vectoriale finit generate, baze.

Fie K un corp comutativ (de exemplu $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$).

Definiţia 2.1. Se numeşte **spaţiu vectorial peste** K (sau K–spaţiu vectorial) o mulţime nevidă V înzestrată cu o lege de compoziţie internă, notată +, relativ la care V este grup abelian şi o lege de compoziţie externă, notată "$\cdot$" : $K \times V \to V$, $(\lambda, x) \to \lambda x = \lambda \cdot x$, cu proprietăţile:

(1) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $\forall \lambda \in K$, $\forall x, y \in V$.

(2) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, $\forall \lambda, \mu \in K, \forall x \in V$.

(3) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, $\forall \lambda, \mu \in K$, $\forall x \in V$.

(4) $1 \cdot x = x$, $\forall x \in V$.

Elementele din spaţiul vectorial V se mai numesc şi **vectori**, iar elementele din corpul comutativ K se mai numesc **scalari**. Vectorul nul se notează 0 (sau 0_V), iar scalarul nul se mai notează uneori 0_K.

OBSERVAŢIE. Direct din definiţia spaţiului vectorial V peste K se obţin reguli de calcul simple ca acestea:

a) $\lambda \cdot 0_V = 0_V$, $\forall \lambda \in K$ [Într-adevăr, $\lambda \cdot 0 = \lambda(0+0) \overset{\text{cf. (1)}}{=} \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$, de unde adunînd cu $-(\lambda \cdot 0)$, rezultă $0 = \lambda \cdot 0$].

b) $0_K \cdot x = 0_V$, $\forall x \in V$ [deoarece: $0 \cdot x = (0+0)x \overset{cf.(2)}{=} 0x + 0x$, deci $0 \cdot x = 0$].

c) $\lambda \cdot x = 0_V \Rightarrow \lambda = 0_K$ sau $x = 0_V$ $(\lambda \in K, x \in V)$ [într-adevăr, dacă $\lambda \neq 0$, atunci există $\lambda^{-1} \in K$, deoarece K este corp şi atunci $\lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1} \cdot 0 = 0$ sau cf. (3) $(\lambda^{-1}\lambda)x = 0$; deci, conform (4) $1x = x = 0$].

EXEMPLE. 1) $V = K^n = \{ x = (x_1, ..., x_n) \mid x_i \in K, 1 \leq i \leq n\}$, $n \geq 1$ are o structură naturală de K-spaţiu vectorial, cu legile de compoziţie:

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\text{şi} \quad \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),\ \forall x, y \in K^n,\ \forall \lambda \in K.$$

Acest exemplu este exemplul tipic (fundamental) pentru acest capitol. În particular, dacă $K = \mathbb{R}$ se obţine spaţiul vectorial real $\mathbb{R}^n$ şi dacă $K = \mathbb{C}$ se obţine spaţiul vectorial complex $\mathbb{C}^n$. De asemenea, $\mathbb{B}^n$ este un $\mathbb{B} = \mathbb{Z}_2$ -spaţiu vectorial.

2) $V = \mathbb{C}^n$ are o structură de $\mathbb{R}$ -spaţiu vectorial.
3) $V = K[X]$ este un K -spaţiu vectorial.
4) $M_{m,n}(K)$ este K -spaţiu vectorial.
5) $C^0_{[a,\,b]}$ este un $\mathbb{R}$ -spaţiu vectorial.

Multe alte exemple de spaţii vectoriale vor fi întîlnite în continuare.

Pentru a defini lungimi de vectori, unghiuri între vectori nenuli, arii, proiecţii, perpendicularitate etc. este necesar să îmbogăţim structura de spaţiu vectorial, introducînd produse scalare (cap. II).

DEFINIŢIA 2.2. Fie V un K -spaţiu vectorial. O submulţime nevidă $S \subset V$ se numeşte **sistem de generatori** pentru V dacă pentru orice $x \in V$, există o submulţime finită $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset S$ şi scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in K$ astfel încît $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k$ (mai spunem că x este o combinaţie liniară de $v_1, v_2, \ldots, v_k$, cu scalari din K). V se numeşte K -spaţiu vectorial **finit generat** dacă admite un sistem de generatori finit.

O submulţime nevidă $L \subset V$ se numeşte **sistem liniar independent** de vectori dacă pentru orice submulţime finită a sa $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset L$ şi orice relaţie de forma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$, rezultă $\lambda_i = 0$, pentru $i = 1, 2, \ldots, k$.

O submulțime nevidă de vectori care nu este sistem liniar independent se numeşte sistem **liniar dependent**.

O submulțime nevidă $\mathscr{B} \subset V$ se numeşte **bază a lui** V dacă este în acelaşi timp sistem de generatori şi sistem liniar independent. În acest caz, orice vector x din V este o combinație liniară unică de vectori din $\mathscr{B}$ [Dacă $x = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$, $x = \sum_{j \in J} m_j v_j$ (I, J finite), atunci $I = J$ şi $\lambda_i = \mu_i$, pentru orice $i \in I$].

OBSERVAȚIE. Mulțimea $V = \{0\}$ cu un singur element şi cu legile de compoziție: $0+0=0$ şi $\lambda \cdot 0 = 0$, $\forall \lambda \in K$, este un K-spațiu vectorial, numit spațiul **nul**. Singura sa submulțime nevidă, anume $\{0\}$ este sistem de generatori, dar nu este sistem liniar independent. Vom considera, prin convenție, că mulțimea vidă este o bază în spațiul vectorial nul.

EXEMPLE. 1) Fie în K-spațiul vectorial K^n vectorii $e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,\dots,0)$, ..., $e_n = (0,0,\dots,1)$ şi $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ $(n \geq 1)$. Rezultă imediat din definiții că $\mathscr{B}$ este bază în K^n – **canonică**.

2) Vectorii $u_1 = (1,1)$, $u_2 = (2,1)$ formează o bază pentru $\mathbb{R}^2$. [Într-adevăr, dacă $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$ cu $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, atunci $(\lambda_1, \lambda_1) + (2\lambda_2, \lambda_2) = (0,0)$ deci $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ de unde $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ şi ca atare u_1, u_2 sînt liniari independenți. Apoi, pentru orice $v \in \mathbb{R}^2$, $v = (a,b)$ există $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ astfel încît $v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ adică $\lambda_1 + 2\lambda_2 = a$, $\lambda_1 + \lambda_2 = b$; anume $\lambda_1 = 2b - a$, $\lambda_2 = a - b$. Aşadar, $\{u_1, u_2\}$ este şi un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^2$].

3) În spațiul vectorial $\mathbb{R}[X]$, sistemul de vectori $\mathscr{B} = \{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$ formează o bază, infinită (numită **baza canonică** a lui $\mathbb{R}[X]$). Pentru orice întreg $k \geq 1$ notăm cu $\mathbb{R}_k[X]$ spațiul vectorial al polinoamelor de grad $\leq k$.

Atunci $\{1, X, \dots, X^k\}$ formează o bază finită, avînd $k+1$ vectori, pentru $\mathbb{R}_k[X]$.

TEOREMA 2.1. (existența bazelor). Fie $V \neq \{0\}$ un K-spațiu vectorial finit generat. Din orice sistem de generatori finit al lui V se poate extrage o bază.

DEMONSTRAȚIE. Fie $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ un sistem de generatori finit al lui V. S conține şi vectori nenuli; în caz contrar, $\forall v \in V$, $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i = 0$ $(\lambda_i \in K)$, deci $V = \{0\}$, contradicție. Fie deci $v_1 \in S$, $v_1 \neq 0$; atunci $\{v_1\} (\subset S)$ este un sistem liniar independent. Într-adevăr, din orice relație de forma $\lambda v_1 = 0$ $(\lambda \in K)$ rezultă $\lambda = 0$. Deci în submulțimea finită S există submulțimi care sînt sisteme liniar independente de vectori. Deoarece mulțimea părților lui S este finită, atunci se poate alege într-un număr finit de paşi o submulțime $\mathscr{B} \subset S$ care este un sistem liniar independent şi maximal de vectori (maximal, în sensul că orice sistem $\mathscr{B}_1$ astfel încît $\mathscr{B} \subsetneq \mathscr{B}_1 \subset S$ este

liniar dependent). Renumerotînd eventual vectorii din S putem presupune că $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$, $1 \le r \le m$. Vom arăta că $\mathscr{B}$ este o bază pentru V şi pentru aceasta, este suficient să demonstrăm că $\mathscr{B}$ generează V, adică să arătăm că orice vector $z \in V$ este combinaţie liniară de vectori din $\mathscr{B}$. Dar z este o combinaţie liniară de vectori din S şi este suficient să arătăm că orice vector v_k, $r+1 \le k \le m$ este o combinaţie liniară de vectori din $\mathscr{B}$. Într-adevăr, sistemul $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B} \cup \{v_k\}$ va fi liniar dependent (din maximalitatea lui $\mathscr{B}$) deci există $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, $\alpha \in K$ nu toţi nuli astfel încît $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \alpha v_k = 0$; evident $\alpha \ne 0$ [căci dacă $\alpha = 0$, atunci $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$ şi $\mathscr{B}$ fiind liniar independent, ar rezulta $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$], deci v_k va rezulta o combinaţie liniară de $v_1, \dots, v_r$ şi teorema este demonstrată.

COROLAR. Fie V un K-spaţiu vectorial nenul, S un sistem de generatori finit pentru V. Orice submulţime $L \subset S$ care este sistem liniar independent de vectori poate fi completată cu elemente din S pînă la o bază a lui V.

DEMONSTRAŢIE. Dacă $L \subset S$ este maximală, atunci raţionînd ca mai sus rezultă că L este bază. Altminteri, există un sistem L_1 liniar independent de vectori astfel încît $L \subset L_1 \subset S$. Dacă L_1 ar fi maximal, atunci L_1 ar fi o bază iar dacă L_1 nu este maximal, se continuă raţionamentul. Deoarece S este finit, după un număr finit de paşi, se va obţine un sistem liniar independent maximal de vectori $\mathscr{B}$ astfel încît $L \subset \mathscr{B} \subset S$ deci $\mathscr{B}$ este o bază pentru V şi are proprietatea din enunţ.

TEOREMA 2.2. Fie V un K-spaţiu vectorial nenul, finit generat. Orice sistem liniar independent finit de vectori din V poate fi completat pînă la o bază a lui V.

DEMONSTRAŢIE. Prin ipoteză, V admite un sistem finit S de generatori. Fie L un sistem liniar independent de vectori din V. Atunci reuniunea $L \cup S$ constituie un sistem finit de generatori pentru V şi aplicăm corolarul teoremei 2.1. pentru incluziunea $L \subset L \cup S$. Va rezulta că L poate fi completat pînă la o bază a lui V.

TEOREMA 2.3. (cardinalul bazei). Fie V un K–spaţiu vectorial nenul finit generat. Toate bazele lui V sînt finite şi au acelaşi număr de elemente.

DEMONSTRAŢIE. Fie $\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază a lui V (aceasta există conform teoremei 2.1.). Arătăm mai întîi că **un sistem de vectori $\{e_1', \dots, e_m'\}$ din V cu $m > n$ nu poate fi o bază pentru V.** [Într-adevăr, deoarece $\mathscr{B}$ este bază, orice vector e_i' se scrie în mod unic sub forma $e_i' = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} e_j$, $1 \le i \le m$. Atunci pentru orice scalari $x_1, \dots, x_m \in K$ avem:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i e_i' = \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \right) = \sum_{j=1}^{n} x_i \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \right) e_j$$

O relație de forma $\sum_{i=1}^{m} x_i e_i' = 0$ este deci echivalentă cu $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i = 0$, $1 \le j \le n$ deci cu un sistem liniar și omogen cu n ecuații și $m > n$ necunoscute. Dar un astfel de sistem admite soluții nebanale, deoarece rangul s al matricei coeficienților satisface $s \le n$ și deci $m - s \ge 1$ și teorema lui Rouché arată că $m - s$ necunoscute rămîn nedeterminate. Ca atare, vectorii $e_1', \ldots, e_m'$ sînt liniar dependenți]. Rezultă în particular că orice bază a lui V este finită.

Fie $\mathcal{B}' = \{f_1, \ldots, f_m\}$ o bază oarecare a lui V. Conform celor demonstrate, rezultă că nu putem avea $m > n$ deci în mod necesar $m \le n$. Intervertind rolul bazelor $\mathcal{B}$ și $\mathcal{B}'$, rezultă $n \le m$ și în final $m = n$.

Teorema 2.3. arată că orice două baze ale lui V au același cardinal.

Exemple. 1) Fie $V = \mathbb{R}^3$ și $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 3)$. Vectorii v_1, v_2 sînt liniari independenți. Conform teoremei 2.2. ei pot fi completați pînă la o bază a lui $\mathbb{R}^3$ peste $\mathbb{R}$. Concret, se poate alege $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ astfel încît vectorii v_1, v_2, v să fie liniar independenți și aceștia vor forma o bază (de exemplu, luăm $v = (3, 1, 0)$).

2) Fie $V = \mathbb{R}_2[X]$ și $P_1 = 1$, $P_2 = X$. Orice polinom de forma $P = X^2 + \alpha X + \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) are proprietatea că $\{P_1, P_2, P\}$ formează o bază pentru V peste $\mathbb{R}$.

Definiția 2.3. Fie $V \ne \{0\}$ un K-spațiu vectorial finit generat. Numărul de elemente dintr-o bază a lui V se numește **dimensiunea lui** V (nu depinde de baza aleasă) și se notează $\dim_K V$. Vom mai spune că V este de **dimensiune finită**. În concordanță cu o convenție anterioară punem, pentru $V = \{0\}$, $\dim_K V = 0$. Dacă V nu este finit generat punem $\dim_K V = \infty$.

Corolar. Fie V un spațiu vectorial peste K cu $\dim_K V = n$, finită.

a) Orice sistem liniar independent cu n vectori formează o bază. Orice $m > n$ vectori din V formează un sistem liniar dependent.

b) Orice sistem de generatori al lui V cu n vectori formează o bază. Orice $m < n$ vectori din V nu formează un sistem de generatori pentru V.

Demonstrație. a) Fie $L = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un sistem liniar independent cu n vectori. Din teorema 2.2. rezultă că L poate fi completat la o bază; din teorema cardinalului bazei rezultă că nu mai trebuie adăugat nimic, deci L este bază. Dacă L' este un sistem liniar independent cu $m > n$ vectori, atunci L' se completează la o bază și rezultă că $\dim_K V \ge m > n$; contradicție.

b) Din teorema 2.1 de existenţă a bazelor rezultă că din cei n vectori $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ ai unui sistem de generatori pentru V, se extrage o bază; din teorema cardinalului bazei rezultă că nu trebuie scos nimic, deci S este bază.

Dacă S' este un sistem de generatori pentru V cu $m < n$ vectori, atunci din S' se extrage o bază şi rezultă că $\dim_K V \le m < n$, contradicţie.

EXEMPLE. 1) $\mathbb{C}$ are ca $\mathbb{R}$ -spaţiu vectorial baza $\mathscr{B} = \{1, i\}$, deci $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

2) $M_{m,n}(K)$ are ca spaţiu vectorial peste K o bază (canonică) formată cu matricile $e_{ij} = i\begin{pmatrix} 0 & j & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, deci $\dim_K M_{m,n}(K) = m \cdot n$.

3) $K[X]$ are ca spaţiu vectorial o bază infinită $\{1, X, \dots, X^n, \dots.\}$, deci $\dim_K K[X] = \infty$.

4) $C^0_{[a,b]}$ (care conţine funcţiile polinomiale) are dimensiunea infinită ca spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$.

2.2. Subspaţii vectoriale, proprietăţi; spaţiu vectorial-cît

Fie K un corp comutativ şi V un spaţiu vectorial peste K.

DEFINIŢIA 2.4. O submulţime nevidă $W \subset V$ se numeşte **subspaţiu vectorial** peste K dacă este stabilă la cele două legi de compoziţie (adică $(\forall)x, y \in W$, $x + y \in W$ şi $(\forall)x \in W$, $(\forall)\lambda \in K$, $\lambda x \in W$) şi legile induse verifică proprietăţile din definiţia K-spaţiului vectorial. Se mai notează în acest caz $W \hookrightarrow V$. Aşadar, W este un spaţiu vectorial peste K.

PROPOZIŢIA 2.4 (criteriul subspaţiului). Fie V un K-spaţiu vectorial şi $W \subset V$ o submulţime nevidă. W este un subspaţiu vectorial peste K dacă şi numai dacă au loc condiţiile:

$$\textbf{(a)}\ (\forall)\ x, y \in W,\ x - y \in W;$$

$$\textbf{(b)}\ (\forall)x \in W,\ (\forall)\lambda \in K,\ \lambda x \in W.$$

DEMONSTRAŢIE. Dacă W este K-subspaţiu vectorial atunci $(\forall)y \in W$ rezultă $-y \in W$, deci $(\forall)x, y \in W$ avem $x - y \in W$, adică (a), iar (b) are loc prin definiţie. Reciproc, presupunem că W are proprietăţile (a) şi (b). Deoarece $W \ne \varnothing$ există $z \in W$ şi atunci $z - z = 0 \in W$. Apoi $(\forall)x \in W$, avem $0 - x = -x$ ceea ce arată că W este subgrup abelian al lui V faţă de adunare, căci $(\forall)x, y \in W$ avem $x - (-y) = x + y \in W$, iar asociativitatea şi comutativitatea adunării sînt evidente. Condiţia (b) arată că W este stabilă şi la legea de compoziţie externă, iar proprietăţile (1)–(4) din definiţia spaţiului vectorial sînt automat verificate pe W, fiind verificate pe V.

EXEMPLE. 1) Fie $V = \mathbb{R}^2$ şi $m \in \mathbb{R}$ fixat. Atunci mulţimea W = {(a, ma) | a ∈ ℝ} este un subspaţiu vectorial al lui V. Într-adevăr, folosind criteriul subspaţiului, este suficient să remarcăm că dacă $u = (a, ma)$ şi $v = (b, mb)$ sînt vectori din W, atunci $u - v = (a - b, m(a - b))$ deci $u - v \in W$, iar dacă $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci $\lambda u = (\lambda a, m\lambda a) \in W$. Mai mult, subspaţiul W poate fi identificat cu mulţimea tuturor punctelor dreptei de ecuaţie $y = mx$ (fig. I.1).

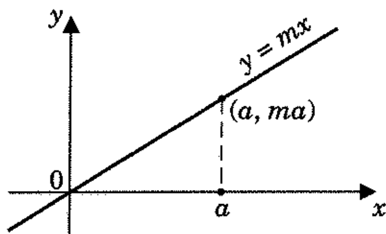


Figura I.1.

2) Fie $V = \mathbb{R}[X]$ şi W = {P ∈ V | P(0) = 0}. Aşadar, W este submulţimea polinoamelor fără termen liber şi evident $W \hookrightarrow V$.

TEOREMA 2.5. Fie V un spaţiu vectorial peste K şi W_1, $W_2 \hookrightarrow V$ subspaţii vectoriale. Fie $S \subset V$ o submulţime nevidă.

Atunci $W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2 = \{ x \in V \mid x = x_1 + x_2, x_1 \in W_1 \text{ şi } x_2 \in W_2 \} = \{ u + v \mid u \in W_1 \text{ şi } v \in W_2 \}$ **şi** $\tilde{S} = \{x \in V \mid x = \Sigma\lambda_i x_i$ **- sumă finită, cu** $\lambda_i \in K,\ x_i \in S\}$, **sînt subspaţii vectoriale ale lui V.**

DEMONSTRAŢIE. Vom verifica condiţiile (a) şi (b) din propoziţia 2.4, în fiecare caz. Fie $x, y \in W_1 \cap W_2$; atunci $x, y \in W_1$ şi $x, y \in W_2$, deci $x - y \in W_1$ şi $x - y \in W_2$, adică $x - y \in W_1 \cap W_2$. Fie $\lambda \in K$ şi $x \in W_1 \cap W_2$; atunci $x \in W_1$ şi $x \in W_2$, deci $\lambda x \in W_1$ şi $\lambda x \in W_2 \cap W_2$. Deci $W_1 \cap W_2 \hookrightarrow V$.

Fie $x, y \in W_1 + W_2$; atunci $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in W_1$, $x_2 \in W_2$ şi $y = y_1 + y_2$ cu $y_1 \in W_1$, $y_2 \in W_2$. Rezultă că $x_1 - y_1 \in W_1$ şi $x_2 - y_2 \in W_2$, deci $x - y = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) \in W_1 + W_2$. Fie $\lambda \in K$; atunci $\lambda x_1 \in W_1$ şi $\lambda x_2 \in W_2$, deci $\lambda x = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in W_1 + W_2$. Deci $W_1 + W_2 \hookrightarrow V$.

Fie $x, y \in \tilde{S}$; atunci $x = \sum_{\text{finită}} \lambda_i x_i$, $\lambda_i \in K$, $x_i \in S$ şi $y = \sum_{\text{finită}} \lambda_i' x_i$, $\lambda_i' \in K$, $x_i \in S$. Rezultă că $x - y = \sum_{\text{finit}} (\lambda_i - \lambda_i')\ x_i \in \tilde{S}$.

Fie $\lambda \in K$; atunci $\lambda x = \sum_{\text{finită}} (\lambda \cdot \lambda_i) x_i \in \tilde{S}$. Aşadar, $\tilde{S} \hookrightarrow V$.

DEFINIŢIA2.5. În ipotezele anterioare, $W_1 \cap W_2$ se numeşte **subspaţiul vectorial intersecţie**, $W_1 + W_2$ se numeşte **subspaţiul vectorial sumă**, iar $\tilde{S}$ se numeşte **subspaţiul vectorial generat de** S (S este un sistem de generatori pentru $\tilde{S}$).

OBSERVAŢIE. Analog se poate defini suma a $p, p \geq 1$ subspaţii vectoriale $W_i \subset V$, $i = 1, \dots, p$; anume

$$W_1 + \dots + W_p = \{ x \in V \mid x = x_1 + \dots + x_p,\ x_i \in W_i,\ i = 1, \dots, p \}.$$

DEFINIȚIA 2.6. Suma de subspații vectoriale $W_1 + \ldots + W_p \subset V$ se numeşte **directă** dacă pentru orice $x \in W_1 + \ldots + W_p$, din $x = x_1 + \ldots + x_p = y_1 + \ldots + y_p$, cu $x_i, y_i \in W_i$, $i = 1, \ldots, p$, rezultă că $x_i = y_i$, $i = 1, \ldots, p$ (adică descompunerea oricărui vector este unică). Cînd suma este directă, o vom nota $W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_p$.

PROPOZIȚIA 2.6. Fie $W_1, W_2 \hookrightarrow V$ două subspații vectoriale ale spațiului vectorial V peste K. Sînt echivalente următoarele condiții:

a) Suma $W_1 + W_2$ este directă.

b) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

DEMONSTRAȚIE. (a)$\to$(b). Evident $\{0\} \subset W_1 \cap W_2$. Fie $x \in W_1 \cap W_2$; atunci $0 = 0 + 0$ şi $0 = x + (-x)$ $(-x \in W_1 \cap W_2)$ deci $x = 0$, din unicitatea scrierii.

(b)$\to$(a). Fie $x \in W_1 + W_2$ şi presupunem că $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, cu $x_1, y_1 \in W_1$ şi $x_2, y_2 \in W_2$. Atunci $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 \in W_1 \cap W_2$, deci $x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = 0$, adică $x_1 = y_1$ şi $x_2 = y_2$.

EXEMPLE. 1) Dacă $S = \{a\}$, atunci $\widetilde{S} = \{\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$; iar dacă $S = \{a, b\}$, atunci $\widetilde{S} = \{\alpha a + \beta b \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

2) Fie $V = \mathbb{R}^2$. Pentru orice $m \in \mathbb{R}$ definim $W_m = \{(a, ma) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Atunci pentru orice $m, m' \in \mathbb{R}$ cu $m' \neq m$ avem $W_m \cap W_{m'} = \{(0,0)\}$ şi $W_m \oplus W_{m'} = \mathbb{R}^2$.

3) Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$ şi $W_k = \widetilde{\{e_k\}}$, $1 \le k \le n$. Atunci $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus \ldots \oplus W_n$.

TEOREMA 2.7. Fie V un spațiu vectorial peste K, $\dim_K V = n$ (finită) şi $W \hookrightarrow V$ un subspațiu vectorial. Atunci W are dimensiune finită şi dacă $\dim_K W = m$, avem $m \le n$.

DEMONSTRAȚIE. Fie $\mathscr{B}$ o bază pentru W; în particular, $\mathscr{B}$ este un sistem liniar independent de vectori în W (deci şi în V). Dar conform corolarului teoremei 2.3 a), într-un spațiu vectorial finit dimensional orice sistem liniar independent de vectori este finit. Rezultă că $\mathscr{B}$ este finit. Conform teoremei 2.2, $\mathscr{B}$ poate fi completat la o bază a lui V deci numărul de elemente ale lui $\mathscr{B}$ este cel mult n, adică $m \le n$.

COROLAR. Fie V spațiu vectorial peste K, $\dim_K V = n$ (finită) şi $W \subset V$ un subspațiu vectorial cu $\dim_K W = \dim_K V$. Atunci $W = V$.

DEMONSTRAȚIE. Fie $\mathscr{B}_1 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ o bază în W. Deoarece $\dim_K V = n$ şi deoarece $\{w_1, \ldots, w_n\}$ este sistem liniar independent, rezultă că $\mathscr{B}_1$ este bază şi în V. Atunci $(\forall) v \in V$ putem scrie $v = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n$ adică $v \in W$, deci $W = V$.

Fie V un spaţiu vectorial peste K şi $W \subset V$ un subspaţiu vectorial. Definim pe V relaţia binară $\mathcal{R}_W$ astfel: fie $x, y \in V$; $x\mathcal{R}_W y$ dacă şi numai dacă $x - y \in W$.

LEMA 2.8. Relaţia $\mathcal{R}_W$ este o relaţie de echivalenţă.

DEMONSTRAŢIE. Pentru orice $x \in V$ avem $x - x = 0 \in W$, deci $x\mathcal{R}_W x$, adică $\mathcal{R}_W$ este reflexivă. Fie $x\mathcal{R}_W y$, $x, y \in V$; atunci $x - y \in W$, deci $y - x \in W$, adică $y\mathcal{R}_W x$ şi $\mathcal{R}_W$ este simetrică. Fie $y\mathcal{R}_W x$ şi $y\mathcal{R}_W z$ cu $x, y, z \in W$, deci $x - z = (x - y) + (y - z) \in W$, adică $x\mathcal{R}_W z$ şi $\mathcal{R}_W$ este tranzitivă.

TEOREMA 2.9. Pe mulţimea cît V/W există o structură naturală de spaţiu vectorial peste K (numită spaţiu vectorial cît).

DEMONSTRAŢIE. Pentru $\hat{x}, \hat{y} \in V/W$ definim $\hat{x} + \hat{y} \overset{\Delta}{=} \widehat{x + y}$. Trebuie arătat că operaţia este bine definită, ca operaţie între clase, independentă de reprezentanţi. Ori, dacă $\hat{x}' = \hat{x}$ şi $\hat{y}' = \hat{y}$, atunci $x' - x \in W$ şi $y' - y \in W$, $(x' + y') - (x + y) \in W$, adică $\widehat{x' + y'} = \widehat{x + y}$, ceea ce înseamnă că pe V/W am definit o lege de compoziţie internă. Avem imediat:

$$(\hat{x} + \hat{y}) + \hat{z} = (\widehat{x + y}) + \hat{z} = \widehat{(x + y) + z} = \widehat{x + (y + z)} = \hat{x} + (\widehat{y + z}) = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$$

$$\hat{x} + \hat{0} = \widehat{x + 0} = \hat{x};\ \hat{x} + (-x)^{\wedge} = \widehat{x + (-x)} = \hat{0} \text{ şi } \hat{x} + \hat{y} = \widehat{x + y} = \hat{y} + \hat{x},$$

deci V/W este grup abelian. Pentru $\hat{x} \in V/W$ şi $\lambda \in K$ definim: $\lambda \hat{x} \overset{\Delta}{=} \widehat{\lambda x}$. Dacă $\hat{x}' = \hat{x}$ atunci $x' - x \in W$, deci $\lambda x' - \lambda x \in W$, adică $\widehat{\lambda x} = \widehat{\lambda x'}$, ceea ce arată că pe V/W avem o lege de compoziţie externă. Axiomele (1)-(4) din definiţia 2.1 se verifică uşor; de exemplu

$$\lambda(\hat{x} + \hat{y}) = \lambda(\widehat{x + y}) = \widehat{\lambda(x + y)} = \widehat{\lambda x + \lambda y} = \widehat{\lambda x} + \widehat{\lambda y} = \lambda\hat{x} + \lambda\hat{y}.$$

2.3. Aplicaţii liniare, izomorfisme de spaţii vectoriale

Algebra liniară constituie cadrul matematic abstract pentru tratarea problemelor "liniare" (care conduc la ecuaţii şi sisteme de gradul întîi) din diverse domenii. Alături de noţiunea de spaţiu vectorial, un concept de bază îl constituie cel de aplicaţie liniară sau, cum se mai spune, operator liniar, ca "purtător de informaţie liniară" de la un spaţiu vectorial la altul.

DEFINIŢIA 2.7. Fie V, W două spaţii vectoriale peste corpul comutativ K. Se numeşte **aplicaţie liniară** de la V la W orice funcţie $f: V \to W$ cu proprietatea $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$, $(\forall) x, y \in V$ şi $(\forall)\alpha, \beta \in K$. Vom nota $\mathrm{Hom}_K(V, W) = \{f : V \to W \mid f \text{ aplicaţie liniară}\}$. Evident, pentru $\alpha = 0$, $\beta = 0$, rezultă $f(0) = 0$. Apoi, $f(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(x_i)$, $(\forall)\lambda_i \in K$, $(\forall)x_i \in V$, $1 \le i \le m$.

EXEMPLE. 1) Aplicația $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = 2x + 3y$ este evident liniară, deoarece $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\forall)(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, $F(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) =$
$$= F(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') = 2(\alpha x + \beta x') + 3(\alpha y + \beta y') = \alpha(2x + 3y) + \beta(2x' + 3y') =$$
$$= \alpha F(x, y) + \beta F(x', y').$$

2) Fie K un corp comutativ și $n \geq 1$ întreg. Pentru orice $1 \leq k \leq n$, aplicația $\mathrm{pr}_k : K^n \to K$, $(x_1, ..., x_n) \to x_k$ este liniară (numită **proiecția canonică** de indice k).

3) Aplicația $I: C^0_{[a,b]} \to \mathbb{R}$, $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ este evident $\mathbb{R}$-liniară și în mod similar, operatorul de derivare $D: C^1_{[a,b]} \to C^0_{[a,b]}$, $D(f) = f'$ este $\mathbb{R}$-liniar. (Am notat cu $C^k_{[a,b]}$ spațiul vectorial al funcțiilor derivabile cu derivate continue pînă la ordinul k inclusiv, $k \geq 0$).

PROPOZIȚIA 2.10. Mulțimea $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ are o structură naturală de spațiu vectorial peste K.

DEMONSTRAȚIE. Pentru orice $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ definim aplicația $(f + g): V \to W$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\forall) x \in V$, care este o aplicație liniară; într-adevăr
$$(f + g)(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x + \beta y) + g(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) + \alpha g(x) +$$
$$+\beta g(y) = \alpha(f(x) + g(x)) + \beta(f(y) + g(y)) = \alpha(f + g)(x) + \beta(f + g)(y),$$
pentru $(\forall) x, y \in V$ și $(\forall)\alpha, \beta \in K$. Se verifică imediat că $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ cu această adunare are structură de grup abelian.

Pentru orice $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ și orice $\lambda \in K$ definim aplicația $\lambda f : V \to W$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $(\forall) x \in V$, care este aplicație liniară; într-adevăr $(\lambda f)(\alpha x + \beta y) = \lambda f(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha f(x) + \beta f(y)) = \alpha(\lambda f)(x) + \beta(\lambda f)(y)$ pentru $(\forall) x, y \in V$ și $(\forall)\alpha, \beta \in K$. Se verifică imediat proprietățile (1)–(4) din definiția 2.1. Aplicația nulă din $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ este $0: V \to W$, $x \to 0_W$.

DEFINIȚIA 2.8. Fie V, W două K-spații vectoriale și $f: V \to W$ o aplicație liniară. Se numește **nucleul** lui f submulțimea lui V, $\mathrm{Ker}\, f = \{x \in V | f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$. Se numește **imaginea** lui f submulțimea lui W, $\mathrm{Im}\, f = f(V) = \{y \in W \,|\, (\exists) x \in V \text{ cu } y = f(x)\}$.

PROPOZIȚIA 2.11. Fie V, W două K-spații vectoriale și $f: V \to W$ o aplicație liniară. Atunci:

(a) $\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Im}\, f$, sînt subspații vectoriale în V, respectiv W.

(b) f este injectivă dacă și numai dacă $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ și f este surjectivă dacă și numai dacă $\mathrm{Im}\, f = W$.

DEMONSTRAȚIE. (a) Pentru orice $x, y \in \mathrm{Ker} f$ avem $f(x) = 0$ și $f(y) = 0$; atunci $f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$, deci $x - y \in \mathrm{Ker} f$ și $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \cdot 0 = 0$,

$(\forall)\lambda \in K$, deci $\lambda x \in \text{Ker} f$, adică $\text{Ker} f$ este subspațiu vectorial în V. Pentru orice $u, v \in \text{Im} f$ avem $u = f(x)$, $v = f(y)$ cu $x, y \in V$; atunci $u - v = f(x) - f(y) = f(x - y) \in \text{Im} f$ şi $\lambda u = \lambda f(x) = f(\lambda x) \in \text{Im} f$, $(\forall)\lambda \in K$, deci $\text{Im} f$ este subspațiu vectorial în W.

(b) Presupunem f injectivă şi fie $x \in \text{Ker} f$; atunci $f(x) = 0 = f(0)$, de unde $x = 0$, adică $\text{Ker} f = \{0\}$. Presupunem $\text{Ker} f = \{0\}$ şi fie $x, y \in V$ cu $f(x) = f(y)$; atunci $f(x) - f(y) = 0$ sau $f(x - y) = 0$, deci $x - y \in \text{Ker} f$, adică $x - y = 0$ sau $x = y$ şi prin urmare f este injectivă. Faptul că f este surjectivă dacă şi numai dacă $\text{Im} f = W$ rezultă din definiția surjectivității.

EXEMPLU. Aplicația $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - y, y - z)$ este evident liniară. Nucleul lui f este

$\text{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = 0\} = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, iar imaginea lui f este

$\text{Im} f = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (\exists)\, x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încît $(u, v) = f(x, y, z)\} =$

$= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid (\exists)\, x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încît $(u,v) = (x - y, y - z)\} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 |$ sistemul $x - y = u,\ \ y - z = v$ admite soluții$\} = \mathbb{R}^2$.

DEFINIȚIA 2.9. (1) Fie V, W două K-spații vectoriale. O aplicație liniară $f : V \to W$ se numeşte **izomorfism** dacă este bijectivă.

(2) O aplicație liniară $f : V \to W$ se numeşte **endomorfism** sau **operator** liniar al lui V. Mulțimea $\text{Hom}_K(V,V)$ se mai notează cu $\mathbb{L}(V)$ sau $\text{End}(V)$.

(3) O aplicație liniară $f : V \to V$ se numeşte **automorfism** dacă este bijectivă (izomorfism). Mulțimea automorfismelor lui V se notează $\text{Aut}(V)$.

OBSERVAȚII. 1) Fie V, W, Z trei spații vectoriale peste K şi $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$ două aplicații liniare. Atunci $g \circ f : V \to Z$ este o aplicație liniară. Într-adevăr,

$$(g \circ f)(\alpha x + \beta y) = g(f(\alpha x + \beta y)) = g(\alpha f(x) + \beta f(y)) =$$
$$\alpha g(f(x)) + \beta g(f(y)) = \alpha(g \circ f)(x) + \beta(g \circ f)(y),\ (\forall)\, x,y \in V,\ (\forall)\, \alpha,\beta \in K.$$

2) Fie $f : V \to W$ un izomorfism. Atunci $f^{-1} : W \to V$ este izomorfism.

Trebuie arătat că f^{-1} este aplicație liniară, adică $f^{-1}(\alpha u + \beta v) = \alpha f^{-1}(u) + \beta f^{-1}(v)$, $(\forall)\, u,v \in W$, $(\forall)\, \alpha,\beta \in K$. Avem $f(f^{-1}(\alpha u + \beta v)) = \alpha u + \beta v$ şi $f(\alpha f^{-1}(u) + \beta f^{-1}(v)) = \alpha f(f^{-1}(u)) + \beta f(f^{-1}(v)) = \alpha u + \beta v$, deci din injectivitatea lui f rezultă relația căutată.

3) Mulțimea $\text{End}(V)$ are, pe lîngă structura de K-spațiu vectorial, o structură de inel necomutativ față de legile de compoziție internă "+" (adunarea funcțiilor) şi "∘" (compunerea funcțiilor). Verificarea este imediată (unitatea este aplicația $1_V : V \to V$, $1_V(x) = x$, $(\forall)\, x \in V$).

4) Mulțimea Aut (V) are o structură de grup (necomutativ) față de legea de compoziție "∘" (compunerea funcțiilor). Şi în acest caz verificarea este imediată.

TEOREMA 2.12. (teorema de izomorfism). Fie V, W două spații vectoriale peste K, $f: V \to W$ o aplicație liniară. Atunci există un izomorfism natural de spații vectoriale $\tilde{f}: V/\mathrm{Ker} f \tilde{\to} \mathrm{Im}\, f$.

DEMONSTRAȚIE. Definim $\tilde{f}$ prin $\tilde{f}(\hat{x}) = f(x)$, $(\forall)\hat{x} \in V/\mathrm{Ker} f$. Dacă $\hat{x}' = \hat{x}$, atunci $x' - x \in \mathrm{Ker} f$, deci $f(x' - x) = 0$ sau $f(x') = f(x)$, ceea ce arată că $\tilde{f}$ a fost definită corect. Funcția $\tilde{f}$ este aplicație liniară: $\tilde{f}(\alpha\hat{x} + \beta\hat{y}) = \tilde{f}(\widehat{\alpha x + \beta y}) = f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + b f(y) = \alpha\tilde{f}(\hat{x}) + \beta\tilde{f}(\hat{y})$, $(\forall)\hat{x}, \hat{y} \in V \;/\; \mathrm{Ker} f$ și $(\forall)\alpha, \beta \in K$.

Pentru orice $y \in \mathrm{Im}\, f$ avem $y = f(x) = \tilde{f}(\hat{x})$, deci $\tilde{f}$ este surjectivă. Fie apoi $x \in \mathrm{Ker}\tilde{f}$; $\tilde{f}(\hat{x}) = 0$, deci $f(x) = 0$, adică $x \in \mathrm{Ker} f$. Atunci $x \mathscr{R}_{\mathrm{Ker} f} 0$, deci $\hat{x} = \hat{0}$ și ca atare $\mathrm{Ker}\,\tilde{f} = \{\hat{0}\}$; prin urmare, aplicația $\tilde{f}$ este injectivă, deci izomorfism.

Lema care urmează precizează un rezultat deja cunoscut.

LEMA 2.13. Fie V un K-spațiu vectorial de dimensiune finită, $n = \dim_K V$ și $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază în V. Orice vector $x \in V$ are o scriere unică de forma $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$, cu $x_i \in K$, $1 \le i \le n$.

DEMONSTRAȚIE. Presupunem că există un vector $x \in V$ astfel încît $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n$; atunci avem $(x_1 - y_1)e_1 + (x_2 - y_2)e_2 + \ldots + (x_n - y_n)e_n = 0$, de unde rezultă că $x_1 - y_1 = 0$, $x_2 - y_2 = 0$, c sau $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$, ($x_i, y_i \in K$, $i = 1, 2, \ldots, n$).

În ipotezele lemei, pentru orice $x \in V$ scalarii unici $x_i \in K$, $i = 1, 2, \ldots, n$ se numesc **coordonatele lui x în baza $\mathscr{B}$**, iar matricea

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$$

se numește **matricea** (sau **vectorul**) **coordonatelor lui x în baza $\mathscr{B}$**.

OBSERVAȚIE. Așadar, de îndată ce este fixată o bază $\mathscr{B}$ a unui spațiu vectorial V de dimensiune n finită, un vector $x \in V$ este bine determinat prin componentele vectorului relativ la baza $\mathscr{B}$. În acest mod, vectorii abstracți admit realizări numerice și "pot fi programați". Reținem totodată că pentru a determina un vector $x \in V$ sînt necesare și suficiente $n = \dim V$ condiții impuse coordonatelor lui x.

Punerea în evidență a unicității coordonatelor într-o bază fixată pentru orice vector, deși simplă, ne permite să demonstrăm următorul rezultat fundamental pentru spații vectoriale finit dimensionale:

TEOREMA 2.14. (a) Orice spațiu vectorial V peste K finit dimensional cu $\dim_K V = n \ge 1$ este izomorf cu spațiul vectorial K^n.

(b) Două spaţii vectoriale V şi W peste K, finit dimensionale, cu $\dim_K V = n \geq 1$ şi $\dim_K V = m \geq 1$ sînt izomorfe dacă şi numai dacă $n = m$.

DEMONSTRAŢIE. (a) Fie $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \subset V$ o bază a sa fixată. Definim funcţia $f : V \to K^n$ astfel: $(\forall)\, x \in V$, x se scrie unic sub forma $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ cu $x_i \in K$; punem $f(x) \stackrel{\Delta}{=} (x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n$. Funcţia f este aplicaţie liniară: $(\forall)\, x, y \in V$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ şi $(\forall)\, \alpha, \beta \in K$ avem $\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) e_i$ deci $f(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, ..., \alpha x_n + \beta y_n) = \alpha(x_1, x_2, ..., x_n) + \beta(y_1, y_2, ..., y_n) = \alpha f(x) + \beta f(y)$. Evident f este surjectivă:

$(\forall)\, (x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n$, $(\exists)\, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$ astfel încît $f(x) = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Funcţia f este injectivă: fie $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in \operatorname{Ker} f$, atunci

$f(x) = (x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, deci $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, de unde $x = 0$; aşadar,

$$\operatorname{Ker} f = \{0\}.$$

(b) Fie $m = n$. Din (a) rezultă izomorfismele $f : V \to K^n$ şi $g : W \to K^n$; atunci $g^{-1} \circ f : V \to W$ este un izomorfism de spaţii vectoriale (vezi observaţiile ce urmează definiţiei 2.9). Reciproc, presupunem că există un izomorfism $f : V \to W$ şi fie $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază în V. Vom arăta că $\mathscr{B}' = \{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\}$, notată şi $f(\mathscr{B})$, este bază în W şi atunci va rezulta că $m = n$ conform teoremei 2.3.

Presupunem că există o relaţie de forma $\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + ... + \lambda_n f(e_n) = 0$, cu $\lambda_i \in K$, $i = 1, ..., n$. Atunci avem $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = 0$ (f este aplicaţie liniară), deci $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \operatorname{Ker} f = \{0\}$. Prin urmare $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$, de unde rezultă $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, deoarece $\mathscr{B}$ este bază. Deci $\mathscr{B}'$ este sistem liniar independent. Apoi pentru orice $w \in W$ există $v \in V$ astfel încît $f(v) = w$, deoarece f este surjectivă. Dar $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ cu $\lambda_i \in K$ şi atunci

$w = f(v) = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i)$, deci $\mathscr{B}'$ este şi sistem de generatori pentru W, adică $\mathscr{B}'$ este bază.

TEOREMA 2.15. Fie V un spaţiu vectorial peste K finit dimensional, $\dim_K V = n$ şi $W \subset V$ un subspaţiu vectorial cu $\dim_K W = m$. Atunci $\dim_K V / W = n - m$.

DEMONSTRAȚIE. Fie $\mathscr{B}_1 = \{w_1, ..., w_m\} \subset W$ o bază a lui W, care este în particular sistem liniar independent în V, deci poate fi completat la o bază $\mathscr{B} = \{w_1, ..., w_m, v_{m+1}, ..., v_n\}$ a lui V. Vom arăta că $\mathscr{B}_2 = \{\hat{v}_{m+1}, ..., \hat{v}_n\}$ este bază în V/W. Fie $\sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j \hat{v}_j = 0$ cu $\lambda_j \in K$; atunci avem $\sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j v_j \in W$, deci $\sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j v_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j$ sau $\lambda_1 w_1 +...+ \lambda_m w_m - \lambda_{m+1} v_{m+1} -...- \lambda_n v_n = 0$. Dar $\mathscr{B}$ este o bază în V, deci rezultă $\lambda_j = 0, j = 1,...,n$, adică $\mathscr{B}_2$ este un sistem liniar independent. Apoi, pentru orice $v \in V$ există $\lambda_i \in K$, $i = 1, ..., n$ astfel încît $v = \lambda_1 w_1 +...+ \lambda_m w_m + \lambda_{m+1} v_{m+1} +...+ \lambda_n v_n$; atunci $\hat{v} = \sum_{j=m+1}^{n} \lambda_j \hat{v}_j$, deoarece $\hat{w}_j = 0, j = 1, ..., m (w_j \in W)$, deci $\mathscr{B}_2$ este şi sistem de generatori pentru V/W. Rezultă că $\dim_K V /W = n - m$.

COROLARUL 1. (teorema dimensiunii). Fie V, W două spaţii vectoriale peste K, finit dimensionale şi $f: V \to W$ o aplicaţie liniară. Atunci Ker$f$ şi Imf au dimensiunea finită şi avem: $\dim_K \operatorname{Ker} f + \dim_K \operatorname{Im} f = \dim_K V$.

DEMONSTRAȚIE. Ca subspaţii vectoriale ale unor spaţii vectoriale finit dimensionale, Ker$f$ şi Imf sînt finit dimensionale. Din teorema de izomorfism avem că $V /\operatorname{Ker} f \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} f$, deci cele două spaţii au aceeaşi dimensiune. Atunci $\dim_K \operatorname{Im} f = \dim_K V /\operatorname{Ker} f = \dim_K V - \dim_K \operatorname{Ker} f$.

COROLARUL 2. Fie V un spaţiu vectorial peste K de dimensiune finită şi $f: V \to V$ un operator liniar (endomorfism). Atunci aplicaţia f este injectivă dacă şi numai dacă f este surjectivă.

DEMONSTRAȚIE. Avem următoarele echivalenţe: f injectivă $\leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ $\leftrightarrow \dim_K \operatorname{Ker} f = 0 \leftrightarrow \dim_K \operatorname{Im} f = \dim_K V \leftrightarrow \operatorname{Im} f = V \leftrightarrow f$ este surjectivă.

TEOREMA 2.16. (Grassman). Fie V un spaţiu vectorial peste K, de dimensiune finită şi $V_1, V_2 \subset V$ două subspaţii vectoriale. Atunci

$$\dim_K (V_1 + V_2) = \dim_K V_1 + \dim_K V_2 - \dim_K (V_1 \cap V_2).$$

DEMONSTRAȚIE. Vom stabili următorul izomorfism de spaţii vectoriale $h: V_1 /(V_1 \cap V_2) \xrightarrow{\sim} (V_1 + V_2)/V_2$, definind $h(\hat{v}_1) = \check{v}_1$ $(v_1 = v_1 + 0 \in V_1 + V_2)$.

Dacă $\hat{v}_1 = \hat{v}_1'$, atunci $v_1' - v_1 \in V_1 \cap V_2$, de unde $v_1' - v_1 \in V_2$, deci $\check{v}_1 = \check{v}_1'$ adică h este corect definită. Funcția h este aplicație liniară: $h(\alpha\hat{v}_1 + \beta\hat{v}_1') = h(\widehat{\alpha v_1 + \beta v_1'}) = \widecheck{\alpha v_1 + \beta v_1'} = \alpha\check{v}_1 + \beta\check{v}_1' = \alpha h(\hat{v}_1) + \beta h(\hat{v}_1')$ pentru orice $\hat{v}_1, \hat{v}_1' \in V_1/V_1 \cap V_2$ și orice $\alpha, \beta \in K$. Funcția h este injectivă: fie $\hat{v}_1 \in \mathrm{Ker}h$, atunci $\check{v}_1 = h(\hat{v}_1) = \check{0}$, de unde $v_1 \in V_2$, deci $v_1 \in V_1 \cap V_2$, adică $\hat{v}_1 = \hat{0}$. Prin urmare $\mathrm{Ker}h = \{\hat{0}\}$ și h rezultă injectivă. Funcția h este surjectivă: $(\forall)\, \check{v} \in (V_1 + V_2)/V_2$, $v = v_1 + v_2$ cu $v_1 \in V_1$ și $v_2 \in V_2$; atunci $v - v_1 = v_2 \in V_2$, de unde $\check{v} = \check{v}_1 = h(\hat{v}_1)$, cu $\hat{v}_1 \in V_1/(V_1 \cap V_2)$. Fiind izomorfe, spațiile vectoriale $V_1/(V_1 \cap V_2)$ și $(V_1 + V_2)/V_2$ au aceeași dimensiune, deci $\dim_K V_1 - \dim_K(V_1 \cap V_2) = \dim_K(V_1 + V_2) - \dim_K V_2$, de unde rezultă relația dorită.

COROLAR. Fie V un spațiu vectorial peste K, de dimensiune finită și $V_1, V_2 \subset V$ două subspații vectoriale. Dacă suma $V_1 + V_2$ este directă, atunci $\dim_K(V_1 \oplus V_2) = \dim_K V_1 + \dim_K V_2$.

DEMONSTRAȚIE. Din propoziția 2.6 rezultă că $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, de unde $\dim_K(V_1 \cap V_2) = 0$ deci $\dim_K(V_1 + V_2) = \dim_K V_1 + \dim_K V_2$.

OBSERVAȚIE. Două subspații $V_1, V_2 \subset V$ se zic **transverse** dacă $\dim(V_1 \cap V_2)$ este minimă și $\dim(V_1 + V_2)$ maximă posibilă. De exemplu, în $\mathbb{R}^3$ o dreaptă V_1 și un plan V_2 trecînd prin origine sînt transverse dacă $V_1 \not\subset V_2$.

2.4. Matrice asociate aplicațiilor liniare

Fie V, W două spații vectoriale peste K, finit dimensionale, cu $\dim_K V = n$ și $\dim_K W = m$. Fixăm o bază $\mathscr{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ în V și $\mathscr{B}_2 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ o bază în W. Fie $f : V \to W$ o aplicație liniară; atunci putem să scriem:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m \\ f(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{m2}w_m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m, \end{aligned}$$

sau mai concentrat $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i, j = 1, \ldots, n$, unde coeficienții $a_{ij} \in K$ sînt unic determinați pentru cele două baze fixate și pentru aplicația liniară f (ceea ce rezultă din unicitatea coordonatelor).

DEFINIŢIA 2.10. Matricea $M_f^{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} = (a_{ij})$, **din** $M_{m,n}(K)$ se numeşte **matricea asociată aplicaţiei liniare** $f: V \to W$, **relativ la cele două baze fixate.**

OBSERVAŢIE. Dacă alegem alte baze, aceleiaşi aplicaţii liniare i se asociază o altă matrice.

EXEMPLE. 1) În $\mathbb{R}^2$ fixăm baza canonică $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ deci $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. Omotetia cu centrul în origine de raport k, $k > 0$ este aplicaţia liniară $\omega_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \to (kx, ky)$; vezi fig. I.2.

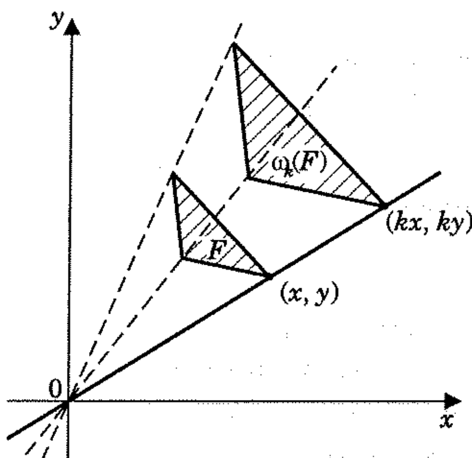


Figura I.2.

Matricea asociată lui ω_k, relativ la bazele $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, este $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

În mod similar, rotaţia de unghi θ în jurul originii, este aplicaţia $\rho_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$, care asociază oricărui punct $M(x,y)$ punctul $\rho_\theta(M) = M'$ astfel încît $\|OM\| = \|OM'\|$ şi $\widehat{MOM'} = \theta$ (fig. I.3.). Matricea asociată lui ρ_θ în baza canonică (repetată) este

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

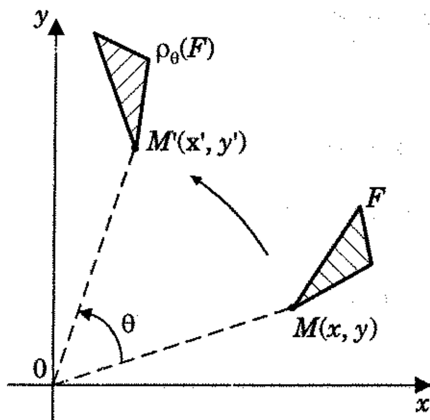


Figura I.3.

2) Considerăm aplicaţia liniară $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(P) = (P(0), P'(0))$. Matricea lui φ relativ la bazele canonice $\mathscr{B}_1 = \{1, X, X^2\}$, $\mathscr{B}_2 = \{e_1, e_2\}$ va fi

$$M_\varphi^{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} = \left(\varphi(1) | \varphi(X) | \varphi(X^2)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

TEOREMA 2.17. Funcţia $\mu^{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} : \mathrm{Hom}_K(V,W) \to M_{m,n}(K)$, $\mu^{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(f) = M_f^{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}$ **este un izomorfism de spaţii vectoriale.**

DEMONSTRAȚIE. Deoarece bazele sînt fixate vom scrie mai simplu $\mu(f) = M_f$. Vom arăta că μ este aplicație liniară: $(\forall) f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ şi $(\forall)\alpha, \beta \in K$ trebuie să arătăm că $\mu(\alpha f + \beta g) = \alpha\mu(f) + \beta\mu(g)$, adică $M_{\alpha f+\beta g} = \alpha M_f + \beta M_g$; fie $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i$ şi $g(v_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}w_i$, atunci

$$\alpha\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i\right) + \beta\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ij}w_i\right) = \sum_{i=1}^{m}(\alpha a_{ij} + \beta b_{ij})w_i, \text{ deci}$$

$$M_{\alpha f+\beta g} = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}) = \alpha(a_{ij}) + \beta(b_{ij}) = \alpha M_f + \beta M_g.$$

Fie $f \in \mathrm{Ker}\,\mu$, adică $M_f = 0$; atunci $f(v_j) = 0$, $(\forall) j = 1,\dots,n$. Pentru orice $v \in V$, $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$, deci $f(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j) = 0$, adică $f = 0$. Atunci $\mathrm{Ker}\mu = \{0\}$, deci μ este injectivă. Fie $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$; definim $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ astfel: $f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}w_i, j = 1,\dots,n$; pentru orice $v \in V$, $v = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$, punem

$f(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j)$ şi obținem o aplicație liniară $f : V \to W$. Evident

$\mu(f) = M_f = A$, deci μ este surjectivă.

OBSERVAȚII. 1) Considerăm cazul particular cînd $V = K^n$, $W = K^m$, $\mathscr{B} = \{e_1,\dots,e_n\}$, $\mathscr{B}' = \{e'_1,\dots,e'_m\}$ sînt bazele canonice şi fie $f : K^n \to K^m$ o aplicație liniară. Fie $f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i$ şi notăm

$A = M_f^{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$. Fie $x \in K^n$, $x = (x_1,\dots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ şi

$$y = f(x) = (y_1,\dots,y_m) \in K^m. \text{ Avem:}$$

$$y = \sum_{i=1}^{m} y_i e'_i = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)e'_i$$

deci $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, i = 1,\dots,m$, din unicitatea coordonatelor.

Dacă $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$ este matricea-coloană a coordonatelor lui $x \in K^n$

şi $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K)$ este matricea coordonatelor lui $y = f(x) \in K^m$, relaţiile

obţinute mai sus se pot scrie, matriceal: $Y = A \cdot X$. Putem spune că o aplicaţie liniară $f : K^n \to K^m$ este dată de înmulţirea matricei-linie a coordonatelor lui $x \in K^n$ cu matricea A asociată aplicaţiei liniare în bazele canonice; anume $f(x) = x \cdot A^T$.

Ca un fapt important, remarcăm că matricele asociate constituie într-un anumit sens realizări numerice ale aplicaţiilor liniare (relativ la baze fixate).

Se întîmplă deci un fenomen matematic similar celui din cazul realizării numerice a vectorilor abstracţi, prin considerarea coordonatelor acestora într-o bază fixată.

2) Fie $f : V \to W$ ca mai înainte şi $g : V \to K^n$, $h : W \to K^m$ izomorfismele definite în demonstraţia teoremei 2.14. Considerăm diagrama din figura I.4., unde $\tilde{f} = h \circ f \circ g^{-1}$. Atunci $M_f^{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} = M_{\tilde{f}}^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, unde $\mathscr{B} = g(\mathscr{B}_1)$, $\mathscr{B}' = h(\mathscr{B}_2)$; într-adevăr, fie $A = (a_{ij}) = M_f^{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}$ adică $f(v_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\ f\ } & W \\ {\scriptstyle g^{-1}}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ K^n & \xrightarrow{\ \tilde{f}\ } & K^m \end{array}$$

Figura I.4.

Din definiţia izomorfismelor g şi h, rezultă că $g^{-1}(e_j) = v_j$ şi $h(w_i) = e_i'$. Atunci

$$\tilde{f}(e_j) = h(f(g^{-1}(e_j))) = h(f(v_j)) = h\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} h(w_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i'),$$

$$M_{\tilde{f}}^{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = A.$$

TEOREMA 2.18. Fie $V \xrightarrow{\ f\ } W \xrightarrow{\ g\ } Z$ două aplicaţii liniare între spaţiile vectoriale finit dimensionale V, W, Z cu $\dim_K V = n$, $\dim_K W = m$, $\dim_K Z = l$. Fie $\mathscr{B}_1 = \{v_1,\dots,v_n\}$, $\mathscr{B}_2 = \{w_1,\dots,w_m\}$, $\mathscr{B}_3 = \{z_1,\dots,z_l\}$ baze fixate respectiv în V, W, Z. Atunci

$$M_{g\circ f}^{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_3} = M_g^{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3} \cdot M_f^{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}$$

DEMONSTRAȚIE. Fie $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ și $g(w_i) = \sum_{k=1}^{l} b_{ki} z_k$, deci $M_g^{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3} = B = (b_{ki}) \in M_{l,m}(K)$ și $M_f^{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} = A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$. Calculăm $(g \circ f)(v_j) = g(f(v_j)) = g\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} g(w_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{l} b_{ki} z_k\right) =$ $= \sum_{k=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}\right) z_k = \sum_{k=1}^{l} c_{kj} z_k$, unde $M_{g\circ f}^{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_3} = C = (c_{kj}) \in M_{l,n}(K)$. Din unicitatea coordonatelor avem: $c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} a_{ij}, k = 1, ..., l; j = 1, ..., n$, deci $C = BA$.

OBSERVAȚIE. Dacă $W = V$ și $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2$, iar $f: V \to V$ este un operator liniar (endomorfism), vom nota $M_f^{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}$ mai simplu cu $M_f^{\mathscr{B}_1}$.

COROLARUL 1. Fie V un spațiu vectorial peste K, $\dim_K V = n$, și $\mathscr{B}$ o bază fixată în V. Funcția $\mu^{\mathscr{B}} : \mathrm{End}(V) \to M_n(K)$, $\mu^{\mathscr{B}}(f) = M_f^{\mathscr{B}}$, este un izomorfism de inele.

DEMONSTRAȚIE. Fie $\mathscr{B} = \{v_1, ..., v_n\}$. Din teorema 2.17 știm că aplicația $\mu : \mathrm{End}(V) \to M_n(K)$ este bijectivă și că $\mu(f + g) = \mu(f) + \mu(g)$. Din teorema 2.18 rezultă că $\mu(g \circ f) = \mu(g) \cdot \mu(f)$, deoarece $M_{g\circ f}^{\mathscr{B}} = M_g^{\mathscr{B}} \cdot M_f^{\mathscr{B}}$. În plus, $\mu(1_V) = I_n$, deoarece $1_V(v_j) = v_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} v_i$, deci $M_{1_V}^{\mathscr{B}} = (\delta_{ij}) = I_n$ ($\delta_{ij} = 0$ dacă $i \neq j$ și $\delta_{ij} = 1$ dacă $i = j$). În concluzie, μ este un izomorfism de inele.

Rezultatul următor este cuprins de fapt în §1 (teorema 1.2) și este binecunoscut.

LEMA 2.19. Fie K un corp comutativ și $A \in M_n(K)$. Atunci A este inversabilă dacă și numai dacă A este nesingulară ($\det A \neq 0$).

Submulțimea matricelor inversabile din $M_n(K)$ se notează cu $\mathrm{GL}(n; K)$ și ea are, evident, o structură de grup (necomutativ) față de legea de compoziție dată de înmulțirea matricelor. Grupul $\mathrm{GL}(n; K)$ se numește **grupul general liniar de ordin** n cu coeficienți din K.

EXEMPLU. Mulțimea matricelor de forma $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}$, formează un subgrup al grupului $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. Mai general, matricele $A \in M_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A \cdot A^T = I_n$ formează un subgrup al lui $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, care va fi studiat ulterior.

COROLARUL 2. Fie V un spațiu vectorial peste K, $\dim_K V = n$, și $\mathcal{B}$ o bază fixată în V. Restricția funcției $\mu^{\mathcal{B}} : \mathrm{End}(V) \to M_n(K)$ la submulțimea $\mathrm{Aut}(V)$ ia valori în $\mathrm{GL}(n;K)$ și este un izomorfism de grupuri.

DEMONSTRAȚIE. Vom omite indicele $\mathcal{B}$ în notații, ca și mai înainte. Fie $f \in \mathrm{Aut}(V)$; atunci există $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(V)$ și $f \circ f^{-1} = 1_V$, $f^{-1} \circ f = 1_V$. Rezultă că $\mu(f) \cdot \mu(f^{-1}) = I_n$ și $\mu(f^{-1}) \cdot \mu(f) = I_n$, deci $\mu(f) \in \mathrm{GL}(n; K)$, adică putem considera restricția $\mu : \mathrm{Aut}(V) \to \mathrm{GL}(n; K)$. Desigur, restricția rămîne injectivă și $\mu(g \circ f) = \mu(g) \cdot \mu(f)$, deci este morfism de grupuri. Fie acum $A \in \mathrm{GL}(n; K)$; deoarece $\mu : \mathrm{End}(V) \to M_n(K)$ este surjectivă există $f \in \mathrm{End}(V)$ astfel încît $\mu(f) = A$ și există $g \in \mathrm{End}(V)$ astfel încît $\mu(g) = A^{-1}$. Atunci $\mu(f \circ g) = \mu(f) \cdot \mu(g) = A \cdot A^{-1} = I_n = \mu(1_V)$ de unde, μ fiind injectivă, rezultă că $f \circ g = 1_V$ și analog $g \circ f = 1_V$, adică $f \in \mathrm{Aut}(V)$. Prin urmare, restricția $\mu : \mathrm{Aut}(V) \to \mathrm{GL}(n; K)$ este surjectivă, deci μ este izomorfism de grupuri.

DEFINIȚIA 2.11. Fie V, W două spații vectoriale finit dimensionale peste corpul K și fie $f : V \to W$ o aplicație liniară. Se numește **rangul aplicației liniare** f, numărul $\rho(f) = \dim_K(\mathrm{Im}\, f)$.

TEOREMA 2.20. Fie $f : V \to W$, $g : W \to Z$ două aplicații liniare între spațiile finit dimensionale V, W, Z peste corpul K. Atunci:

(a) $\rho(g \circ f) \le \rho(f)$ **și** $\rho(g \circ f) \le \rho(g)$.

(b) Dacă g este izomorfism, atunci $\rho(g \circ f) = \rho(f)$**, iar dacă f este izomorfism,** $\rho(g \circ f) = \rho(g)$**.**

DEMONSTRAȚIE. (a) Avem incluziunile $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ și $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$. Într-adevăr, fie $z \in \mathrm{Im}(g \circ f)$; atunci $z = (g \circ f)(v)$ cu $v \in V$, deci $z = g(f(v))$ cu $f(v) \in W$, adică $z \in \mathrm{Im}\, g$. Fie acum $v \in \mathrm{Ker}\, f$; atunci $f(v) = 0$, deci $g(f(v)) = 0$, adică $v \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$. Rezultă că $\dim_K \mathrm{Im}(g \circ f) \le \dim_K \mathrm{Im}\, g$, adică $\rho(g \circ f) \le \rho(g)$ și $\dim_K \mathrm{Ker}\, f \le \dim_K \mathrm{Ker}(g \circ f)$, deci conform teoremei dimensiunii, $\dim_K \mathrm{Im}(g \circ f) = \dim_K V - \dim_K \mathrm{Ker}(g \circ f) \le$ $\dim_k V - \dim_k \mathrm{Ker}\, f = \dim_K \mathrm{Im}\, f$, adică $\rho(g \circ f) \le \rho(f)$.

(b) Dacă g este un izomorfism, atunci $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ și din punctul (a) rezultă $\rho(f) \le \rho(g \circ f)$ și $\rho(g \circ f) \le \rho(f)$, deci $\rho(g \circ f) = \rho(f)$. Analog, dacă f este izomorfism, atunci $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$ și din punctul (a), rezultă $\rho(g) \le \rho(g \circ f)$ și $\rho(g \circ f) \le \rho(g)$, deci $\rho(g \circ f) = \rho(g)$.

Fie $A \in M_{m,n}(K)$ o matrice nenulă. Reamintim că se numește **determinant principal** al matricei A un determinant Δ, format cu r linii și r coloane ale matricei A, avînd proprietățile: $\Delta \ne 0$ și orice determinant obținut

din matricea A, de ordin mai mare decît r este nul. Ordinul r al unui determinant principal al matricei A se numeşte **rangul** lui A şi se notează $r = \rho(A)$. Dacă A este matricea nulă punem $\rho(A) = 0$.

OBSERVAŢIE. Evident o matrice nenulă A poate să aibă mai mulţi determinanţi principali, dar toţi au acelaşi ordin (conform definiţiei).

Dacă $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ atunci coloanele matricei A, $a_{(j)} = (a_{ij})$, $1 \le i \le m$ pot fi privite ca vectori în spaţiul vectorial $M_{m,1}(K)$ pentru orice $j = 1, 2, ..., n$. Notăm cu $\rho'(A)$ = numărul maxim de coloane ale lui A liniar independente (= dimensiunea subspaţiului vectorial generat de vectorii coloană ai matricei A).

LEMA 2.21. Pentru orice matrice $A \in M_{m,n}(K)$ avem $\rho(A) = \rho'(A)$.

DEMONSTRAŢIE. Dacă $A = 0$ atunci $\rho(A) = \rho'(A) = 0$ Fie $A \ne 0$ şi $r = \rho(A)$; putem presupune (printr-o renumerotare) că $\Delta = |a_{ij}| \ne 0$, $1 \le i \le r$; $1 \le j \le r$. Să arătăm că primele r coloane $a_{(j)}$, $j = 1,...,r$, sînt liniar independente peste K. Fie $\lambda_1 a_{(1)} + ... + \lambda_r a_{(r)} = 0$ o combinaţie liniară a lor; atunci pentru orice $r = 1, ..., m$ avem:

$$\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + ... + \lambda_r a_{1r} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\lambda_1 a_{r1} + \lambda_2 a_{r2} + ... + \lambda_r a_{rr} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + ... + \lambda_r a_{mr} = 0.$$

Dacă notăm cu B_r matricea $(a_{ij})_{1 \le i,j \le r}$, atunci det $B_r = \Delta \ne 0$, deci B_r este inversabilă. Notăm cu $\Lambda_r = (\lambda_j)_{1 \le j \le r} \in M_{r,1}(K)$ şi primele r relaţii de mai sus se pot scrie matriceal astfel: $B_r \Lambda_r = 0$. Înmulţind cu B_r^{-1} la stînga obţinem $\Lambda_r = 0$, deci $\lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$, adică primele r coloane ale matricei A sînt liniar independente şi atunci $r = \rho(A) \le \rho'(A)$.

Pe de altă parte, toţi determinanţii $\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} & \Delta & & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{rk} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ir} & \cdots & a_{ik} \end{vmatrix}$ sînt nuli deoarece pentru $i \le r$ au două linii identice, pentru $k \le r$ au două coloane identice, iar pentru $i > r$, $k > r$ sînt determinanţi de ordinul $r + 1$ ai matricei A, care are rangul $\rho(A) = r$. Fixăm pe k şi luăm $i = 1,...,m$. Dezvoltăm Δ_{ik} după ultima linie:

$$\Delta_{ik} = A_1 a_{i1} + A_2 a_{i2} + ... + A_r a_{ir} + \Delta a_{ik} = 0,$$

deci $a_{ik} = \left(-\dfrac{A_1}{\Delta}\right) a_{i1} + ... + \left(-\dfrac{A_r}{\Delta}\right) a_{ir}$, unde $A_1, ..., A_r$ nu depind de $i = 1,...,m$.

Matriceal, putem scrie:

$$a_{(k)} = \left(-\frac{A_1}{\Delta}\right)a_{(1)} + \ldots + \left(-\frac{A_r}{\Delta}\right)a_{(r)},$$

deci, luînd $k = r + 1, \ldots, n$ obținem că $a_{(k+1)}, \ldots, a_{(n)}$ sînt liniar dependente de coloanele $\{a_{(1)}, \ldots, a_{(r)}\}$, adică $\rho'(A) \leq r = \rho(A)$, de unde rezultă că $\rho(A) = \rho'(A)$.

COROLAR. Dacă $A \in M_{m,n}(K)$ și $\rho''(A)$ = numărul maxim de linii liniar independente peste K (privite ca vectori în $M_{1,n}(K)$), atunci $\rho''(A) = \rho(A)$.

DEMONSTRAȚIE. Fie A^T transpusa matricei A. Atunci $\rho''(A) = \rho'(A^T) = \rho(A^T) = \rho(A)$.

TEOREMA 2.22. Fie V, W două spații vectoriale peste K, $\dim_K V = n$, $\dim_K W = m$ și $f: V \to W$ o aplicație liniară. Dacă $M_f^{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} \in M_{m,n}(K)$ este matricea asociată lui f în bazele fixate $\mathscr{B}_1$ în V și $\mathscr{B}_2$ în W, atunci $\rho(f) = \rho(M_f^{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2})$.

DEMONSTRAȚIE. Considerăm diagrama din fig. I.5 și notațiile din observația 2) ce urmează teoremei 2.17 și avem:

unde $\tilde{f} = h \circ f \circ g^{-1}$, $M_f^{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} = M_{\tilde{f}}^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ g^{-1}\uparrow\wr & & \wr\downarrow h \\ K^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & K^m \end{array}$$

Figura I.5.

Deoarece h și g sînt izomorfisme, pe baza teoremei 2.20 rezultă că $\rho(f) = \rho(\tilde{f})$. Din aceeași observație 2) rezultă că $\operatorname{Im}\tilde{f}$ este generată de vectorii coloană ai matricei $A = M_{\tilde{f}}^{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = M_f^{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}$, unde am identificat $K^m \xrightarrow{\sim} M_{m,1}(K)$ deci $\rho(\tilde{f}) = \rho(M_{\tilde{f}}^{\mathscr{B},\mathscr{B}'})$, adică $\rho(\tilde{f}) = \rho(M_f^{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2})$.

COROLAR. Fie $A \in M_{m,n}(K)$, $P \in M_n(K)$ nesingulară și $Q \in M_m(K)$ nesingulară. Atunci $\rho(AP) = \rho(A)$ și $\rho(QA) = \rho(A)$.

DEMONSTRAȚIE. Matricele P, A, Q definesc aplicațiile liniare $K^n \xrightarrow{f_P} K^n \xrightarrow{f_A} K^m \xrightarrow{f_Q} K^m$, unde f_P și f_Q sînt izomorfisme. Se aplică teorema 2.22 și teorema 2.20.

OBSERVAȚIE. Rezultatele de mai sus ne dau un dicționar perfect, privind corespondența între aplicații liniare și matrice. De exemplu, dacă $A \in M_{m,n}(K)$ și $f: K^n \to K^m$ este asociată (în bazele canonice), atunci spațiul soluțiilor sistemului omogen $A \cdot X = 0$ este $\operatorname{Ker} f$ și va avea dimensiunea egală cu $n - \dim \operatorname{Im} f = n - \rho(A)$.

Vom studia acum cum se schimbă matricea asociată unei aplicații liniare cînd se schimbă bazele.

Fie V un spaţiu vectorial peste K şi $\dim_K V = n$. Fie $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$, $\mathscr{B}' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ două baze ale lui V. Pentru orice $j = 1,...,n$ avem $e'_j = p_{1j}e_1 + p_{2j}e_2 +...+ p_{nj}e_n$, sau mai concentrat $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}e_i$, unde scalarii $p_{ij} \in K$ sînt unic determinaţi pentru cele două baze fixate.

DEFINIŢIA 2.12. Matricea $P = (p_{ij}) \in M_n(K)$ se numeşte **matricea de trecere de la baza $\mathscr{B}$ la baza $\mathscr{B}'$.** Vom nota simbolic astfel: $\mathscr{B} \xrightarrow{P} \mathscr{B}'$.

OBSERVAŢIE. Avem evident $P = M_{1_V}^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ [deoarece $1_V(e'_j) = e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}e_i$]. Dacă $\varphi : V \to V$ este aplicaţia liniară definită prin $\varphi(e_j) = e'_j$; $j = 1,...,n$, atunci $M_{\varphi}^{\mathscr{B}} = P$, deoarece $\varphi(e_j) = e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}e_i$.

LEMA 2.23. Fie $A \in M_{m,n}(K)$. Dacă $AX = 0$ pentru orice $X \in M_{n,1}(K)$, atunci $A = 0$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $X_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ cu 1 în poziţia j; $1 \le j \le n$. Atunci

$$A \cdot X_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = 0 \text{ deci } a_{ij} = 0, \ (\forall)\, i = 1, ..., m \text{ şi } (\forall)\, i = 1,...,n, \text{ adică } A = 0.$$

TEOREMA 2.24. Fie V un spaţiu vectorial peste K cu $\dim_K V = n$, $\mathscr{B}$ şi $\mathscr{B}'$ două baze fixate în V, $P \in M_n(K)$ matricea de trecere de la baza $\mathscr{B}$ la $\mathscr{B}'$. Dacă $x \in V$ şi X, respectiv X', este matricea-coloană a coordonatelor lui x în baza $\mathscr{B}$, respectiv $\mathscr{B}'$, atunci $X = P \cdot X'$ şi P este nesingulară.

DEMONSTRAŢIE. Fie $X = (x_i)$, $X' = (x'_j) \in M_{n,1}(K)$; atunci

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}x'_j \right) e_i,$$

deci din unicitatea coordonatelor rezultă $x_i = \sum_{i=0}^{n} p_{ij}x'_j$, $i = 1, ..., n$ adică $X = PX'$. Fie $Q \in M_n(K)$ matricea de trecere de la baza $\mathscr{B}'$ la baza $\mathscr{B}$. Atunci avem relaţiile $X = PX'$ şi $X' = QX$, de unde obţinem $X = (PQ)X$ sau $(I_n - PQ)X = 0$,

$(\forall)\, X \in M_{n,1}(K)$. Din lema 2.23 rezultă $I_n - PQ = 0$, deci $PQ = I_n$ adică P este inversabilă ($\det P \cdot \det Q = 1$) și în plus $P^{-1} = Q$.

DEFINIȚIA 2.13. Fie $A, B \in M_{m,n}(K)$. Matricele A și B se numesc **echivalente** și scriem $A \approx B$, dacă există $P \in M_n(K)$ și $Q \in M_m(K)$ matrice nesingulare astfel încît $B = QAP$.

Fie $A,\ B \in M_n(K)$. Matricele A și B se numesc **asemenea** și scriem $A \sim B$, dacă există $P \in M_n(K)$ matrice nesingulară astfel încît $B = P^{-1}AP$.

PROPOZIȚIA 2.25. Echivalența matricelor și asemănarea lor sînt relații de echivalență, care păstrează rangul.

DEMONSTRAȚIE. Fie $A, B, C \in M_{m,n}(K)$. Avem $A = I_m A I_n$, deci $A \approx A$. Dacă $A \approx B$ avem $B = QAP$ cu $P \in M_n(K)$, $Q \in M_m(K)$ nesingulare; atunci $A = Q^{-1}BP^{-1}$, adică $B \approx A$. Dacă $A \approx B$ și $B \approx C$ avem $B = Q_1AP_1$, $C = Q_2BP_2$ cu, $P_1, P_2 \in M_n(K)$, $Q_1, Q_2 \in M_m(K)$ nesingulare; atunci $C = (Q_2Q_1)A(P_1P_2)$ cu Q_1Q_2, P_1P_2 nesingulare $[\det(P_1P_2) = \det P_1 \cdot \det P_2 \neq 0$ și $\det(Q_2Q_1) = \det Q_2 \cdot \det Q_1 \neq 0]$, deci $A \approx C$ și echivalența matricelor este o relație de echivalență.

Fie $A,\ B,\ C \in M_n(K)$. Avem $A = I_n^{-1}AI_n$, deci $A \sim A$. Dacă $A \sim B$. avem $B = P^{-1}AP$ cu $P \in M_n(K)$ nesingulară; atunci $A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$ adică $B \sim A$. Dacă $A \sim B$ și $B \sim C$ avem $B = P^{-1}AP$, $C = Q^{-1}BQ$ cu P, $Q \in M_n(K)$ nesingulare; atunci $C = (PQ)^{-1}A(PQ)$, deci $A \sim C$ și asemănarea matricelor este o relație de echivalență.

Din corolarul la teorema 2.22, dacă $A \approx B$, atunci $\rho(B) = \rho(QAP) = \rho(A)$ și evident, pentru $A \sim B$, rezultă că $\rho(B) = \rho(A)$.

TEOREMA 2.26. Fie V, W două spații vectoriale finit dimensionale peste K, $f: V \to W$ o aplicație liniară și $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_1'$ două baze în V, iar $\mathscr{B}_2$, $\mathscr{B}_2'$ două baze în W. Atunci $M_f^{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} \approx M_f^{\mathscr{B}_1',\mathscr{B}_2'}$.

DEMONSTRAȚIE. Notăm: $A = M_f^{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}$, $B = M_f^{\mathscr{B}_1',\mathscr{B}_2'}$ $\mathscr{B}_1 \xrightarrow{P} \mathscr{B}'_1$, $\mathscr{B}_2 \xrightarrow{Q} \mathscr{B}'_2$; pentru $(\forall)\, x \in V$ fie $y = f(x) \in W$ și X, respectiv X', matricea coordonatelor lui x în baza $\mathscr{B}_1$, respectiv $\mathscr{B}_1'$; fie apoi Y, respectiv Y', matricea coordonatelor lui y în baza $\mathscr{B}_2$, respectiv $\mathscr{B}_2'$. Ținînd seama de observațiile 1) și 2) de la teorema 2.17, rezultă că relația $y = f(x)$ are două scrieri matriceale $Y = AX$ și $Y' = BX'$; din teorema 2.24 avem $X = PX'$, $Y = QY'$. Din aceste patru relații obținem $APX' = QBX'$ sau $(AP - QB)X' = 0$ și cum $x \in V$ este arbitrar, rezultă că $X' \in M_{n,1}(K)$ este arbitrar. Din lema 2.23 rezultă $AP - QB = 0$ sau $B = Q^{-1}AP$ (Q este nesingulară din teorema 2.24), deci $A \approx B$.

COROLAR. Fie V un spațiu vectorial finit dimensional peste K, $f: V \to V$ un endomorfism și $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ două baze în V. Atunci $M^{\mathscr{B}}{}_f \sim M^{\mathscr{B}}{}_f$.

DEMONSTRAȚIE. Fie P matricea de trecere de la $\mathscr{B}$ la $\mathscr{B}'$, $A = M_f^{\mathscr{B},\mathscr{B}}$, $B = M_f^{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}$. Aplicînd teorema pentru $W = V$, $\mathscr{B}_2 = \mathscr{B}_1 = \mathscr{B}$, $\mathscr{B}_2' = \mathscr{B}_1' = \mathscr{B}'$, deci pentru $Q = P$ obținem $B = P^{-1}AP$, adică $A \sim B$.

OBSERVAȚIE. Acest ultim rezultat ne permite să formulăm următoarea problemă: Fiind dat $f \in \mathrm{End}(V)$ se cere să se găsească o bază $\mathscr{B}'$ în V astfel încît matricea $M_f^{\mathscr{B}}$ să aibă o formă cît mai simplă: diagonală, triunghiulară, etc. În limbaj matriceal aceasta se poate enunța astfel: Fiind dată o matrice $A \in M_n(K)$ se cere să se găsească o matrice nesingulară $P \in M_n(K)$ astfel încît matricea (asemenea cu A) $P^{-1}AP$ să aibă o formă cît mai simplă.

De acestă problemă a reducerii matricelor la o formă cît mai simplă ne vom ocupa într-un paragraf ulterior, cu ajutorul valorilor şi vectorilor proprii.

APLICAȚII. 1) Fie $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ baza canonică în $\mathbb{R}^3$ şi $\mathscr{B}' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ baza formată din vectorii $e_1' = (1, 2, 1)$, $e_2' = (1, 0, 0)$, $e_3' = (2, 0, 1)$. Determinăm matricea T de trecere de la $\mathscr{B}$ la $\mathscr{B}'$. Pentru aceasta, observăm că $e_1' = e_1 + 2e_2 + e_3$, $e_2' = e_1$, $e_3' = 2e_1' + e_3$ deci

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Orice vector $x \in \mathbb{R}^3$ are două seturi de coordonate: unul relativ la $\mathscr{B}$ notat (x_1, x_2, x_3) şi altul relativ la $\mathscr{B}'$, notat (x_1', x_2', x_3'). Notînd cu X şi X' matricele-coloană respective, avem $X = T \cdot X'$, conform teoremei 2.24.

Mai general, dacă V este un K–spațiu vectorial ($K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) de dimensiune n, vom numi **reper în** V orice pereche $(a, \mathscr{B})$ formată dintr-un punct $a \in V$ şi o bază $\mathscr{B}$ a lui V. Un reper se mai numeşte **sistem de coordonate** ataşat unui observator plasat în a. În continuare vom presupune că $a = 0$. Dacă $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ sînt două repere (observatori plasați în origine) şi dacă T este matricea de trecere de la $\mathscr{B}$ la $\mathscr{B}'$, atunci matricele-coloană ale coordonatelor unui vector $x \in V$ relativ la $\mathscr{B}$ şi $\mathscr{B}'$ (notate respectiv cu X şi X') satisfac relația $X = T \cdot X'$, conform teoremei 2.24.

În fizică există două puncte de vedere – pasiv şi activ , în observarea stărilor unui sistem Σ (V reprezintă spațiul stărilor lui Σ). Dacă x este o stare a lui Σ şi $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ sînt doi observatori, atunci relația $X = T \cdot X'$ exprimă punctul de vedere **pasiv**, aceeaşi stare fiind descrisă de doi observatori. Dar se poate adopta şi o altă interpretare. Anume, considerăm un singur observator $\mathscr{B}$, o matrice nesingulară T şi se construieşte operatorul liniar $f : V \to V$ pentru care $M_f^{\mathscr{B}} = T^{-1}$. Atunci notînd $x' = f(x)$ şi cu X (respectiv X') matricele-coloană ale coordonatelor lui x (respectiv x') relativ la $\mathscr{B}$, are loc relația $X = T \cdot X'$. Acesta este punctul de vedere **activ**, cînd observatorul

este unic, iar starea sistemului este transformată (de exemplu printr-o simetrie sau o rotaţie a spaţiului stărilor lui Σ).

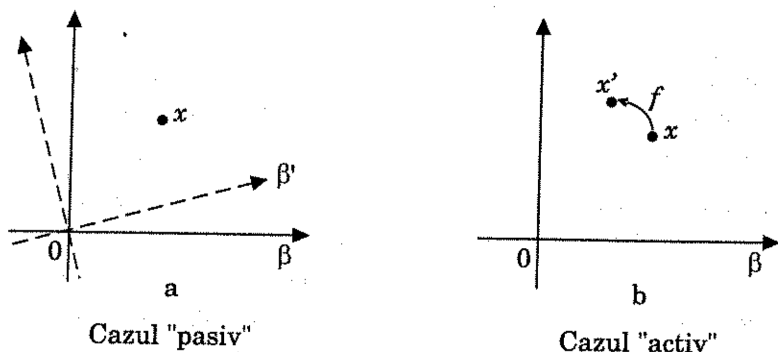


Figura I.6.

2) Să considerăm o matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Se numesc **transformări elementare** asupra matricei A: înmulţirea unei linii (sau coloane) cu un scalar (real) nenul, adunarea unei linii (sau coloane) la altă linie (sau coloană) şi intervertirea a două linii (sau coloane). Prin astfel de transformări este evident că rangul lui A se păstrează. Aceste transformări pot fi prezentate în mod unitar, cu ajutorul unor matrice speciale. Fie $n \geq 1$ un întreg fixat şi α un scalar. Considerăm următoarele trei matrice $n \times n$

$$I_j(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & & & \overset{j}{} & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(1,\ldots,1,\alpha,1,\ldots,1),\ 1\leq j\leq n;$$

pentru $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$, notăm şi $I_{ij}=\begin{pmatrix}0 & \overset{j}{} & 0\\ & 1 & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}$ şi

$$I_{ij}(\alpha)=I_n+\alpha I_{ij}=\begin{pmatrix}1 & & \overset{i}{} & & \overset{j}{} & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \alpha & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ i\\ \\ j\\ \\ \\ \end{matrix}.$$

Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ atunci produsul $I_j(\alpha) \cdot A$ este matricea obţinută din A prin înmulţirea liniei j cu α; în mod similar, $A \cdot I_j(\alpha)$ revine la înmulţirea coloanei j din matricea A cu scalarul α. Produsul $I_{ij}(\alpha) \cdot A$ revine la înmulţirea liniei j cu α şi adunarea la linia i, iar $A \cdot I_{ij}(\alpha)$ este matricea obţinută din A prin înmulţirea coloanei i cu α şi adunarea la coloana j.

Matricele $I_j(\alpha)$ pentru $a \neq 0$ şi $I_{ij}(\alpha)$ sînt evident nesingulare şi se numesc **matrice de transformări elementare** (asupra liniilor sau coloanelor). Schimbarea liniilor i şi j între ele $(i \neq j)$ într-o matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ conduce la matricea

$$A_4 = I_j(-1) \cdot (I_n + I_{ij})(I_n - I_{ji})(I_n + I_{ij})A.$$

Într-adevăr, adunarea liniei j la linia i în matricea A revine la a forma matricea $A_1 = (I_n + I_{ij})A$; apoi $A_2 = (I_n - I_{ji})A_1$ revine la a scădea din linia j a matricei A_1 linia i; apoi $A_3 = (I_n + I_{ij})A_2$ revine la adunarea liniei j la linia i în A_2 şi în fine, înmulţind linia j a matricei A_3 cu -1, se obţine matricea A_4 care deci se obţine din A tocmai prin intervertirea liniilor i şi j. În mod similar, produsul $A \cdot (I_n + I_{ij}) \cdot (I_n - I_{ji}) \cdot (I_n + I_{ij}) \cdot I_{ij}(-1)$ este tocmai matricea obţinută din A prin intervertirea coloanelor $i, j \; (i \neq j)$.

Orice matrice $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ cu rangul $\rho(B) = r$ poate fi adusă prin transformări elementare la o matrice-bloc $m \times n$, de forma $C = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi B este echivalentă cu C. [În general, o matrice $C = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ de tip $m \times n$ se numeşte **matrice-bloc** dacă este fixată cîte o partiţionare a indicilor de linie şi coloană, la rînd, $\{1, ..., m\} = I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_p$, $\{1,...,n\} = J_1 \cup J_2 \cup ... \cup J_q$ şi în plus, $C = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1q} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{p1} & \cdots & C_{pq} \end{pmatrix}$ unde blocul (C_{ij}) este format din elementele c_{uv} cu $u \in I_i$, $v \in J_j$. Un caz important îl constituie matricele pătratice **bloc-diagonale**, de forma

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & C_r \end{pmatrix}$$

blocurile fiind de asemenea matrice pătratice. În acest caz, pentru orice întreg $k \geq 0$, $C^k = \text{diag}(C_1^k, C_2^k, ..., C_r^k)$. Unele din operaţiile cu matrice se extind la matrice-bloc, dacă descompunerea în blocuri este corespunzătoare.

De exemplu,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

şi conform regulei lui Laplace, $\det\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$ în condiții uşor de explicitat.

Revenind la cele spuse anterior, rezultă că orice matrice pătratică $A \in M_n(\mathbb{R})$ de rang r este echivalentă cu matricea bloc-diagonală $C = \mathrm{diag}(I_r, O_{n-r})$. Matricea C se obține prin aplicări succesive de transformări elementare asupra liniilor sau coloanelor lui A deci

$$C = T_1 ... T_p A T'_1 ... T'_q$$

cu $T_1, ..., T_p$, $T'_1, ..., T'_q \in M_n(\mathbb{R})$ nesingulare. În particular, dacă A este nesingulară, atunci $\rho(A) = n$ şi $C = I_n$. De aici rezultă că **orice matrice nesingulară este un produs de matrice de transformări elementare.**

3) Orientarea spațiilor vectoriale reale.

Fie V un spațiu vectorial real de dimensiune $n \geq 1$ şi în V două baze $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$, $\mathscr{B}' = \{e'_1, ..., e'_n\}$, avînd ordinea vectorilor fixată. În acest caz există şi este unic un izomorfism $\mathbb{R}$-liniar $f: V \to V$ astfel încît $f(e_1) = e'_1, ..., f(e_n) = e'_n$ şi scriem $f(\mathscr{B}) = \mathscr{B}'$. Anume, pentru orice $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ (unic), punem $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e'_i$; unicitatea lui f este imediată, căci dacă $g: V \to V$ este un alt operator liniar astfel încît $g(\mathscr{B}) = \mathscr{B}'$, atunci $(\forall)\, x \in V,\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i g(e_i) = g(x)$ deci $f = g$.

Se spune că $\mathscr{B}$ **se deformează continuu** în $\mathscr{B}'$ dacă există o familie $f_t: V \to V$ de izomorfisme $\mathbb{R}$-liniare, $t \in [0,1]$, astfel încît $f_0 = 1_V$, $f_1(\mathscr{B}) = \mathscr{B}'$ şi în plus f_t variază continuu cu t (aceasta înseamnă că elementele matricei lui f_t sînt funcții continue pe intervalul $[0,1]$). Se poate arăta că baza $\mathscr{B}$ se deformează continuu în baza $\mathscr{B}'$ dacă şi numai dacă determinantul matricei de trecere de la $\mathscr{B}$ la $\mathscr{B}'$ este strict pozitiv. În limbaj de matrice aceasta revine la fapul că pentru orice matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ cu $\det A > 0$, există o funcție continuă $\gamma: [0,1] \to M_n(\mathbb{R})$ astfel încît $\gamma(0) = I_n$ şi $\gamma(1) = A$ (se mai spune că A poate fi unită cu I_n printr-un drum continuu). Ideea demonstrației este de a descompune A în produs de matrice de transformări elementare, aşa cum am văzut, a arăta că acestea se unesc cu I_n prin drumuri continue şi a deduce acelaşi lucru pentru A, [A9].

Două baze ordonate $\mathscr{B}$ şi $\mathscr{B}'$ ale lui V se zic **orientate la fel** dacă determinantul matricii de trecere de la $\mathscr{B}$ la $\mathscr{B}'$ este strict pozitiv.

Dacă $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ şi $\mathscr{B}_1 = \{e_2, e_1, e_3, ..., e_n\}$, se observă că matricea de trecere de la $\mathscr{B}$ la $\mathscr{B}_1$ este

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \multirow{2}{*}{0} \\ 1 & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{n-2} \end{array}\right)$$

deci $\det T = -1$. Aşadar, $\mathscr{B}$ şi $\mathscr{B}_1$ nu sînt orientate la fel. Orice bază a lui V este orientată la fel cu $\mathscr{B}$ sau la fel cu $\mathscr{B}_1$. Aşadar, bazele (ordonate) ale spaţiului V sînt împărţite în două clase. **A fixa o orientare** a lui V înseamnă a fixa una din cele două clase.

Dacă $\dim_{\mathbb{R}} V = 1$ şi $B = \{e\}$ este o bază, atunci luînd $\mathscr{B}' = \{-e\}$, bazele $\mathscr{B}$ şi $\mathscr{B}'$ dau cele două orientări ale lui V. În practică orientarea dată de $\mathscr{B}$ se fixează prin semiaxa pozitivă $\{ae \mid a > 0\}$.

Dacă $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$, a da orientare a lui V înseamnă a fixa o bază $\{e_1, e_2\}$, cealaltă orientare fiind dată de baza $\{e_2, e_1\}$.

În spaţiul fizic S tridimensional alegerea unei orientări concrete poate fi legată de particularităţile fiziologice ale omului; astfel, o bază ordonată (deci o orientare a spaţiului) este dată de "regula mîinii stîngi". O problemă fascinantă a fost găsirea unor procese pur fizice care să permită o orientare a spaţiului (neinvariantă deci la "reflexia în oglindă") şi a fost rezolvată afirmativ prin experimentul care a dovedit neconservarea parităţii în interacţiile slabe.

2.5. Calcul vectorial clasic

Fie S spaţiul geometric tridimensional definit cu axiomele lui Euclid (numit uneori şi spaţiul fizic). Vom stabili o legătură strînsă între punctele din S , vectori (elemente din $\mathbb{V}_3$) şi tripletele de numere reale (elemente ale lui $\mathbb{R}^3$). Vom considera cunoscute noţiunile de paralelism, perpendicularitate, unghi, distanţă (euclidiană), plan, dreaptă, semiplan etc.

Mai întîi vom reaminti definiţia vectorilor liberi. Orice pereche ordonată (A, B) de puncte din S se numeşte **segment orientat** deci mulţimea segmentelor orientate este tocmai produsul cartezian $S \times S$. Dacă $A \neq B$, atunci direcţia dreptei determinată de punctele A, B se numeşte **direcţia segmentului** (A, B); segmentele orientate (A, A) se numesc nule şi au direcţia nedeterminată. Segmentele orientate (A, B) şi (B, A) se numesc **opuse** şi, în cazul cînd $A \neq B$, ele sînt distincte. Lungimea unui segment orientat (A, B) este numărul real şi pozitiv care reprezintă distanţa euclidiană $d(A, B)$ între punctele A, B (relativ la o unitate de măsură fixată).

Două segmente orientate (A, B) şi (C, D) sînt egale dacă şi numai dacă $A = C$ şi $B = D$. Ele se numesc **echipolente** (sau **echivalente**) dacă segmentele orientate (A, D) şi (B, C) au acelaşi mijloc şi scriem $(A, B)\mathscr{R}(C, D)$. Aşadar, pentru orice $A, B \in S$ avem $(A, A)\mathscr{R}(B, B)$. Dacă $A \neq B$, atunci $(A, B)\mathscr{R}(C, D)$ dacă şi numai dacă $d(A, B) = d(C, D)$, $AB \| CD$ (paralelism extins) şi AB, CD au aceeaşi orientare (B şi D de aceeaşi parte a dreptei AC); vezi figura I.7.

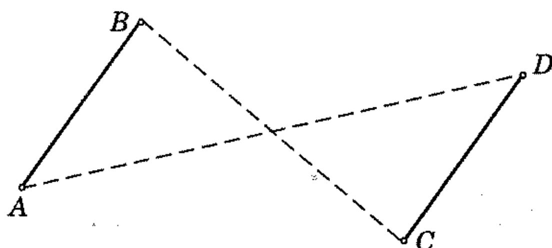


Figura I.7.

Se verifică uşor că $\mathscr{R}$ este o relaţie de echivalenţă şi se notează

$$\mathbb{V}_3 = S \times S/\mathscr{R}.$$

Orice clasă de echivalenţă $\widehat{(A, B)}$ a unui segment orientat (A, B) se numeşte **vector liber** (în spaţiu) şi se mai notează $\boldsymbol{AB}$. Aşadar, $\boldsymbol{AB}$ este colecţia tuturor segmentelor orientate echipolente cu (A, B). Deosebirea esenţială între segmente orientate şi vectori liberi este aceea că două segmente orientate (A, B) şi (C, D) sînt egale dacă şi numai dacă $A = C$, $B = D$, în timp ce vectorii liberi $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AB}$, $\mathbf{w} = \mathbf{CD}$ sînt egali dacă şi numai dacă segmentele (A, B) şi (C, D) sînt echipolente. Vectorul $\boldsymbol{AA}$ se mai numeşte vectorul **nul** şi se notează $\mathbf{0}$.

Pe mulţimea $\mathbb{V}_3$ se defineşte o operaţie algebrică internă

$$"+": \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \to \mathbb{V}_3$$

astfel: dacă $\mathbf{v} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{w} = \mathbf{CD}$ atunci $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{CE}$, (vezi figura I.8), unde CE este diagonala paralelogramului $CB'ED$; (C,B') echipolent cu (A, B). Evident $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ pentru orice $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_3$. Se verifică imediat că suma $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ nu depinde de reprezentanţii aleşi în clasele de echivalenţă respective.

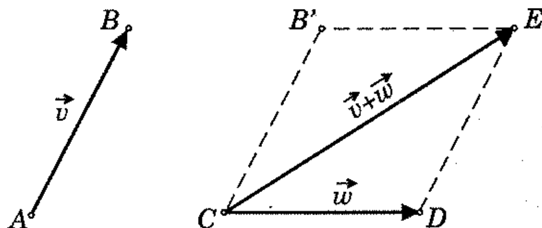


Figura I.8.

Pe $\mathbb{V}_3$ se defineşte şi o operaţie algebrică externă

$$"\cdot": \mathbb{R} \times \mathbb{V}_3 \to \mathbb{V}_3$$

astfel: fie $\mathbf{v} = \mathbf{AB}$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$; se pune

$$\lambda \mathbf{v} = \begin{cases} \mathbf{AC} & \text{dacă } \lambda > 0 \text{ (unde } A, B, C \text{ sînt coliniare,} \\ & \mathbf{AC} \text{ şi } \mathbf{AB} \text{ au aceeaşi orientare şi } d(A,C) = \lambda d(A,B)) \\ \mathbf{0} & \text{dacă } \lambda = 0 \\ \mathbf{AD} & \text{dacă } \lambda < 0 \text{ (unde } A, B, D \text{ sînt coliniare,} \\ & \mathbf{AD} \text{ şi } \mathbf{AB} \text{ au orientări diferite şi } d(D,A) = -\lambda d(A,B)) \end{cases}$$

Definirea riguroasă a lui λv se poate da numai o dată cu construcţia riguroasă a mulţimii $\mathbb{R}$ a numerelor reale. Să ne gîndim că πv poate fi definit numai apelînd la noţiunea de limită !. Se verifică imediat toate proprietăţile din definiţia 2.1 şi ca atare $\mathbb{V}_3$ admite o structură de spaţiu vectorial real, numit **spaţiul vectorilor liberi** din S. Acesta este unul din primele exemple istorice de spaţii vectoriale şi stă la baza interpretărilor geometrice ale algebrei liniare sau în mod dual, a raţionamentelor geometrice prin metode de algebră.

Studiul vectorilor a fost puternic impulsionat de fizică (mecanică, electromagnetism etc.) modelînd operaţiile cu forţe, viteze. Acest studiu este datorat deopotrivă eforturilor unor matematicieni şi fizicieni ca W. R. HAMILTON (1805–1865), H. GRASSMANN (1809–1877), A. CAYLEY (1821–1895), J. C. MAXWELL (1831–1879) şi J. W. GIBBS (1830–1903).

Fixăm în S un triedru ortogonal $Oxyz$ şi pe fiecare semidreaptă Ox, Oy, Oz fixăm cîte un punct U_1, U_2, respectiv U_3 astfel încît $d(O, U_1) = d(O, U_2) = d(O, U_3) = 1$ (s-a ales o unitate de lungime). Triedrul ortogonal $Oxyz$ pe care s-au fixat punctele unitate U_1, U_2, U_3 se va numi **reperul ortogonal** $Oxyz$. Vectorii $\mathbf{i} = \mathbf{OU_1}$, $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{OU_2}$, $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{OU_3}$ se numesc **versorii** axelor reperului. Vom arăta că $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ este bază în $\mathbb{V}_3$. Fie $\mathbf{v} \in \mathbb{V}_3$ un vector oarecare; există un unic punct $M \in S$ astfel încît $v = (\widehat{O, M})$ (vom mai scrie $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{OM}$ şi vom numi acest vector **vectorul de poziţie** al punctului M faţă de reperul $Oxyz$). Proiectăm punctul M în punctul N din planul xOy şi respectiv în punctele M_1, M_2, M_3 pe axele Ox, Oy, Oz (figura I.9).

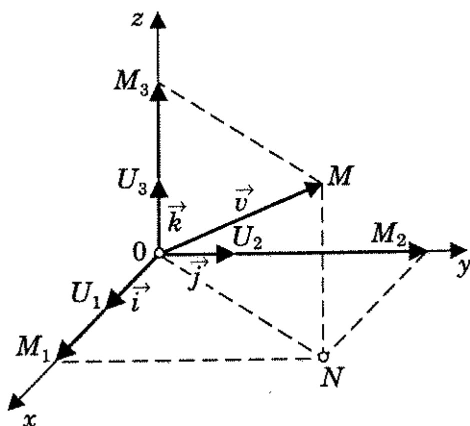


Figura I.9.

Avem: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{OM} = \boldsymbol{ON} + \boldsymbol{OM_3} = \boldsymbol{OM_1} + \boldsymbol{OM_2} + \boldsymbol{OM_3}$ şi $\boldsymbol{OM_1} = x\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{OM_2} = y\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{OM_3} = z\boldsymbol{k}$. Rezultă că $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ cu $x, y, z \in \mathbb{R}$, deci $\mathcal{B}$ este un sistem de generatori. Să arătăm că $\mathcal{B}$

este sistem liniar independent: fie $\lambda_1 \boldsymbol{i} + \lambda_2 \boldsymbol{j} + \lambda_3 \boldsymbol{k} = \mathbf{0}$ şi presupunem că $\lambda_3 \neq 0$; atunci $\mathbf{k} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\mathbf{i} - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\mathbf{j}$, deci orice reprezentant al clasei $\boldsymbol{k}$, în particular segmentul (O, U_3) este paralel cu planul xOy, contradicție. Rezultă $\lambda_3 = 0$; presupunem $\lambda_2 \neq 0$ şi atunci $\mathbf{j} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\mathbf{i}$ deci orice reprezentant al clasei $\boldsymbol{j}$, în particular segmentul (O, U_2) este paralel cu Ox, contradicție. Rezultă $\lambda_2 = 0$; dar atunci şi $\lambda_1 = 0$.

În concluzie, $\mathscr{B}$ este bază în $\mathbb{V}_3$, deci $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{V}_3 = 3$. Din teorema 2.14 (a) rezultă că aplicația $\theta : \mathbb{V}_3 \to \mathbb{R}^3$, $\theta(\mathbf{v}) = (x, y, z)$ este un izomorfism de spații vectoriale, unde $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, (x, y, z) fiind coordonatele lui $\boldsymbol{v}$ în baza $\mathscr{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ (θ este numit şi **izomorfismul lui Descartes**). În reperul $Oxyz$ tripletul (x, y, z) reprezintă coordonatele carteziene ale punctului M, al cărui vector de poziție este $\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{v}$. Vom nota cu $v = \|\mathbf{v}\| = d(O,M)$, lungimea segmentului OM şi o vom numi **mărimea** sau **lungimea** (sau **norma**) lui $\boldsymbol{v}$.

Fie $\mathbb{D}$ mulțimea dreptelor din spațiul geometric S şi fie $\mathscr{R}$ relația de echivalență de paralelism extins (adică d este paralel cu d' şi în cazul cînd d coincide cu d'). Se numeşte **direcție în spațiu** orice clasă de echivalență din $\mathbb{D}/\mathscr{R}$. Se numeşte **vector director** al unei direcții $\delta = \hat{d} \in \mathbb{D}/\mathscr{R}$ orice vector nenul $\boldsymbol{v}$ avînd un reprezentant paralel cu d. Dacă $Oxyz$ este un reper ortogonal fixat ca mai sus şi $\mathscr{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, atunci scriem $\boldsymbol{v} = l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}$ cu $l, m, n \in \mathbb{R}$. Tripletul (l, m, n) poartă numele de tripletul **parametrilor directori** ai direcției δ. Dacă $\mathbf{v}_1 = l_1\mathbf{i} + m_1\mathbf{j} + n_1\mathbf{k}$ cu $l_1, m_1, n_1 \in \mathbb{R}$ este un alt vector director al aceleiaşi direcții δ, atunci $\mathbf{v}_1 = \alpha \cdot \mathbf{v}$ cu $\alpha \in \mathbb{R}^*$, deci avem $l_1/l = m_1/m = n_1/n = \alpha$.

DEFINIȚIA 2.14. Fie $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{V}_3$ vectori nenuli; notăm cu θ unghiul (mai mic decît 180°) dintre doi reprezentanți ai lui $\boldsymbol{v}$, respectiv $\boldsymbol{w}$. Numim **produsul scalar** al celor doi vectori, numărul real $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v \cdot w \cos\theta$ (unde $\theta \in [0, \pi]$). Dacă unul din vectori, $\boldsymbol{w}$, este nul nu se mai poate defini unghiul θ, dar punem $\mathbf{v} \cdot \mathbf{0} = 0$.

Obținem astfel o funcție (produsul scalar) $\langle , \rangle : \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \to \mathbb{R}$, $\langle v, w \rangle = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, ale cărei proprietăți sînt cuprinse în următorul rezultat:

PROPOZIȚIA 2.27. Produsul scalar are proprietățile:

a) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}, (\forall)\, \mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{V}_3$.

b) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$ **sau** $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ **sau** $\theta = \frac{\pi}{2}$ **(vom scrie** $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$**).**

c) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v\, \mathrm{pr}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{w}$ ($\mathrm{pr}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{w}$ = **proiecția scalară a lui w pe v**).

d) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2, \quad (\forall)\, \mathbf{v},\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2 \in \mathbb{V}_3$.

e) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ **şi** $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \leftrightarrow \mathbf{v} = 0$.

f) $v(\lambda w) = \lambda v \cdot w$, $(\forall)\ v, w \in \mathbb{V}_3$, $(\forall)\ \lambda \in \mathbb{R}$.

g) Funcția produs scalar $\langle , \rangle : \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \to \mathbb{R}$ este liniară în fiecare argument.

DEMONSTRAȚIE. a) Avem $v \cdot w = vw\cos\theta = wv\cos\theta = w \cdot v$.

b) $v \cdot w = vw\cos\theta = 0 \leftrightarrow v = 0$ sau $w = 0$ sau $\cos\theta = 0 \leftrightarrow v = 0$ sau $w = 0$ sau $\theta = \frac{\pi}{2}$.

c) Avem $\mathrm{pr}_v w = w\cos\theta$, deci $v \cdot w = vw\cos\theta = v\,\mathrm{pr}_v w$.

d) Putem scrie $v \cdot (w_1 + w_2) = v \cdot \mathrm{pr}_v(w_1 + w_2) = v(\mathrm{pr}_v w_1 + \mathrm{pr}_v w_2) =$
$= v \cdot \mathrm{pr}_v w_1 + v \cdot \mathrm{pr}_v w_2 = v \cdot w_1 + v \cdot w_2$.

e) $v \cdot v = v \cdot v\cos 0 = v^2 \geq 0$ și $v \cdot v = 0 \leftrightarrow v = \mathbf{0}$.

f) Pentru $\lambda > 0$ avem: $v \cdot (\lambda w) = v(\lambda w)\cos\theta = \lambda v \cdot w$; pentru $\lambda = 0$, $v \cdot (0w) = 0 = 0(v \cdot w)$; pentru $\lambda < 0$ avem: $v(\lambda w) = v(-\lambda w)\cos(\pi - \theta) = \lambda(v \cdot w)$.

g) Din d) și f) rezultă că funcția $\langle \, , \, \rangle$ este liniară în al doilea argument. Din comutativitate a), rezultă că produsul scalar este liniar și în primul argument.

OBSERVAȚIE. Vom nota $v = \|v\| = \sqrt{<v, v>}$ și atunci $|<v, w>| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ (inegalitatea Cauchy – Schwarz), deoarece $|\cos\theta| \leq 1$.

Fie $\mathscr{B} = \{i, j, k\}$ baza corespunzătoare unui reper ortogonal *Oxyz*; atunci avem $i \cdot j = 0$, $i \cdot k = 0$, $j \cdot k = 0$ și $i \cdot i = 1$, $j \cdot j = 1$, $k \cdot k = 1$. Dacă $v = xi + yj + zk$ și $w = x'i + y'j + z'k$, atunci din propoziția 2.27 obținem expresia analitică a produsul scalar $v \cdot w = xx' + yy' + zz'$.

În particular, $v \cdot v$ (notat și v^2) este egal cu v^2 și cu $x^2 + y^2 + z^2$.

Aplicații ale produsului scalar

1. Calculul lungimii vectorilor prin $\|v\| = \sqrt{<v, v>} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, unde $v = xi + yj + zk$. De exemplu, dacă $v = 2i + 3j - 2k$, atunci $\|v\| = \sqrt{17}$.

2. Calculul unghiului a doi vectori nenuli prin $\cos\theta = \dfrac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \dfrac{<v, w>}{\|v\| \cdot \|w\|}$. De exemplu, dacă $v = i + j$ și $w = j + k$ atunci $<v, w> = 1$, $\|v\| = \sqrt{2}$, $\|w\| = \sqrt{2}$ și $\theta = \frac{\pi}{3}$.

3. Verificarea ortogonalității vectorilor nenuli v, w prin $v \cdot w = 0$.

4. Fie $v \in \mathbb{V}_3$, $v \neq \mathbf{0}$; $v = li + mj + nk$ un vector director al unei direcții δ. Atunci direcției δ îi corespund doi versori (vectori de lungime unu) $u = \pm\dfrac{v}{\|v\|} = \pm\dfrac{li + mj + nk}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$. Componentele scalare ale unuia dintre cei doi

versori $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$, unde $a = \pm\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$, $b = \pm\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$, $c = \pm\frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$, se numesc **cosinuşii directori** ai direcţiei δ şi reprezintă cosinusurile unghiurilor pe care le face δ cu cele trei axe Ox, Oy, Oz ale reperului. Într-adevăr, avem: $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{u} = a = \cos\alpha$, $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{u} = b = \cos\beta$ etc.

5. **Expresia analitică a unui versor.** Fie $Oxyz$ un reper ortogonal de versori $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Dacă **u** este un versor făcînd unghiurile α, β, γ cu axele reperului, atunci este evident că $\boldsymbol{u} = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k}$.

6. **Teorema cosinusului.** Fie un triunghi ABC şi $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{v}$ (figura I.10.). Atunci $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ deci

$$\|\boldsymbol{BC}\|^2 = \boldsymbol{BC}\cdot\boldsymbol{BC} = (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2 - 2\|\boldsymbol{u}\|\cdot\|\boldsymbol{v}\|\cos\theta.$$

Aşadar, $\|\boldsymbol{BC}\| = \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta}$.

Figura I.10

7. Din fizică se ştie că lucrul mecanic L efectuat în unitatea de timp de o forţă $\boldsymbol{F}$ asupra unei particule care se mişcă cu viteza $\boldsymbol{v}$ este tocmai produsul scalar:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}.$$

8. Să considerăm un plan α şi o submulţime măsurabilă a lui α avînd aria A. Fie $\boldsymbol{A}$ un vector perpendicular pe α avînd mărimea numeric egală cu A. Presupunem că planul α se deplasează în spaţiu cu viteza $\boldsymbol{v}$.

Atunci este definit un cilindru avînd generatoarele paralele cu $\boldsymbol{v}$ şi volumul V al cilindrului în unitatea de timp (numit şi flux) va fi produsul scalar $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}$, deci

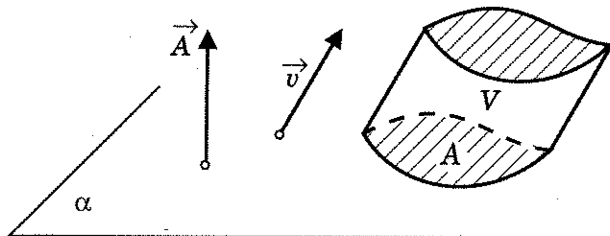


Figura I.11

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v};\ \text{figura I.11.}$$

DEFINIŢIA 2.15. Fie $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{V}_3$; vom defini **produsul vectorial** $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w} \in \mathbb{V}_3$ astfel:

Dacă $\boldsymbol{v}$ şi $\boldsymbol{w}$ sînt coliniari ($\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{v}$ cu $\lambda \in \mathbb{R}$) atunci $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w} \overset{\Delta}{=} 0$.

Dacă v şi w nu sînt coliniari, fie $A = vw\sin\theta$ aria paralelogramului construit pe cei doi vectori ($\theta \in (0, \pi)$ şi $A \neq 0$); direcţia perpendiculară pe planul paralelogramului are doi vectori directori de mărime A, anume t_1, t_2; $\mathscr{B}_i' = \{v, w, t_i\}$ $(i = 1, 2)$ sînt evident baze în $\mathbb{V}_3$ şi fie T_i matricea de trecere $\mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{B}_i'$, unde $\mathscr{B} = \{i, j, k\}$. Avem $\det T_2 = -\det T_1$. Presupunînd $\det T_1 > 0$, definim $v \times w = t_1$, (aşadar, bazele $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}_1'$ au aceeaşi orientare; aceasta este "regula burghiului", sau "regula mîinii stîngi", exprimată matematic riguros); vezi figura I.12.

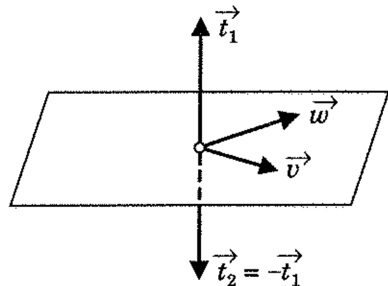


Figura I.12

PROPOZIŢIA 2.28. Produsul vectorial are proprietăţile:

a) $v \times w = -w \times v$, $(\forall)\ v, w \in \mathbb{V}_3$.

b) $v \times w = 0 \leftrightarrow v, w$ **sînt coliniari (liniar dependenţi).**

c) $v \times (w_1 + w_2) = v \times w_1 + v \times w_2$, $(\forall)\ v, w_1, w_2 \in \mathbb{V}_3$.

d) $v \times (\lambda w) = \lambda(v \times w)$, $(\forall)\ v, w \in \mathbb{V}_3$ **şi** $(\forall)\ \lambda \in \mathbb{R}$.

e) aplicaţia "$\times$" : $\mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \to \mathbb{V}_3$ **este liniară în fiecare argument.**

DEMONSTRAŢIE. a), b) şi d) rezultă direct din definiţie. e) rezultă din c), d) şi a). Demonstraţia lui c) are trei etape.

I. Fie a, $b \in \mathbb{V}_3$, nenuli, necoliniari şi b' proiecţia vectorială a lui b pe direcţia perpendiculară pe a. Atunci $a \times b = a \times b'$.

Evident $a \times b$ şi $a \times b'$ au aceeaşi direcţie şi acelaşi sens (figura I.13). Vom arăta că au şi aceeaşi mărime: $\|a \times b\| = ab\sin\theta$ şi $\|a \times b'\| =$

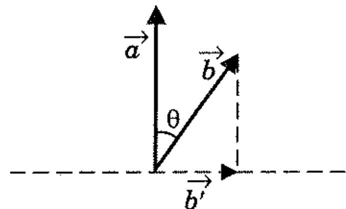


Figura I.13.

$$= a \cdot b' = ab\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = ab\sin\theta = \|a \times b\|, \text{ deci } a \times b = a \times b'.$$

II. Fie cazul particular în care v este perpendicular pe planul paralel cu w_1 şi w_2 (cazul în care w_1, w_2 sînt coliniari se reduce la punctul d)). Atunci $v \times w_1$ este un vector (un reprezentant al său) situat în planul determinat de w_1 şi w_2, obţinut din w_1 prin rotire cu $\frac{\pi}{2}$, de mărime $v \cdot w_1$; $v \times w_2$ este un vector situat în planul determinat de w_1 şi w_2, obţinut din w_2 prin rotire cu $\frac{\pi}{2}$, de mărime $v \cdot w_2$ şi analog pentru $v \times (w_1 + w_2)$. Dar paralelogramele determinate de w_1, w_2, respectiv de $v \times w_1$, $v \times w_2$ sînt asemenea, iar $w_1 + w_2$, respectiv $v \times (w_1 + w_2)$ sînt diagonalele lor. În

paralelogramul determinat de $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}_2$ diagonala este $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}_2$, deci este egală cu $\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)$.

III. În cazul general, fie $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2$ necoliniari şi $\boldsymbol{w}_1',\boldsymbol{w}_2'$ proiecțiile vectoriale ale lui $\boldsymbol{w}_1$ şi $\boldsymbol{w}_2$ pe planul perpendicular pe $\boldsymbol{v}$ (pentru $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ formula este evidentă). Folosind faptul că proiecția unui paralelogram este un paralelogram rezultă:

$$\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)=\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{w}_1'+\boldsymbol{w}_2')=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}_1'+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}_2'=\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}_2.$$

Fie $\mathscr{B}=\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ baza corespunzătoare unui reper ortogonal; atunci avem

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0} \text{ şi } \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}.$$

Dacă $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ şi $\boldsymbol{w}=x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}+z'\boldsymbol{k}$, din propoziția 2.28 obținem expresia analitică a produsului vectorial

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=(yz'-zy')\boldsymbol{i}+(zx'-xz')\boldsymbol{j}+(xy'-yx')\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x & y & z\\ x' & y' & z'\end{vmatrix}$$

pseudodeterminantul fiind dezvoltat după linia întîi.

Aplicații ale produsului vectorial

Reținem că produsul vectorial a doi vectori nenuli $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ este un vector $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}$, avînd direcția perpendiculară pe planul determinat de ei, sensul dat de regula burghiului şi mărimea egală cu aria $vw\sin\theta$, a paralelogramului construit pe $\boldsymbol{v}$ şi $\boldsymbol{w}$.

Indicăm cîteva aplicații geometrice şi fizice care utilizează produsele vectoriale:

1) verificarea coliniarității vectorilor $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ prin $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$.

2) calculul ariei unui triunghi $\sigma(\boldsymbol{ABC})=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}\|$. De asemenea avem $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{AB}$ şi înmulțind vectorial cu $\boldsymbol{BC}$, rezultă $\boldsymbol{AC}\times\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{BC}$ şi trecînd la mărimi se obține teorema sinusurilor.

3) **identitatea lui J. L. Lagrange (1736 – 1813):**
$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})^2+(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})^2=v^2\cdot w^2$; într-adevăr, $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=vw\cos\theta$ şi $\|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\|=vw\sin\theta$, deci
$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w})^2+(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})^2=v^2w^2\cos^2\theta+v^2w^2\sin^2\theta=v^2\cdot w^2$.

4) Fie $\boldsymbol{d}$ versorul direcției de propagare a unei unde electromagnetice plane în vid. Atunci vectorul – intensitate electrică $\boldsymbol{E}$ şi vectorul – inducție magnetică $\boldsymbol{B}$ se află în planul normal la $\boldsymbol{d}$ şi sînt perpendiculari între ei (figura I.14). Aşadar, $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{d}=0$, $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{d}=0$, $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}=0$ şi $\boldsymbol{d}$ este coliniar cu $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$; mai precis, $\boldsymbol{d}=\frac{1}{EB}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$.

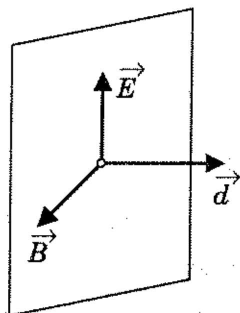


Figura I.14.

5) Fie A un punct în spațiu şi $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{PQ}$ o forță cu

punctul de aplicație în P. Se numește **momentul în A al forței $\boldsymbol{F}$** produsul vectorial $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{AP} \times \boldsymbol{F}$ între vectorul de poziție al punctului P (de aplicație al forței) și forța respectivă. Vectorul $\boldsymbol{M}$ este evident independent de P (presupus alunecător pe dreapta PQ), căci dacă $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{P_1Q_1}$ și P, Q, P_1, Q_1 sînt coliniare, atunci $\boldsymbol{AP} \times \boldsymbol{PQ} = \boldsymbol{AP_1} \times \boldsymbol{P_1Q_1}$.

DEFINIȚIA 2.16. Fie $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{V}_3$; se numește **produsul mixt** al lor, numărul real $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \overset{\Delta}{=} \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$. Se obține astfel o funcție $\mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \to \mathbb{R}$.

Fie $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = x_3\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k}$; atunci $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) + y_1(x_3z_2 - x_2z_3) + z_1(x_2y_3 - y_2x_3)$ deci

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

PROPOZIȚIA 2.29. Produsul mixt are proprietățile:

a) Dacă schimbăm ordinea celor trei vectori cu o permutare pară, atunci produsul mixt nu se schimbă.

b) Dacă schimbăm ordinea celor trei vectori cu permutare impară, atunci produsul mixt schimbă doar semnul.

c) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0 \leftrightarrow \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ sînt coplanari (liniar dependenți).

d) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \pm$ volumul V al paralelipipedului format cu cei trei vectori.

DEMONSTRAȚIE. a) și b) rezultă din proprietățile determinanților.

c) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$ dacă și numai dacă o linie a determinantului este o combinație liniară de celelalte două, deci dacă și numai dacă unul din vectori este combinație liniară de ceilalți doi (adică sînt coplanari).

d) Avem (conform figurii I.15):

$$|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})| = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}\| \cdot |\cos\varphi| = A \cdot (\|\boldsymbol{a}\| \cdot |\cos\varphi|) = V.$$

OBSERVAȚII. 1) Pentru orice $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{V}_3$ avem $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ și din acest motiv, produsul mixt respectiv se mai notează $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

2) Produsul mixt poate fi folosit la calculul volumelor și la verificarea coplanarității vectorilor. Îl vom utiliza sistematic la scrierea ecuațiilor unor plane.

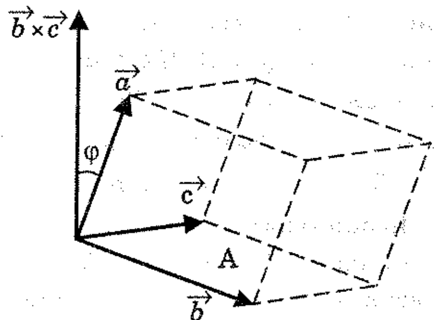


Figura I.15

Fie $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{V}_3$; se numește **dublul produs vectorial** al lor vectorul $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$. Evident, $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ fiind perpendicular pe $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$, va fi situat în planul determinat de $\boldsymbol{b}$ și $\boldsymbol{c}$ deci $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c}$ cu $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Se arată uşor că $\lambda = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ şi $\mu = -\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, adică are loc formula:

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) \end{vmatrix} \text{ (formula lui Gibbs).}$$

Observație. Produsul scalar şi produsul mixt dau ca rezultat scalari, după cum produsul vectorial şi dublul produs vectorial au ca rezultat vectori.

De asemenea trebuie reținut că produsele scalare şi vectoriale nefiind asociative, ele trebuie scrise totdeauna în paranteză. În general, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ şi $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \neq (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$.

2.6. Aplicații geometrice; plane şi drepte în spațiu

Fie $M_1, M_2 \in S$. Fixăm un reper ortogonal $Oxyz$ cu versorii $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ şi fie $\boldsymbol{OM}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{OM}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$ vectorii de poziție ai punctelor, deci $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$. Evident,

$$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{OM}_2 - \boldsymbol{OM}_1 = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}.$$

Atunci $d(M_1, M_2) = \|\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{M}_2\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Vom spune că un punct M împarte segmentul M_1M_2 $(M_1 \neq M_2)$ într-un raport $k \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ dacă $\mathbf{M_1M} = \mathrm{k}\mathbf{MM_2}$. Dacă notăm cu $\mathbf{r_M} = \mathbf{OM}$ vectorul de poziție putem scrie: $\boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_{M_1} = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{r}_{M_2} - \boldsymbol{r}_M)$ sau $\boldsymbol{r}_M = \dfrac{\boldsymbol{r}_{M_1} + k\boldsymbol{r}_{M_2}}{1+k}$, deci obținem trei relații scalare $x = \dfrac{x_1 + kx_2}{1+k}$, $y = \dfrac{y_1 + ky_2}{1+k}$, $z = \dfrac{z_1 + kz_2}{1+k}$. Pentru $k = 1$ obținem coordonatele mijlocului segmentului $M_1M_2 : x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$. Punctele $\boldsymbol{M}$ şi $\boldsymbol{M'}$ care împart segmentul M_1M_2 în raportul k, respectiv $-k\,(k \neq 1)$ se numesc **conjugate armonic.**

Teorema 2.30. Fie $Oxyz$ **un reper ortogonal fixat în** S **şi** $\pi \subset S$ **un plan. Atunci există** $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ **cu** $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ **astfel încît pentru orice punct** $M \in \pi$ **de coordonate (față de reperul dat)** (x, y, z) **să avem relația** $Ax + By + Cz + D = 0$. **Reciproc, mulțimea punctelor** $M(x, y, z) \in S$ **care verifică o relație de forma** $Ax + By + Cz + D = 0$, **cu** $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, **este un plan în** S.

Demonstrație. Fie $\pi \subset S$ un plan şi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat.

Notăm cu $\boldsymbol{N} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$ un vector nenul, normal la plan (ca vector director al direcției perpendiculare pe plan este unic pînă la înmulțirea cu o constantă nenulă). Deoarece $\boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{0}$ rezultă $\|\boldsymbol{N}\|^2 = A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Fie $M(x, y, z) \in \pi$ un punct oarecare; atunci $\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M} \perp \boldsymbol{N}$, adică $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M} = 0$, deci $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Notînd $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ se obține relația $Ax + By + Cz + D = 0$, cu $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Reciproc, fie $\pi = \{M(x, y, z) \in S \mid Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0\}$.

Fixăm $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ (există un punct $M_0 \in \pi$ deoarece din condiția $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ rezultă că măcar unul dintre coeficienții A, B, C este nenul și atunci variabila respectivă se poate exprima în funcție de celelalte din relația dată). Notăm $\boldsymbol{N} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{0}$; avem și relația $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Vom arăta că $\pi = \pi'$, unde $\pi' = \{M(x, y, z) \in S \mid \mathbf{M_0M} \perp \mathbf{N}\}$, care este un plan.

Fie $M \in \pi$, deci $Ax + By + Cz + D = 0$; scăzînd relația $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ obținem $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, deci $\boldsymbol{M_0M} \cdot \boldsymbol{N} = 0$, adică $\boldsymbol{M_0M} \perp \boldsymbol{N}$ și deci $M \in \pi'$. Fie $M \in \pi'$; atunci $\boldsymbol{M_0M} \perp \boldsymbol{N}$ adică $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Rezultă relația $Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$, de unde $Ax + By + Cz + D = 0$, deci $M \in \pi$.

OBSERVAȚII. 1) $Ax + By + Cz + D = 0$ se numește **ecuația planului** π; coeficienții A, B, C, D sînt unici pînă la înmulțirea cu o constantă nenulă (figura I. 16).

În general, dacă $F \subset \mathbb{R}^3$ este o figură geometrică (plan, suprafață etc.), se poate numi **ecuație a lui** F legătura între coordonatele carteziene x, y, z ale unui punct M care descrie condiția geometrică pentru ca punctul M să aparțină figurii F. Reținem că punctele sînt date prin coordonate (sau prin vectori de poziție), iar planele sînt date prin ecuații; vom vedea că dreptele sau curbele în spațiu au cîte două ecuații, după cum anumite regiuni din spațiu sînt date prin inecuații.

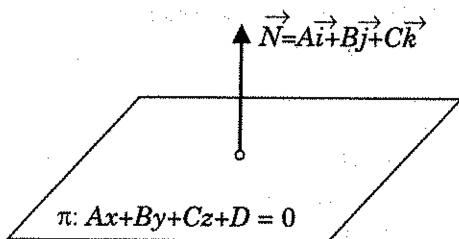


Figura I.16.

2) Semnalăm cazurile particulare de plane: planul xOy are ecuația $z = 0$; planul yOz are ecuația $x = 0$; planul zOx are ecuația $y = 0$; un plan paralel cu xOy are ecuația $z = k$, $k \in \mathbb{R}$, etc.

Dacă în ecuația planului π, $Ax + By + Cz + D = 0$, lipsește o variabilă, de exemplu $B = 0$, atunci planul π este paralel cu axa respectivă, aici cu Oy; într-adevăr, normala la plan este $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + O\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ și $\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{j} = 0$, deci $\boldsymbol{N} \perp Oy$ și $\pi \parallel Oy$.

Dacă în ecuația planului, coeficientul $D = 0$, atunci planul trece prin O, originea reperului $Oxyz$.

Fie $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$, trei puncte necoliniare și fie $M(x, y, z)$ un punct oarecare din planul determinat de cele trei puncte date. Impunem condiția ca $\boldsymbol{M_1M}$, $\boldsymbol{M_1M_2}$, $\boldsymbol{M_1M_3}$ să fie coplanari, deci ca produsul mixt să fie nul:

$$(\boldsymbol{M_1M}, \boldsymbol{M_1M_2}, \boldsymbol{M_1M_3}) = 0,$$

sau $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_3-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$, sau încă (sub formă simetrică),

$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (aceasta este **ecuaţia planului determinat de trei puncte necoliniare**).

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat şi $\boldsymbol{N} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{0}$ un vector director al unei direcţii fixate. Fie $M(x, y, z)$ un punct oarecare din planul ce trece prin M_0 şi este perpendicular pe direcţia dată. Impunem condiţia ca $\boldsymbol{M_0M}$ şi $\boldsymbol{N}$ să fie ortogonali, deci $\boldsymbol{M_0M} \cdot \boldsymbol{N} = 0$, de unde obţinem:

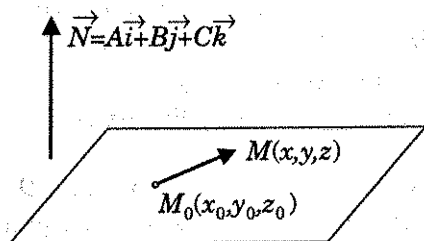


Figura I.17.

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

(**ecuaţia planului determinat de un punct şi perpendicular pe o direcţie dată**); vezi figura I. 17.

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat şi $\boldsymbol{v}_1 = l_1\boldsymbol{i} + m_1\boldsymbol{j} + n_1\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v}_2 = l_2\boldsymbol{i} + m_2\boldsymbol{j} + n_2\boldsymbol{k}$ doi vectori nenuli, vectori directori a două direcţii diferite fixate. Fie $M(x, y, z)$ un punct oarecare din planul ce trece prin M_0 şi este paralel cu cele două direcţii date. Dacă $\boldsymbol{N}$ este normala planului, atunci $\boldsymbol{N} \perp \boldsymbol{v}_1$ şi $\boldsymbol{N} \perp \boldsymbol{v}_2$, deci $\boldsymbol{N}$ este coliniar cu $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$ şi putem lua $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2$.

Impunem condiţia $\boldsymbol{M_0M} \perp \boldsymbol{N}$, deci $\boldsymbol{M_0M} \cdot (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2) = 0$, adică

$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$. (aceasta este **ecuaţia planului determinat de un punct şi care este paralel cu două direcţii date**).

Fie $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$ $(a,b,c \neq 0)$ punctele în care un plan taie cele trei axe ale reperului ortogonal $Oxyz$ şi fie $M(x, y, z)$ un punct oarecare în planul respectiv. Scriind că $\boldsymbol{AM}, \boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}$ sînt coplanari obţinem:

$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$ sau $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$ (**ecuaţia planului "prin tăieturi"**); figura I. 18.

Fie acum D o dreaptă în spațiu, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat al ei și $\boldsymbol{v} = l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k} \neq 0$ un vector director al direcției lui D. Dacă $M(x, y, z) \in D$ este un punct oarecare al dreptei, atunci $\boldsymbol{M_0M} \parallel \boldsymbol{v}$, deci $\boldsymbol{M_0M} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ sau

$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ (**ecuațiile scalare canonice ale dreptei**); figura I. 19.

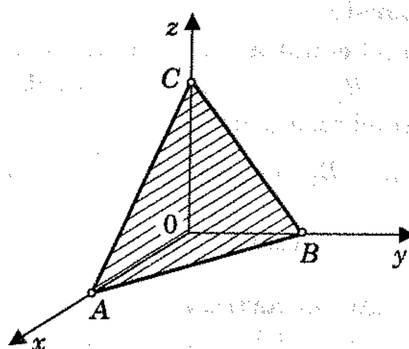


Figura I.18.

Dacă notăm valoarea comună a rapoartelor de mai sus cu t, obținem **ecuațiile parametrice ale dreptei**:

$$x = x_0 + lt, \; y = y_0 + mt, \; z = z_0 + nt; \; t \in \mathbb{R}.$$

Fie D dreapta ce trece prin punctele distincte fixate $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$ și $M(x, y, z)$ un punct oarecare al ei. Atunci $\boldsymbol{M_1M} \parallel \boldsymbol{M_1M_2}$, deci obținem

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$

(**ecuațiile dreptei determinată de două puncte**).

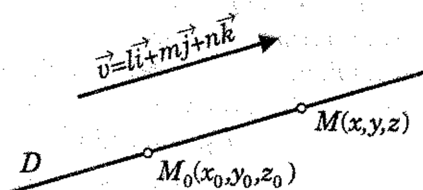


Figura I.19.

Fie $D = \pi_1 \cap \pi_2$ dreapta de intersecție a două plane (neparalele) $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ și $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Atunci coordonatele (x, y, z) ale unui punct oarecare $M \in D$ satisfac ambele ecuații de mai sus, deci putem considera ca ecuații ale dreptei, cele două ecuații, adică

$D : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$; vezi figura I.20.

Mai observăm că dacă

$\boldsymbol{N_1} = A_1\boldsymbol{i} + B_1\boldsymbol{j} + C_1\boldsymbol{k}, \boldsymbol{N_2} = A_2\boldsymbol{i} + B_2\boldsymbol{j} + C_2\boldsymbol{k}$

sînt normalele la cele două plane, atunci $\boldsymbol{N_1} \times \boldsymbol{N_2}$ este vector director al dreptei D și dacă alegem un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pe D putem obține ecuațiile scalare canonice ale dreptei D.

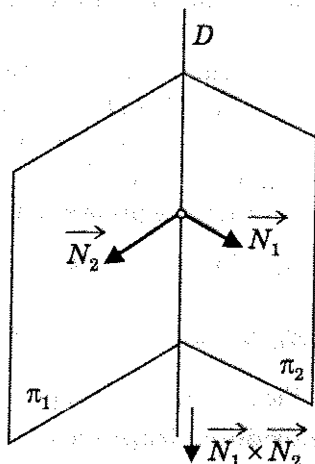


Figura I.20.

Propoziția 2.31. Fie $D = \pi_1 \cap \pi_2$ dreapta de intersecție a două plane

neparalele $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ **și** $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. **Atunci ecuația oricărui plan care trece prin** D **este de forma** $(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$, **cu** $\lambda \in \mathbb{R}$.

[Scriind ecuația de mai sus sub forma

$\frac{1}{\lambda}(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$

admitem și valoarea $\lambda = \infty\left(\frac{1}{\lambda} = 0\right)$ pentru a obține ecuația planului π_2].

Demonstrație. Ecuația

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

se poate scrie $(A_1 + \lambda A_2)x + (B_1 + \lambda B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z + (D_1 + \lambda D_2) = 0$,

$$\text{cu } (A_1 + \lambda A_2)^2 + (B_1 + \lambda B_2)^2 + (C_1 + \lambda C_2)^2 \neq 0,\ (\forall)\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Într-adevăr, în caz contrar am avea $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = -\lambda$, deci $\boldsymbol{N}_1 \parallel \boldsymbol{N}_2$ ($\boldsymbol{N}_1, \boldsymbol{N}_2$ normalele la plane), adică $\pi_1 \parallel \pi_2$, contradicție cu ipoteza făcută. Rezultă ecuația unui plan; deoarece coordonatele oricărui punct al dreptei D verifică ecuația lui, acest plan trece prin dreapta D.

Reciproc, fie π un plan care trece prin D; alegem în planul π un punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \notin D$ și determinăm $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ cu condiția $(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) + \lambda_0(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0$, adică planul $(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_0(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ trece prin D și prin M_0 și atunci coincide cu planul π. În concluzie, planul are o ecuație de forma indicată în propoziție.

Cu condițiile $\lambda = \infty$, $\frac{1}{\lambda} = 0$ raționamentul rămîne valabil și în cazul $\pi = \pi_2$.

Mulțimea planelor care trec printr-o dreaptă dată se numește **fascicol de plane** și ecuația din propoziția anterioară se numește ecuația fascicolului de plane.

Să calculăm acum **distanța de la un punct** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **la un plan** $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$. Scriem ecuațiile normalei la plan care trece prin $M_0 : \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} = t$. Dacă P este intersecția acestei normale cu planul π (P este proiecția lui M_0 pe planul π) atunci coordonatele lui P rezultă $x = x_0 + tA$, $y = y_0 + tB$, $z = z_0 + tC$, unde $t = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$. Se obține:

$$d(M_0, \pi) = d(M_0, P) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Fie D_1, D_2 două drepte de vectori directori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \neq \boldsymbol{0}$. Atunci **unghiul** θ al **celor două drepte** se calculează astfel:

$$\theta = \frac{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2}{v_1 \cdot v_2}.$$

Fie D o dreaptă de vector director $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ şi π un plan cu normala $\boldsymbol{N} \neq \mathbf{0}$.

Dacă dreapta D este paralelă cu planul π (sau conţinută în planul π) unghiul dintre D şi π este zero. În cazul general unghiul θ dintre D şi π este unghiul dintre D şi proiecţia ei pe planul π. Avem evident $\sin\theta = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{N}}{v\cdot N}$.

2.7. Roto - translaţii în plan şi în spaţiu

Vom studia acum **schimbarea coordonatelor unui punct cînd schimbăm reperul ortogonal**. Fie Oxy, $O'x'y'$ două repere ortogonale în plan şi presupunem că bazele $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$, $\{\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}'\}$ sînt la fel orientate (matricea de trecere are determinant pozitiv). Fie (a, b) coordonatele lui O' faţă de reperul Oxy şi fie $\theta \in [0, 2\pi)$ unghiul dintre semiaxele Ox, Ox' măsurat în sens trigonometric direct. Cu aceste elemente date, reperul $O'x'y'$ este complet determinat (figura I.21).

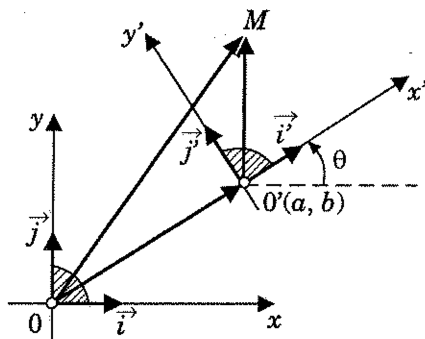


Figura I.21.

Fie M un punct oarecare din plan cu coordonatele (x, y) în reperul Oxy şi cu coordonatele (x', y') în reperul $O'x'y'$. Avem: $\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'M}$, deci

$$x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}'.$$

Înmulţim relaţia de mai sus scalar, cu $\boldsymbol{i}$, respectiv $\boldsymbol{j}$ şi obţinem:

$$\begin{cases} x = a + x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = b + x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}.$$

Putem defini o funcţie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x', y') = (x, y)$ (cu formulele de mai sus), care poate fi privită ca o compunere $f = t \circ r$, unde $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $t(x'', y'') = (x, y)$, $x = a + x''$, $y = b + y''$ este o **translaţie** şi $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $r(x', y') = (x'', y'')$, unde $x'' = x'\cos\theta - y'\sin\theta$, $y'' = x'\sin\theta + y'\cos\theta$, este o **rotaţie de unghi** θ. Se observă că rotaţia este o aplicaţie liniară : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, a cărei matrice asociată în bazele canonice este $M_r = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Aplicaţia $f = t \circ r$ se mai numeşte **roto-translaţie.**

Fie acum $Oxyz$, $O'x'y'z'$ două repere ortogonale în spaţiu la fel orientate, (a, b, c) coordonatele lui O' faţă de $Oxyz$ şi fie tabelul de cosinuşi directori care precizează poziţia axelor $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ faţă de axele Ox, Oy, Oz:

	i'	j'	k'
i	a_{11}	a_{12}	a_{13}
j	a_{21}	a_{22}	a_{23}
k	a_{31}	a_{32}	a_{33}

;

$a_{11} = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}' = \cos(\widehat{Ox, O'x'})$, $a_{12} = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}' = \cos(\widehat{Ox, O'y'})$, etc. ... (în tabel suma pătratelor elementelor de pe fiecare linie sau coloană este 1, iar produsul scalar al oricăror două linii sau coloane este 0, deci din 12 parametri rămîn 6 parametri ce precizează poziția lui $O'x'y'z'$ față de $Oxyz$). Fie M un punct oarecare în spațiu, cu două seturi de coordonate (x, y, z); (x', y', z').

Avem: $\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'M}$ sau $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k} + x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}'$ (figura I. 22). Înmulțim scalar relația succesiv cu $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ și obținem:

$$(*) : \begin{cases} x = a + a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' \\ y = b + a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' \\ z = c + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' \end{cases}.$$

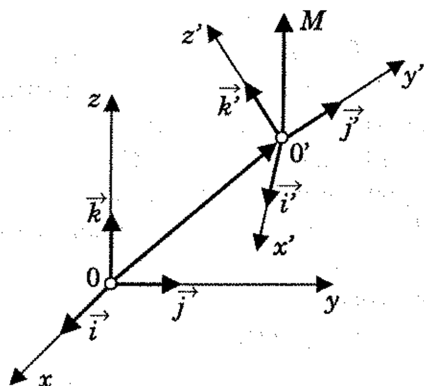


Figura I.22.

Notînd $x'' = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z'$, $y'' = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z'$, $z'' = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'$ putem defini $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x', y', z') = (x, y, z)$, care este o compunere $f = t \circ r$, unde $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $t(x'', y'', z'') = (x, y, z)$ este o **translație** și $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $r(x', y', z') = (x'', y'', z'')$ este o **rotație în spațiu**; rotația este o aplicație liniară a cărei matrice asociată în bazele canonice este

$$M_r = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Este evident că $M_r \cdot M_r^T = I_3$ deci matricea M_r este nesingulară și $M_r^{-1} = M_r^T$ (astfel de matrice se numesc **ortogonale**). Notînd $X_0 = (a, b, c)^T$, $X = (x, y, z)^T$, $X' = (x', y', z')^T$, relațiile (*) se scriu matriceal $X = X_0 + M_r \cdot X'$ și inversînd, $X' = M_r^T \cdot (X - X_0)$.

Unghiurile lui L. EULER (1707–1783). Fie $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, asociată cu reperul ortogonal $Oxyz$. Considerăm mai întîi o rotație în planul zOx (în jurul lui Oy), cu unghiul ψ. Trecerea de la reperul $\mathscr{B} = Oxyz$ la reperul $\mathscr{B}' = \{f_1, f_2, f_3\} = Ox'y'z'$ se face după formulele de

$O_{xyz} \xrightarrow[Oy]{\psi} O_{x'yz'} \xrightarrow[Oz']{\theta} O_{x_1y'z'} \xrightarrow[Ox_1]{\gamma} O_{x_1y_1z_1}$; Fig I.23 este conformă cu aceste

rotație $f_1 = e_1\cos\psi + e_3\sin\psi$, $f_2 = e_2$, $f_3 = e_1\sin\psi - e_3\cos\psi$; notăm cu T_1 matricea de trecere respectivă. Se face apoi o rotație de unghi θ în jurul axei Oz', obținîndu-se reperul $\mathscr{B}'' = \{g_1, g_2, g_3\} = Ox_1y'z'$ (cu matricea de trecere T_2) și în fine o rotație în jurul axei Ox_1 cu unghiul γ, trecînd (cu matricea T_3) la sitemul de coordonate $Ox_1y_1z_1$ identificat cu baza $\mathscr{B}^* = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ a lui $\mathbb{R}^3$ (figura I. 23). Avem:

$$T_1 = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

și compunerea celor trei schimbări de reper (adică trecerea de la $\mathscr{B}$ la $\mathscr{B}^*$) corespunde produsului matricelor de trecere deci matricea de trecere de la $\mathscr{B}$ la $\mathscr{B}^*$ va fi o matrice ortogonală, anume $T = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3$. Unghiurile ψ, θ, γ se mai numesc **unghiurile lui Euler**. Matricea-coloană a coordonatelor unui punct $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$ în baza $\mathscr{B}^*$ este $T^{-1}(x_1\, x_2\, x_3)^T = T^T(x_1\, x_2\, x_3)^T$.

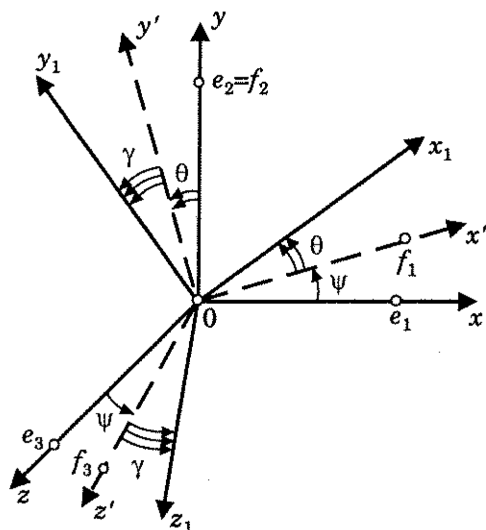


Figura I.23.

2.8. Cîteva elemente de geometrie n–dimensională clasică

Fixăm un întreg $n \geq 1$. Numim **puncte** elementele lui $\mathbb{R}^n$. **Distanța euclidiană între două puncte** $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ este definită prin $d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2}$. Pe mulțimea $\mathbb{R}^n$ se poate considera structura de spațiu vectorial definită în 2.1; cu această structură, $\mathbb{R}^n$ se mai notează uneori cu $\mathbb{V}_n$. Elementele lui $\mathbb{V}_n$ se vor numi **vectori** *n*–**dimensionali**; un vector $v \in \mathbb{V}_n$ este de forma $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ cu $v_1, \ldots, v_n$ numere reale. Doi vectori nenuli $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ din $\mathbb{V}_n$ se numesc **coliniari** dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca $\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{w}$. Remarcăm că dacă $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ este baza canonică a lui $\mathbb{V}_n = \mathbb{R}^n$, atunci aplicația $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{V}_n$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \to x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$ este bijectivă (bijecția lui Descartes).

Pentru orice două puncte $x, y \in \mathbb{R}^n$ se defineşte vectorul $\boldsymbol{xy} = (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$. De aceea, dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$ şi $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_n$, se va scrie $y = x + \boldsymbol{v}$ în loc de $\boldsymbol{xy} = \boldsymbol{v}$. Se observă că $\boldsymbol{Ox} = \theta(x)$ este **vectorul de poziție** al punctului x. Deoarece θ este bijectivă, punctul x poate fi identificat cu vectorul lui de poziție $\boldsymbol{Ox}$.

Produsul scalar euclidian a doi vectori $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{V}_n$ este prin definiție scalarul $<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}> = \sum_{k=1}^{n} v_k w_k$, unde $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$. Aşadar asimilînd aceşti vectori cu matrice $1 \times n$, rezultă $<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}> = v \cdot w^T$. Dacă $<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}> = 0$, se spune că vectorii $\boldsymbol{v}$ şi $\boldsymbol{w}$ sînt **ortogonali**.

Lungimea unui vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_n$ este prin definiție $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}>} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} v_k^2}$; distanța euclidiană între două puncte $x, y \in \mathbb{R}^n$ este deci $d(x, y) = \|\boldsymbol{xy}\|$. Dacă $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{V}_n$ sînt doi vectori nenuli, atunci unghiul lor este acel unic număr $\theta \in [0, \pi]$ astfel încît $\cos\theta = \dfrac{<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}>}{\|\boldsymbol{v}\| \cdot \|\boldsymbol{w}\|}$.

Fie $\boldsymbol{N} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un vector nenul din $\mathbb{V}_n$. Se numeşte **hiperplan** trecînd prin punctul $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ şi avînd $\boldsymbol{N}$ ca vector normal mulțimea $\{x \in \mathbb{R}^n | < \mathbf{N}, \mathbf{ax} > = 0\} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} A_i(x_i - a_i) = 0\}$. Pentru orice hiperplan H există o aplicație liniară $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi un număr real α astfel încît $H = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = \alpha\}$. Mulțimile de forma $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \alpha\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \geq \alpha\}$ etc. se numesc **semispații** în $\mathbb{R}^n$.

Dacă $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ este un punct şi $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{V}_n$ este un vector nenul, atunci **dreapta multidimensională** trecînd prin a şi coliniară cu $\boldsymbol{v}$ este $D = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbf{ax} \| \mathbf{v}\} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, \frac{x_1 - a_1}{v_1} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{v_n}\}$.

Un concept mai general este cel de **varietate liniară de dimensiune** k în $\mathbb{R}^n$ $(1 \leq k \leq n-1)$ trecînd prin punctul $a \in \mathbb{R}^n$, ca fiind o mulțime de forma $L = a + T = \{a + x | x \in T\}$ unde T este un subspațiu vectorial al lui $\mathbb{V}_n$ de dimensiune k. Se poate arăta că orice varietate liniară de dimensiune k în $\mathbb{R}^n$ este intersecția a $n - k$ hiperplane.

Dacă $a, b \in \mathbb{R}^n$, **segmentul închis** de capete a, b este mulțimea $[a,b] = \{(1-t)a + tb \,|\, 0 \leq t \leq 1\}$; o submulțime $C \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte **convexă** dacă $(\forall)\ a, b \in C$, avem $[a, b] \subset C$. Hiperplanele, semispațiile, varietățile liniare sînt exemple de mulțimi convexe.

O problemă importantă, care necesită cunoştinţe de geometrie multidimensională, este **problema programării liniare**: fiind dată o aplicaţie liniară $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (numită **funcţie-scop**) şi un sistem de inecuaţii liniare de forma $a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \,\mathcal{R}\, b_1, \ldots, a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n \,\mathcal{R}\, b_k$, **numite restricţii liniare** ($\mathcal{R}$ fiind unul din semnele $\leq$, $=$, $\geq$), trebuie găsite punctele de maxim sau minim ale lui f, cu aceste restricţii. În bibliotecile de programe există algoritmi de rezolvare a unor astfel de probleme (de exemplu algoritmul simplex).

§ 3. Valori şi vectori proprii; forme canonice ale matricelor

3.1. Polinom caracteristic, polinom minimal

Fie K un corp comutativ (de exemplu, $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$). Se numeşte **matrice** de tip $m, n \geq 1$, cu coeficienţii în $K[X]$, orice funcţie $A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to K[X]$. Notînd $A(i, j) = a_{ij} \in K[X]$, vom scrie ca de obicei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Notăm cu $M_{m,n}(K[X])$ mulţimea matricelor de tipul (m, n) cu coeficienţii în $K[X]$. Se verifică imediat că $M_{m,n}(K[X])$ are structură de spaţiu vectorial peste K şi că avem operaţia algebrică externă de înmulţire a matricelor cu polinoame, avînd aceleaşi proprietăţi ca şi înmulţirea cu scalari din K. Se verifică de asemenea uşor că $M_n(K[X])$ are structură de inel necomutativ cu unitate.

DEFINIŢIA 3.1. Fie $A \in M_n(K)$, $n \geq 1$, o matrice dată şi îi asociem matricea $C = A - X \cdot I_n \in M_n(K[X])$. Polinomul $P_A(X) = \det C = \det(A - XI_n)$ din $K[X]$ se numeşte **polinomul caracteristic al matricei** A.

EXEMPLE. 1) Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Atunci $P_A(X) = \begin{vmatrix} 1 - X & 2 \\ 2 & 4 - X \end{vmatrix} = X^2 - 5X$ şi $P_B(X) = -(X-1)(X-2)(X-3)$.

2) Dacă $A \in M_n(K)$ este o matrice diagonală, $A = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, atunci $P_A(X) = (-1)^n(X - d_1)\ldots(X - d_n)$; astfel, $P_{O_n}(X) = (-1)^n X^n$ şi $P_{I_n}(X) = (-1)^n \cdot (X-1)^n$; mai general, dacă $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$ este o matrice triunghiulară inferior (deci $c_{ij} = 0$ pentru $i < j$), atunci

$P_C(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (X - c_{ii})$. Acelaşi lucru are loc pentru matrice triunghiulare superior.

3) Pentru orice matrice $A \in M_n(K)$ avem $P_A(X) = \det(A - XI_n)$, deci $P_A(0) = \det A$. Aşadar, A este singulară dacă şi numai dacă 0 este o rădăcină a polinomului $P_A(X)$.

PROPOZIȚIA 3.1. Fie $A \in M_n(K)$ şi $P_A(X) \in K[X]$ polinomul său caracteristic. Atunci:

a) grad $P_A(X) = n$ **şi** $P_{A^T}(X) = P_A(X)$.

b) Dacă $P_A(X) = \alpha_0 X^n + \alpha_1 X^{n-1} + \ldots + \alpha_n$, **avem** $\alpha_0 = (-1)^n$, $\alpha_1 = (-1)^{n-1}\operatorname{Tr}(A)$ [$\operatorname{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ **este urma matricei** A] **şi** $\alpha_n = \det A$.

DEMONSTRAȚIE. a) Evident, gradul lui P_A este n. Apoi

$$A^T - XI_n = (A - XI_n)^T \text{ şi ca atare}$$

$$P_{A^T}(X) = \det(A^T - XI_n) = \det(A - XI_n) = P_A(X).$$

b) $P_A(X) = \det(A - XI_n) = (a_{11} - X)(a_{22} - X)\ldots(a_{nn} - X) +$ (polinoame de grad $\leq n-2$) $= (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})X^{n-1} + \ldots + \alpha_n$ deci $\alpha_0 = (-1)^n$, $\alpha_1 = (-1)^{n-1}\operatorname{Tr}(A)$. Apoi $\alpha_n = \tilde{P}_A(0) = \det(A - 0 \cdot I_n) = \det A$.

DEFINIȚIA 3.2. Fie $Q(X) \in K[X]$, un polinom oarecare, $Q(X) = q_0 X^m + q_1 X^{m-1} + \ldots + q_m$. Pentru orice $A \in M_n(K)$ se numeşte **polinom de matricea A definit de Q** matricea $q_0 A^m + A^{m-1} + \ldots + q_m I_n \in M_n(K)$ care se mai notează cu $Q(A)$. Dacă $Q(A) = 0$ se spune că polinomul Q este **anulator** al lui A.

TEOREMA 3.2. (Hamilton-Cayley). Fie $A \in M_n(K)$ şi $P_A(X)$ polinomul său caracteristic. Atunci $P_A(A) = 0$ în $M_n(K)$. (Cu alte cuvinte, polinomul caracteristic al unei matrice pătratice este un polinom anulator al acesteia).

DEMONSTRAȚIE. Fie

$$P_A(X) = \det C = \det(A - XI_n) = \alpha_0 X^n + \alpha_1 X^{n-1} + \ldots + \alpha_n.$$

Matricea adjunctă a lui $C = A - XI_n$, $\tilde{C} \in M_n(K[X])$, are forma $\tilde{C} = (C_{ij})$, unde C_{ij} este complementul algebric al lui c_{ji} şi are forma $C_{ij} = d_{ij}^{(0)} X^{n-1} + d_{ij}^{(1)} X^{n-2} + \ldots + d_{ij}^{(n-1)}$, deci grad $C_{ij} \leq n-1$. Atunci putem scrie $\tilde{C} = X^{n-1} \cdot D^{(0)} + X^{n-2} \cdot D^{(1)} + \ldots + D^{(n-1)}$, unde $D^{(k)} = (d_{ij}{}^{(k)}) \in M_n(K)$.

Acelaşi raționament ca la teorema 1.2 arată că şi în inelul $M_n(K[X])$ are loc relația: $C \cdot \tilde{C} = (\det C) I_n$, adică $(A - XI_n)(X^{n-1}D^{(0)} + X^{n-2}D^{(1)} + \ldots + D^{(n-1)}) = (\alpha_0 X^n + \alpha_1 X^{n-1} + \ldots + \alpha_n) I_n$.

Din proprietățile egalității matricelor și polinoamelor, identificînd coeficienții lui X^n, X^{n-1},..., X^1, X^0, obținem relațiile matriceale:

$$\begin{array}{rcrcl} & - & D^{(0)} & = & \alpha_0 I_n \\ AD^{(0)} & - & D^{(1)} & = & \alpha_1 I_n \\ AD^{(1)} & - & D^{(2)} & = & \alpha_2 I_n \\ . & . & . & . & . \\ AD^{(n-2)} & - & D^{(n-1)} & = & \alpha_{n-1} I_n \\ AD^{(n-1)} & & & = & \alpha_n I_n \end{array}$$

Înmulțind la stînga prima relație cu A^n, pe a doua cu A^{n-1}, ..., pe ultima cu $A^0 = I_n$ și adunînd, obținem:

$$0 = \alpha_0 A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + a_n I_n = P_A(A).$$

OBSERVAȚIE. Iată și o pseudodemonstrație: deoarece $P_A(X) = \det(A - XI_n)$, "rezultă" $P_A(A) = \det(A - A \cdot I_n) = \det 0 = 0(!)$.

COROLARUL 1. Fie $A \in M_n(K)$, **atunci** $(\forall)\ k \in \mathbb{N}$, $A^k = \beta_0 A^{n-1} + \beta_1 A^{n-2} + \ldots + \beta_{n-1} I_n$, **unde** $\beta_i \in K$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

DEMONSTRAȚIE. Utilizăm inducția după k; pentru $k = 0, 1, \ldots, n-1$, avem $A^k = 1 \cdot A^k$. Pentru $k = n$ folosim teorema Hamilton-Cayley:

$$(-1)^n A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_n I_n = 0, \text{ deci}$$

$A^n = (-1)^{n-1} \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} \alpha_n I_n$, adică A^n aparține subspațiului vectorial al lui $M_n(K)$ generat de $\{I_n, A, ..., A^{n-1}\}$. Presupunem că $A^k = \beta_0 A^{n-1} + \ldots + \beta_{n-1} I_n$ pentru $k \geq n$ și atunci $A^{k+1} = A{\cdot}A^k = \beta_0 A^n +$ $+ \beta_1 A^{n-1} + \ldots + \beta_{n-1} A = \beta_0 ((-1)^{n-1} \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} \alpha_n I_n) + \beta_1 A^{n-1} + \ldots +$ $+ \beta_{n-1} A = (\beta_0 (-1)^{n-1} \alpha_1 + \beta_1) A^{n-1} + \ldots + (\beta_0 (-1)^{n-1} \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}) A + \beta_0 (-1)^{n-1} \alpha_n I_n$ deci A^{k+1} aparține subspațiului generat de $\{I_n, A, ..., A^{n-1}\}$.

Reținem deci că toate puterile naturale ale matricei A sînt combinații liniare ale matricelor $I_n, A, ..., A^{n-1}$, unde n este ordinul lui A.

COROLARUL 2. Fie $A \in M_n(K)$, $\det A \neq 0$; **atunci** $A^{-1} = \beta_0 A^{n-1} + \beta_1 A^{n-2} + \ldots + \beta_{n-1} I_n$, **unde** $\beta_i \in K$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

DEMONSTRAȚIE. Din teorema Hamilton-Cayley avem: $(-1)^n A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_n I_n = 0$, cu $\alpha_n = \det A \neq 0$. Înmulțim relația de mai sus cu A^{-1}, obținem $A^{-1} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\alpha_n} A^{n-1} - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_n} A^{n-2} - \ldots - \dfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} I_n$ și notăm

$$\beta_0 = \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha_n}, \beta_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}, \ldots, \beta_{n-1} = -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \in K.$$

PROPOZIȚIA 3.3. Fie $A \in M_n(K)$ **fixată şi** $I \subset K[X]$, $I = \{Q \in K[X] \mid Q(A) = 0\}$. **Atunci** I **este un ideal nenul în inelul** $K[X]$ **(idealul polinoamelor anulatoare pentru** A**).**

DEMONSTRAȚIE. Din teorema Hamilton–Cayley avem $P_A(A) = 0$, deci $P_A \in I$ şi atunci $I \neq \{0\}$ (grad $P = n$).

Fie $Q_1, Q_2 \in I$; atunci $Q_1(A) = 0$ şi $Q_2(A) = 0$, deci $(Q_1 - Q_2)(A) = Q_1(A) - Q_2(A) = 0$, deci $Q_1 - Q_2 \in I$. Apoi $(\forall)$ $Q \in I$ şi $\forall R \in K[X]$ avem: $(RQ)(A) = R(A) \cdot Q(A) = R(A) \cdot 0 = 0$, deci $RQ \in I$. Rezultă că I este ideal în $K[X]$. De altfel, aplicația $\varphi : K[X] \to M_n(K)$, $Q \to Q(A)$, este un morfism de inele şi $I = \operatorname{Ker} \varphi$.

OBSERVAȚIE. Deoarece $K[X]$ este inel cu ideale principale (teorema 1.3), idealul I al polinoamelor anulatoare pentru A este generat de un polinom, de grad minim printre polinoamele din I. Acesta este chiar unic dacă este monic (deci coeficientul termenului său de grad maxim este egal cu 1).

DEFINIȚIA 3.3. Unicul polinom $M \in K[X]$ cu proprietățile:

1) $M(A) = 0$;

2) dacă $Q \in K[X]$ şi $Q(A) = 0$, atunci $M \mid Q$ (M divide Q);

3) coeficientul termenului de grad maxim al lui M este 1;

se numeşte **polinomul minimal al matricei** A.

COROLAR. Polinomul minimal al matricei A **divide polinomul caracteristic al matricei** A**.**

DEMONSTRAȚIE. Într-adevăr, $P_A(A) = 0$ deci $M \mid P_A$.

LEMA 3.4. Fie $A \in M_n(K)$, $x \in M_{n,1}(K)$ **şi** $\lambda \in K$, **astfel încît** $Ax = \lambda x$. **Atunci** $(\forall)$ $k \geq 1$, $A^k x = \lambda^k x$ **şi mai general** $Q(A)x = Q(\lambda)x$, **pentru orice polinom** $Q \in K[X]$.

DEMONSTRAȚIE. Din ipoteza că $Ax = \lambda x$ obținem $A^2 x = \lambda A x = \lambda^2 x$; prin inducție presupunînd că $A^k x = \lambda^k x$, rezultă $A^{k+1} x = \lambda^k A x = \lambda^{k+1} x$.

Fie acum $Q = \beta_0 X^s + \beta_1 X^{s-1} + \ldots + \beta_s \in K[X]$. Atunci $Q(A)x = \beta_0 A^s x + \beta_1 A^{s-1} x + \ldots + \beta_s I_n x = (\beta_0 \lambda^s + \beta_1 \lambda^{s-1} + \ldots + \beta_s)x = Q(\lambda)x$.

PROPOZIȚIA 3.5. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$; **polinomul minimal şi polinomul caracteristic au aceleaşi rădăcini (diferă eventual multiplicitățile).**

DEMONSTRAȚIE. Deoarece $M \mid P_A$ rezultă că orice rădăcină a lui M este rădăcină a lui P_A. Reciproc, fie $\lambda \in \mathbb{C}$ astfel încît $P_A(\lambda) = 0$; rezultă că $\det(A - \lambda I_n) = 0$, deci sistemul liniar $(A - \lambda I_n)x = 0$ admite soluții nenule şi fie $x \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, $x \neq 0$, o soluție a sistemului. Atunci avem $Ax = \lambda x$. Din lema 3.4 obținem că $M(A) \cdot x = M(\lambda)x$; dar $M(A) = 0$; deci $M(\lambda)x = 0$, de unde $M(\lambda) = 0$, deoarece $x \neq 0$ în spațiul vectorial $M_{n,1}(\mathbb{C})$.

OBSERVAȚIE. Fie $A \in M_n(K)$ unde $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Dăm o metodă efectivă pentru calculul polinomului minimal al lui A. Fie $B = (A - X \cdot I_n)^{\sim}$ şi $b(X)$ cel

mai mare divizor comun al tuturor elementelor lui B. Atunci $P_A(X)$ este divizibil cu polinomul $b(X)$ şi în plus, $M_A(X) = (-1)^n \cdot \frac{P_A(X)}{b(X)}$.

[Într-adevăr, avem $B = b(X)\cdot C$, cel mai mare divizor comun al elementelor matricei C fiind 1. Din relaţia $(A - XI_n)\cdot B = P_A(X)\cdot I_n$ rezultă $(A - XI_n)\cdot b(X)\cdot C = P_A(X)\cdot I_n$, deci P_A este divizibil cu $b(X)$. Fie $b_1(X) = \frac{P_A(X)}{b(X)}$, deci $(A - XI_n)\cdot C = b_1(X)\cdot I_n$ şi raţionînd ca în demonstraţia teoremei 3.2, rezultă $b_1(A) = 0$ deci $M_A \mid b_1$. Pe de altă parte, se observă că pentru orice inel R şi $(\forall)\, a \in R$, $u(X) \in R[X]$ avem $u(X) = u(a) + v(X)\cdot(X - a)$ cu $v(X) \in R[X]$; aplicînd acest fapt pentru inelul $R = M_n(K)$, $a = A$ şi $u(X) = M_A(X)I_n$, rezultă că există o matrice $Q \in M_n(K[X])$ astfel ca $M_A(X)\cdot I_n = Q(X)\cdot(X\cdot I_n - A)$. Înmulţind la dreapta cu C, rezultă $M_A(X)\cdot C = Q(X)\cdot(XI_n - A)\cdot C = -b_1(X)\cdot Q(X)$. Deoarece c.m.m.d.c. al elementelor matricei $M_A(X)\cdot C$ este $M_A(X)$, va rezulta că $b_1 \mid M_A$. Aşadar, $M_A = \pm b_1$ şi $P_A(X) = b(X)\cdot b_1(X) = \pm b(X)\cdot M_A(X)$. Deoarece b, M_A sînt monice, semnul este $(-1)^n$ şi ca atare, $M_A(X) = (-1)^n\cdot P_A(X)/b(X)$].

3.2. Valori proprii şi vectori proprii

Fie K un corp comutativ (de obicei $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) şi V un spaţiu vectorial peste K. Fie $f: V \to V$ un operator liniar (endomorfism) al lui V.

DEFINIŢIA 3.4. Un scalar $\lambda \in K$ se numeşte **valoare proprie** a lui f dacă operatorul liniar $g = f - \lambda\cdot 1_V$ (deci $g(x) = f(x) - \lambda x$, $(\forall)\, x \in V$) nu este un izomorfism. Mulţimea $\sigma(f) \subset K$ a tuturor valorilor proprii ale lui f se numeşte **spectrul lui** f. Dacă $\lambda \in \sigma(f)$, atunci subspaţiul $V_\lambda = \operatorname{Ker} g$ al lui V se numeşte **subspaţiul propriu** corespunzător valorii proprii λ, iar vectorii nenuli din V_λ se numesc **vectori proprii ai lui** f**, corespunzînd valorii proprii** λ.

EXEMPLE. 1) Să considerăm operatorul liniar $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (x, x + 2y)$. În acest caz $g(x, y) = (x, x + 2y) - \lambda(x, y) = ((1 - \lambda)x, x + (2 - \lambda)y)$. Condiţia necesară şi suficientă ca g să nu fie izomorfism este ca matricea asociată lui g în baza canonică a lui $\mathbb{R}^2$ să fie singulară. Valorile lui λ pentru care are loc acest fapt sînt $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ deci $\sigma(f) = \{1, 2\}$. Pentru $\lambda_1 = 1$ avem $V_{\lambda_1} = \operatorname{Ker} g = \{(u, -u) \mid u \in \mathbb{R}\}$ şi pentru $\lambda_2 = 2$, $V_{\lambda_2} = \{(0, u) \mid u \in \mathbb{R}\}$. Vectorii proprii corespunzînd valorii proprii $\lambda = 2$ sînt $(0, u)$ cu $u \neq 0$.

2) Fie operatorul (liniar) $f: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \to XP$. Se observă că pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, operatorul $g: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $g(P) = f(P) - \lambda P = (X - \lambda)P$ nu este izomorfism (căci nu este surjectiv) deci $\sigma(f) = \mathbb{R}$. În mod similar, pentru operatorul de derivare $D: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \to P'$, valorile proprii sînt acei

scalari $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care operatorul $g : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $g(P) = P' - \lambda P$ nu este izomorfism. Aceasta se întîmplă doar pentru $\lambda = 0$ deci $\sigma(f) = \{0\}$.

În cele ce urmează, vom presupune că V este finit dimensional, cazul cel mai frecvent în aplicații. În cadrul teoriei spectrale a operatorilor este studiat cazul general, incluzînd spațiile infinit dimensionale şi avînd în vedere aplicații serioase in fizica cuantică. În țara noastră există o puternică şcoală matematică de teoria operatorilor, avînd contribuții recunoscute pe plan mondial.

Presupunem deci că $\dim_K V < \infty$. În acest caz, un operator liniar $g : V \to V$ este izomorfism dacă şi numai dacă g este injectiv (într-adevăr, dacă aplicația g este injectivă, atunci g este surjectivă, deci izomorfism, conform corolarului 2 al teoremei 2.15). Aplicînd acest fapt, rezultă că un scalar $\lambda \in K$ este valoare proprie pentru un operator $f : V \to V$ dacă şi numai dacă $\mathrm{Ker}(f - \lambda 1_V) \neq \{0\}$, adică există un element nenul $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda 1_V)$.

Reținem deci că un scalar $\lambda \in K$ este valoare proprie pentru un operator $f : V \to V \leftrightarrow$ există un vector $x \in V$ astfel încît

1) $x \neq 0$;
2) $f(x) = \lambda x$.

Un vector $x \in V$ este vector propriu pentru $f \leftrightarrow x$ este nenul şi există $\lambda \in K$ astfel încît $f(x) = \lambda x$.

Vectorii proprii din K^n se asimilază adeseori cu matrice-coloană din $M_{n,1}(K)$. Vom vedea că în cazul cînd $K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$, valorile proprii se determină în $\mathbb{C}$.

DEFINIȚIA 3.5. Fie $W \hookrightarrow V$ un subspațiu vectorial şi $f : V \to V$ un operator liniar. Subspațiul W se numeşte f–**invariant** dacă $f(W) \subset W$, adică $(\forall)\ x \in W$, $f(x) \in W$.

OBSERVAȚIE. Dacă W este un subspațiu f–invariant al lui V, atunci restricția $f \mid W$ poate fi considerată ca un operator al lui W, $f \mid W : W \to W$.

PROPOZIȚIA 3.6. Fie $f : V \to V$ un operator liniar.

a) Pentru orice $\lambda \in \sigma(f)$, V_λ este un subspațiu f–invariant al lui V.

b) Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \sigma(f)$ sînt valori proprii distincte două cîte două, atunci suma $W = V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \ldots + V_{\lambda_p}$ este directă.

DEMONSTRAȚIE. a) Fie $x \in V_\lambda$ deci $(f - \lambda 1_V)(x) = 0$, adică $f(x) = \lambda x$. Deoarece $\lambda x \in V_\lambda$, rezultă că $f(x) \in V_\lambda$, deci V_λ este f–invariant.

b) Procedăm prin inducție după p. Pentru $p = 2$, folosind propoziția 2.6, pentru a arăta că $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2}$ este sumă directă este suficient să arătăm că $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = 0$. Fie $(\forall)\ x \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$; atunci $f(x) = \lambda_1 x$ şi $f(x) = \lambda_2 x$, deci $\lambda_1 x = \lambda_2 x$, de unde $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$. Dar $\lambda_1 \neq \lambda_2$ implică $x = 0$, deci $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = 0$ şi suma $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2}$ este directă. Presupunem afirmația adevărată pentru

$p-1 \geq 2$ şi fie $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in \sigma(f)$ valori proprii distincte. Fie

$$z = x_1 + x_2 +...+x_p = y_1 + y_2 +...+ y_p \in V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} +...+V_{\lambda_p}$$

cu $x_i, y_i \in V_{\lambda_i}$, $i = 1,...,p$.

Rezultă relaţia

$$f(x_1) +...+ f(x_p) = f(y_1) +...+ f(y_p),$$

adică

$$\lambda_1 x_1 +...+ \lambda_p x_p = \lambda_1 y_1 +...+ \lambda_p y_p,$$

deci

$$\lambda_1(x_1 - y_1) + \lambda_2(x_2 - y_2) +...+ \lambda_p(x_p - y_p) = 0.$$

Dar

$$x_p - y_p = -(x_1 - y_1) -...- (x_{p-1} - y_{p-1})$$

şi, înlocuind în relaţia anterioară, obţinem:

$$(\lambda_1 - \lambda_p)(x_1 - y_1) + (\lambda_2 - \lambda_p)(x_2 - y_2) +...+ (\lambda_{p-1} - \lambda_p)(x_{p-1} - y_{p-1}) = \underbrace{0+0+...+0}_{p-1 ori} = 0.$$

Din ipoteza de inducţie, $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} +...+ V_{\lambda_{p-1}}$ este sumă directă, deci obţinem relaţiile

$$(\lambda_i - \lambda_p)(x_i - y_i) = 0, i = 1,2,...,p-1 \text{ (scriere unică)}.$$

Deoarece $\lambda_i \neq \lambda_p$, $i = 1, 2,..., p-1$, rezultă $x_i = y_i, i = 1, 2, ..., p-1$, de unde şi $x_p = y_p$, deci scrierea este unică şi suma $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} +...+V_{\lambda_p}$ este directă.

LEMA 3.7. Fie $A, B \in M_n(K)$ **şi** $A \sim B$. **Atunci** $P_A = P_B$.

DEMONSTRAŢIE. Deoarece $A \sim B$ există $T \in M_n(K)$ nesingulară încît $B = T^{-1}AT$. Atunci putem scrie:

$$P_B(X) = \det(B - XI_n) = \det(T^{-1}AT - T^{-1}(XI_n)T) = \det(T^{-1}(A - XI_n)T) =$$
$$= \det T^{-1} \cdot \det(A - XI_n)\det T = \det(A - XI_n) = P_A(X).$$

Pe baza lemei 3.7 se poate da următoarea definiţie:

Fie V un spaţiu vectorial peste K, $\dim_K V = n$, $f: V \to V$ un endomorfism şi $\mathcal{B}$ o bază oarecare în V. Se numeşte polinom caracteristic al endomorfismului f polinomul caracteristic al matricei $M_f^{\mathcal{B}}$, notat P_f (acesta fiind independent de baza $\mathcal{B}$, aşa cum arată lema 3.7).

TEOREMA 3.8. În ipotezele anterioare, $\lambda \in \sigma(f)$ **dacă şi numai dacă** $P_f(\lambda) = 0$.

DEMONSTRAŢIE. Avem echivalenţele: $\lambda \in \sigma(f) \leftrightarrow f - \lambda \cdot 1_V$ nu este izomorfism $\leftrightarrow M_{f-\lambda 1_V}^{\mathcal{B}}$ este singulară $\leftrightarrow \det M_{f-\lambda 1_V}^{\mathcal{B}} = 0 \leftrightarrow \det(M_f^{\mathcal{B}} - \lambda I_n) = 0 \leftrightarrow$ $\leftrightarrow P_f(\lambda) = 0$ (am ţinut seamă de legătura între aplicaţii liniare şi matrice).

Aşadar, λ este o valoare proprie pentru f dacă şi numai dacă $P_f(X)$ este divizibil cu $X - \lambda$.

DEFINIŢIA 3.6 Fie $\lambda \in \sigma(f)$ şi $P_f(X) = (X - \lambda)^{n_\lambda} \cdot Q(X)$ cu $Q(\lambda) \neq 0$.

Numărul n_λ se numeşte **multiplicitatea algebrică** a valorii proprii λ.

Numărul $r_\lambda = \dim_K V_\lambda$ se numeşte **multiplicitatea geometrică** a valorii proprii λ.

PROPOZIȚIA 3.9. Pentru orice $\lambda \in \sigma(f)$ avem $r_\lambda \le n_\lambda$.

DEMONSTRAȚIE. Fie $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, ..., u_{r_\lambda}\}$ o bază în V_λ care, fiind sistem liniar independent în V, se poate completa la o bază $\mathcal{B} = \{u_1, ..., u_{r_\lambda}, v_{r_\lambda+1}, ..., v_n\}$ a lui V. Pentru $i = 1, ..., r_\lambda$ avem $f(u_i) = \lambda u_i$, deci matricea f în baza $\mathcal{B}$ are forma

$$M_f^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda & & & & & \\ & 0 & & 0 & & & \\ & & & \lambda & * & \cdots & * \\ & & & 0 & & & \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix},$$

unde cu semnul * au fost însemnate elementele necalculate ale matricei.

Avem $P_f(X) = P_{M_f^{\mathcal{B}}}(X) = (\lambda - X)^{r_\lambda} \cdot T(X)$ dar $P_f(X) = (X - \lambda)^{n_\lambda} \cdot Q(X)$ şi $Q(\lambda) \ne 0$, deci $r_\lambda \le n_\lambda$.

3.3. Proprietăți de calcul ale valorilor şi vectorilor proprii

Presupunem $K = \mathbb{C}$ şi fixăm o matrice pătratică $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$. Această matrice este asociată operatorului $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$,

$$x = (x_1, ..., x_n) \to x \cdot A^T = (a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n, ..., a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n).$$

Valorile proprii şi vectorii proprii pentru matricea A sînt prin definiție cele ale operatorului f. Aşadar, $\lambda \in \mathbb{C}$ este o valoare proprie pentru $A \leftrightarrow (\exists) x \ne 0$ astfel încît $f(x) = \lambda x \leftrightarrow (\exists)\, x \ne 0$ astfel încît $x \cdot A^T = \lambda x$ (notînd $X = x^T$) $\leftrightarrow X^T \cdot A^T = \lambda X^T \leftrightarrow$ există un vector coloană nenul X astfel încît $A \cdot X = \lambda X \leftrightarrow$ sistemul liniar şi omogen $(A - \lambda I_n) \cdot X = 0$ admite soluții nebanale $\leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$. Aşadar:

1. Un scalar $\lambda \in \mathbb{C}$ este valoare proprie pentru o matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ dacă şi numai dacă λ este rădăcină a ecuației caracteristice $\det(A - \lambda I_n) = 0$**, adică**

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

2. Dacă $P_A(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{n_1}\dots(X-\lambda_p)^{n_p}$ unde $\lambda_1,\dots,\lambda_p \in \mathbb{C}$ sînt distincte două cîte două şi dacă $n_1,\dots,n_p$ sînt întregi ≥ 1 cu $n_1+\dots+n_p = n$, atunci $\sigma(A) = \{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}$.

Numerele $n_k, 1 \leq k \leq p$, sînt multiplicităţile algebrice ale valorilor proprii λ_k; conform propoziţiei 3.9, $\dim V_{\lambda_k} \leq n_k$ pentru orice $1 \leq k \leq p$.

EXEMPLE. 1) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Valorile proprii sînt exact soluţiile ecuaţiei $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$ deci $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 = 5$. Vectorii proprii $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ corespunzînd lui λ_1 verifică $A \cdot X = 0$ deci $x_1 + 2x_2 = 0$, $2x_1 + 4x_2 = 0$, de unde $X = \begin{pmatrix} -2u \\ u \end{pmatrix}$, cu $u \neq 0$. În mod similar, vectorii proprii $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ corespunzînd lui λ_2 verifică relaţia $A \cdot Y = 5Y$ deci $y_1 + 2y_2 = 5y_1$, $2y_1 + 4y_2 = 5y_2$, de unde $y_2 = 2y_1$ şi $Y = \begin{pmatrix} v \\ 2v \end{pmatrix}$ cu $v \neq 0$.

2) Rotaţia în plan în jurul originii, de unghi θ, este definită prin matricea $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Valorile proprii ale matricei A sînt date de ecuaţia $\begin{vmatrix} \cos\theta-\lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta-\lambda \end{vmatrix} = 0$, adică $\lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0$, de unde $\sigma(A) = \{\cos\theta + i\sin\theta, \cos\theta - i\sin\theta\}$.

3) O matrice $A \in M_n(C)$ şi transpusa ei A au acelaşi polinom caracteristic deci au aceleaşi valori proprii (nu şi aceeaşi vectori proprii).

3. Suma valorilor proprii ale unei matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ este egală cu urma matricei A, iar produsul valorilor proprii este egal cu $\det A$. În particular, $0 \in \sigma(A) \leftrightarrow A$ este singulară.

Acest fapt rezultă din propoziţia 3.1 şi teorema 3.8.

4. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ şi $\lambda \in \sigma(A)$. Atunci $\lambda^k \in \sigma(A^k)$ pentru orice $k \geq 1$.

Într-adevăr, există $X \neq 0$ astfel încît $A \cdot X = \lambda X$. Prin inducţie după k se deduce imediat că $A^k \cdot X = \lambda^k \cdot X$ deci $\lambda^k \in \sigma(A^k)$, cu acelaşi vector propriu corespunzător X ca şi λ.

5. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ şi $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda = \alpha + i\beta$ o valoare proprie pentru A. Atunci există un subspaţiu A – invariant al lui $\mathbb{R}^n$ de dimensiune 2.

Fie $x \in \mathbb{C}^n$ un vector propriu pentru λ, $x = x' + ix''$ cu $x', x'' \in \mathbb{R}^n$, $x'' \neq 0$.

Atunci notînd $X = x^T$, rezultă $A \cdot X = \lambda X$ deci $A(X' + iX'') = (\alpha + i\beta)(X' + iX'')$, de unde $AX' = \alpha X' - \beta X''$, $AX'' = \beta X' + \alpha X$.

Subspațiul S al lui $\mathbb{R}^n$ generat de vectorii-coloană X', X'' este deci A – invariant şi în plus, X', X'' sînt liniar independenți peste $\mathbb{R}$ deci $\dim_R S = 2$.

Într-adevăr dacă $X' = mX''$ cu $m \in \mathbb{R}$, atunci $X = X' + iX'' = (m+i)X''$ şi din relația $AX = \lambda X$ deducem $(m+i)AX'' = (m+i)\lambda \cdot X''$ şi cum $m + i \neq 0$, rezultă $AX'' = \lambda X''$, deci λ ar rezulta real, ceea ce este absurd.

6. (Lema lui Gersgorin). Fie $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ o matrice din $M_n(\mathbb{C})$.

Pentru orice $1 \le i \le n$, se notează $r_i = \sum_{j=1;j\neq i}^{n} |a_{ij}|$ şi fie bila

$D_i = B(a_{ii}, r_i)$. Atunci are loc incluziunea $\sigma(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D_i}$.

Într-adevăr, fie $(\forall)\ \lambda \in \sigma(A)$, deci există un vector nenul $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ astfel

încît $A \cdot X = \lambda \cdot X$. Alegem $1 \le i \le n$ astfel ca $|x_i| = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$, deci $x_i \neq 0$. Ecuația i din sistemul liniar $A \cdot X = \lambda \cdot X$ este

$a_{i1}x_1 + \ldots + (a_{ii} - \lambda)x_i + \ldots + a_{in}x_n = 0$, deci $(a_{ii} - \lambda)x_i = -\sum_{j=1;j\neq i}^{n} a_{ij}x_j$. Atunci

$|a_{ii} - \lambda| \cdot |x_i| \le \sum_{j=1;\, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j|$, de unde $|a_{ii} - \lambda| \le \sum_{j=1;\, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \cdot \frac{|x_j|}{|x_i|}$. Deoarece

$\frac{|x_j|}{|x_i|} \le 1$ pentru orice $j \neq i$, rezultă $|a_{ii} - \lambda| \le r_i$ adică $\lambda \in B(a_{ii}, r_i)$ şi incluziunea cerută.

Exemplu. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 3+i & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$ în acest caz, $r_1 = |i| + |-1| = 2$; $r_2 = 1$ şi $r_3 = 3$ deci valorile proprii ale lui A sînt cuprinse în reuniunea închiderilor discurilor

$D_1 = B(1, 2)$;

$D_2 = B(3 + i, 1)$;

$D_3 = B(0, 3)$.

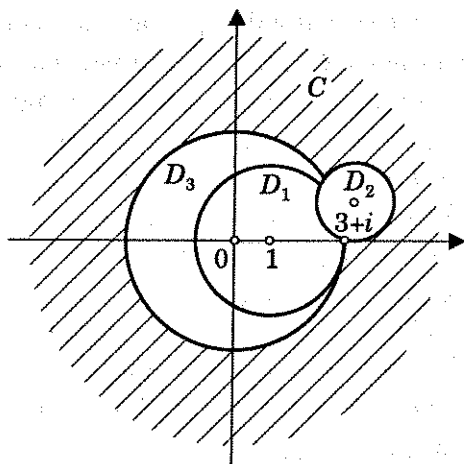


Figura I.24.

3.4. Diagonalizarea şi triangularizarea matricelor

Fie K un corp comutativ.

DEFINIŢIA 3.7. Fie $A \in M_n(K)$. Spunem că matricea A este **diagonalizabilă** dacă $A \sim D = \text{diag}(d_1, ..., d_n)$, adică există $T \in M_n(K)$ nesingulară astfel încît $T^{-1}AT = D$, D fiind o matrice diagonală.

Fie V un spaţiu vectorial peste K, $\dim_K V = n$ şi $f : V \to V$ un endomorfism.

Spunem că f este **diagonalizabil** dacă există o bază $\mathscr{B}$ în V astfel încît $M_f^{\mathscr{B}}$ să fie diagonală.

OBSERVAŢIE. Dacă A este diagonalizabilă, în matricea diagonală D apar chiar valorile proprii ale lui A (deoarece $P_A(X) = P_D(X)$); în particular, polinomul caracteristic al lui A se descompune în factori liniari peste K.

Într-adevăr, din $A \sim D$ rezultă

$$P_A(X) = P_D(X) = (d_1 - X)(d_2 - X)...(d_n - X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (X - d_i).$$

TEOREMA 3.10. **(criteriul de diagonalizare). Fie V un spaţiu vectorial peste K, $\dim_K V = n$, $f : V \to V$ un endomorfism pentru care polinomul caracteristic se descompune în factori liniari peste K, adică $P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{n_1} (X - \lambda_2)^{n_2} ... (X - \lambda_p)^{n_p} \in K[X]$, cu toţi $\lambda_i \in K$ unde $n_i \geq 1$ şi $n_1 + n_2 + ... + n_p = n$. Atunci sînt echivalente condiţiile următoare:**

a) f este diagonalizabil;

b) există o bază $\mathscr{B}$ în V formată numai cu vectori proprii ai lui f;

c) $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus ... \oplus V_{\lambda_p} = V$;

d) $\dim_K V_{\lambda_i} = n_i, (\forall) i = 1,2,...,p$.

DEMONSTRAŢIE. a) $\to$ b) Ştim că există o bază $\mathscr{B} = \{u_1, ..., u_n\}$ în V astfel încît

$$M_f^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix},$$

iar d_i sînt valori proprii (vezi observaţia anterioară). Atunci rezultă

$f(u_1) = d_1 u_1$, deci u_1 este vector propriu,

$f(u_2) = d_2 u_2$, deci u_2 este vector propriu,

. . . .

$f(u_n) = d_n u_n$, deci şi u_n este vector propriu,

adică $\mathscr{B}$ este o bază formată numai cu vectori proprii ai lui f.

b) → c) Evident $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus ... \oplus V_{\lambda_p} \subset V$. Reciproc, fie $v \in V$; atunci $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n$, cu $\alpha_i \in K$. Cum u_i sînt vectori proprii, grupînd termenii $\alpha_i u_i$ care aparțin aceluiași subspațiu V_{λ_k}, rezultă că $v \in V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus ... \oplus V_{\lambda_p}$ deci $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus ... \oplus V_{\lambda_p}$.

c) → d) Presupunem că ar exista $i (1 \le i \le p)$ astfel încît $\dim_k V_{\lambda_i} < n_i$. Din propoziția 3.9. avem inegalitățile:

$$\dim_K V_{\lambda_1} \le n_1, ..., \dim_K V_{\lambda_i} < n_i, ..., \dim_K V_{\lambda_p} \le n_p;$$

adunînd (vezi corolarul de la teorema 2.16), obținem

$$n = \dim_K V_{\lambda_1} + ... + \dim_K V_{\lambda_i} + ... + \dim_K V_{\lambda_p} < n_1 + ... + n_i + ... + n_p = n,$$

adică $n < n$, contradicție.

d) → a) Avem

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus ... \oplus V_{\lambda_p} \subset V$$

și $\dim_K (V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_p}) = \dim_K V_{\lambda_1} + ... + \dim_K V_{\lambda_p} = n_1 + ... + n_p = n$, deci $V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_p} = V$. Fie $\mathscr{B}_1$ bază în V_{λ_1}, $\mathscr{B}_2$ bază în V_{λ_2}, ..., $\mathscr{B}_p$ bază în V_{λ_p}. Deoarece $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = 0$ pentru $\lambda_i \ne \lambda_j$ (propoziția 3.6) rezultă că pentru $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 \cup ... \cup \mathscr{B}_p$ avem card $(\mathscr{B}) = n_1 + n_2 + ... + n_p = n$. Vom arăta că $\mathscr{B}$ este sistem de generatori în V: $(\forall)\, v \in V$, $v = v_1 + v_2 + ... + v_p$ cu $v_i \in V_{\lambda_i}$, $i = 1, ..., p$, deci v = combinație liniară de vectori din $\mathscr{B}_1$ + combinație liniară de vectori din $\mathscr{B}_2$ +...+ combinație liniară de vectori din $\mathscr{B}_p$ = combinație liniară de vectori din $\mathscr{B}$. Deoarece $\dim_K V = n$, rezultă că $\mathscr{B}$ este bază în V și este formată din vectori proprii.

Fie $\mathscr{B} = \{u_1, ..., u_{n_1}, u_{n_1+1}, ..., u_n\}$; atunci putem scrie:

$$f(u_1) = \lambda_1 u_1 + 0 \cdot u_2 + ... + 0 \cdot u_n$$
$$f(u_2) = 0 \cdot u_1 + \lambda_1 u_2 + ... + 0 \cdot u_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(u_{n_1}) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + ... + \lambda_1 u_{n_1} + ... + 0 \cdot u_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(u_n) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + ... + \lambda_p u_n,$$

de unde rezultă că $M_f^{\mathscr{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_2, ..., \lambda_p, ..., \lambda_p)$, adică f este diagonalizabil.

COROLARUL 1. Fie V un spațiu vectorial peste K, $\dim_K V = n$, $f: V \to V$ un endomorfism cu $P_f = (-1)^n (X - \lambda_1)^{n_1} ... (X - \lambda_p)^{n_p} \in K[X]$, $n_1 + ... + n_p = n$. Dacă toți $n_i = 1$ pentru $i = 1, ..., p = n$, adică toate valorile proprii sînt rădăcini simple ale polinomului caracteristic al lui f, atunci f se diagonalizează.

DEMONSTRAȚIE. Deoarece $V_{\lambda_i} \neq 0$ rezultă că $\dim_K V_{\lambda_i} \geq 1$; dar $\dim_K V_{\lambda_i} \leq n_i = 1$, deci $\dim_K V_{\lambda_i} = 1 = n_i$, $i = 1, ..., p$, de unde rezultă că f este diagonalizabil.

COROLARUL 2. (teorema de descompunere spectrală). Fie $f : V \to V$ diagonalizabil, $V = \bigoplus_{i=1}^{p} V_{\lambda_i}$. Pentru orice $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$, avem $f(x) = \Sigma f(x_i) = \Sigma \lambda_i x_i$ deci $f = \Sigma \lambda_i p_i$, unde $p_i : V \to V$, $x \to x_i$.

OBSERVAȚIE. Reținem următorul "algoritm de diagonalizare": Fiind dată o matrice $A \in M_n(K)$, se parcurg următoarele etape:

1. Calculul lui $P_A(X)$ și descompunerea în factori liniari
$$P_A(X) = (-1)^n \cdot (X - \lambda_1)^{n_1} ... (X - \lambda_p)^{n_p}.$$

2. Pentru fiecare valoare proprie $\lambda \in \sigma(A)$ se calculează V_λ și $\dim V_\lambda$.
Condiția ca A să fie diagonalizabilă este ca $\dim V_\lambda = n_\lambda$ pentru orice $\lambda \in \sigma(A)$. Presupunem îndeplinită această condiție.

3. Se determină cîte o bază $\mathscr{B}_1$ în V_{λ_1}, $\mathscr{B}_2$ în V_{λ_2}, ..., $\mathscr{B}_p$ în V_{λ_p} și vectorii din reuniunea bazelor $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 \cup ... \cup \mathscr{B}_p$ formează coloanele succesive ale unei matrici nesingulare T.

$$\text{Atunci } T^{-1}AT = D = \text{diag}(\overbrace{\lambda_1, ..., \lambda_1}^{n_1}, \overbrace{\lambda_2, ..., \lambda_2}^{n_2}, ..., \overbrace{\lambda_p, ..., \lambda_p}^{n_p}).$$

EXEMPLE. 1) Matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ se diagonalizează, deoarece are valori proprii simple, $\sigma(A) = \{0, 5\}$, cu vectorii proprii respectivi $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Atunci luând $T = (X_1 | X_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, rezultă $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \text{diag}(0,5)$.

2) Matricea $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ nu este diagonalizabilă, deoarece $P_B(X) = -(X - 1)^2 \cdot (X + 1)$ și pentru $\lambda = 1 \in \sigma(B)$, avem $\dim V_\lambda \neq n_\lambda$, deoarece $\dim V_\lambda = 1$ și $n_\lambda = 2$.

Reamintim că o matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ se numește **superior** (respectiv **inferior**) **triunghiulară** dacă $a_{ij} = 0$ pentru orice $j < i$ (respectiv $j > i$).

DEFINIȚIA 3.8. Fie V spațiu vectorial peste K, $\dim_K V = n$, $f : V \to V$ un endomorfism. Spunem că f este **triangularizabil** dacă există o bază $\mathscr{B}$ a lui V astfel încît $M_f^{\mathscr{B}}$ să fie superior (sau inferior) triunghiulară.

TEOREMA 3.11. (criteriul de triangularizare). Fie V un spațiu vectorial peste K, $\dim_K V = n$, $f : V \to V$ un endomorfism pentru care polinomul caracteristic se descompune în factori liniari peste K, adică $P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{n_1} \ldots (X - \lambda_p)^{n_p} \in K[X]$, cu toți $\lambda_i \in K$, unde $n_1 + \ldots + n_p = n$. Atunci f este triangularizabil.

DEMONSTRAȚIE. Fie $\lambda = \lambda_1 \in \sigma(f)$; atunci există $u_1 \in V_{\lambda_1}$, $u_1 \neq 0$. Mulțimea $\{u_1\}$ este sistem liniar independent și se poate completa la o bază $\mathscr{B}_1 = \{u_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Deoarece $f(u_1) = \lambda u_1$ avem:

$$A = M_f^{\mathscr{B}_1} = \begin{pmatrix} \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & a_{12} \quad \cdots \quad a_{12} \\ 0 & C \end{pmatrix}; \text{ cu } C \in M_{n-1}(K).$$

Vom demonstra afirmația prin inducție după n. Pentru $n = 1$ afirmația este evidentă. Presupunem afirmația adevărată pentru $n - 1 \geq 1$ și calculăm

$$P_f(X) = P_A(X) = \begin{vmatrix} \lambda - X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - X & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - X \end{vmatrix} = (\lambda - X) \cdot P_C(X).$$

Rezultă că $P_C(X)$ se descompune în factori liniari peste K și atunci, din ipoteza de inducție, rezultă că există $T_1 \in M_{n-1}(K)$, T_1 nesingulară astfel încît $T_1^{-1} \cdot C \cdot T_1 = B_1$ să fie superior triunghiulară.

Fie $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} \in M_n(K)$.

Avem $\det T = \det T_1 \neq 0$, deci T este nesingulară și apoi $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_1^{-1} \end{pmatrix}$,

deoarece se verifică imediat că $T \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_1 \cdot T_1^{-1} \end{pmatrix} = I_n$. Putem calcula:

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & T_1^{-1}C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & T_1^{-1}CT_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} = B,$$

unde B este superior triunghiulară, deci f este triangularizabil.

COROLARUL 1. Fie $A \in M_n(K)$ triangularizabilă și $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ cu multiplicitățile algebrice respective $n_1, \ldots, n_p$ $(n_1 + \ldots + n_p = n)$. Atunci, $(\forall)\, k \in N$, A^k este triangularizabilă și $\sigma(A^k) = \{\lambda_1^k, \ldots, \lambda_p^k\}$ cu aceleași multiplicități [dacă $\lambda_i^k = \lambda_j^k$ $(i \neq j)$ adunăm n_i cu n_j].

DEMONSTRAȚIE. Fie $T \in M_n(K)$ nesingulară astfel încît

$$T^{-1}AT = B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{2n} \\ & & \\ 0 & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Avem $P_A(X) = P_B(X) = (b_{11} - X)(b_{22} - X) \ldots (b_{nn} - X)$, deci pe diagonală în matricea triunghiulară B apar valorile proprii.

Putem presupune că avem

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & * & * & * \\ & \ddots & & & \cdots & & & & * & * \\ & & \lambda_1 & & & & & & & * \\ & & & \lambda_2 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & \vdots & & \\ & \vdots & & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \lambda_p & & \\ & 0 & & & \cdots & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

Calculăm $B^k = (T^{-1}AT)^k = (T^{-1}AT)(T^{-1}AT) \ldots (T^{-1}AT) = T^{-1}A^kT$, deci A^k se triangularizează. În plus, avem:

$$B^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & & & & & * & * & * \\ & \ddots & & & \cdots & & & & * & * \\ & & \lambda_1^k & & & & & & & * \\ & & & \lambda_2^k & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & \vdots & & \\ & \vdots & & & & \lambda_2^k & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \lambda_p^k & & \\ & 0 & & & \cdots & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_p^k \end{pmatrix},$$

deci $\sigma(A^k) = \sigma(B^k) = \{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_p^k\}$, cu aceleași multiplicități.

COROLARUL 2. Fie $A \in M_n(K)$ nesingulară și triangularizabilă, iar $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ cu multiplicitățile algebrice $n_1, \ldots, n_p (n_1 + \ldots + n_p = n)$.

Atunci A^{-1} este triangularizabilă şi $\sigma(A^{-1}) = \{1/\lambda_1, ..., 1/\lambda_p\}$ cu aceleaşi multiplicități.

DEMONSTRAȚIE. Fie $T \in M_n(K)$ nesingulară astfel încît

$$T^{-1}AT = B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & & * & * & * \\ & \ddots & & & * & * \\ & & \lambda_1 & & & * \\ & \vdots & & \ddots & & \\ & & & \lambda_p & & \vdots \\ & 0 & \cdots & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

Avem $\det(T^{-1}AT) = \det B = \lambda_1^{n_1}...\lambda_p^{n_p}$ sau $\det A = \det B = \lambda_1^{n_1}...\lambda_p^{n_p} \neq 0$, deci $\lambda_i \neq 0 \quad (\forall)\, i = 1, 2, ..., p$. Calculăm $(T^{-1}A^{-1}T)B = (T^{-1}A^{-1}T)(T^{-1}AT) = T^{-1}(A^{-1}A)T = T^{-1}T = I_n$ şi $B(T^{-1}A^{-1}T) = I_n$, deci $B^{-1} = T^{-1}A^{-1}T$. Rezultă că A^{-1} se triangularizează, deoarece B^{-1} este superior triunghiulară. În plus avem:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & \cdots & & * & * & * \\ & \ddots & & & * & * \\ & & 1/\lambda_1 & & & * \\ & \vdots & & \ddots & & \\ & & & 1/\lambda_p & & \vdots \\ & 0 & \cdots & & \ddots & \\ & & & & & 1/\lambda_p \end{pmatrix},$$

deci $\sigma(A^{-1}) = \sigma(B^{-1}) = \{1/\lambda_1, ..., 1/\lambda_p\}$, cu aceleaşi multiplicități.

3.5. Forma canonică Jordan (C. JORDAN, 1838–1922)

În cele ce urmează, dăm teorema de reducere a matricelor pătratice la forma canonică Jordan, cu demonstrații complete. Sînt necesare o serie de pregătiri, unele importante prin ele însele. La sfîrşitul acestui paragraf vom prezenta "algoritmul de jordanizare".

TEOREMA 3.12. Fie V un spațiu vectorial peste K, $\dim_K V = n$, $g : V \to V$ un endomorfism (operator liniar al lui V) şi $\underbrace{g \circ g \circ ... \circ g}_{k \text{ ori}}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Atunci avem:

a) $\operatorname{Ker} g^k \subset \operatorname{Ker} g^{k+1}$ **şi** $\operatorname{Im} g^k \supset \operatorname{Im} g^{k+1}$;

b) Există $s \in \mathbb{N}^*$ astfel încît:

$$\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} g^2 \subset ... \subset \operatorname{Ker} g^s = \operatorname{Ker} g^{s+1} = ... \overset{\text{(notație)}}{=} K(g).$$

c) **Pentru acel** s **are loc:**

$$\operatorname{Im} g \supset \operatorname{Im} g^2 \supset \ldots \supset \operatorname{Im} g^s = \operatorname{Im} g^{s+1} = \ldots \overset{\text{(notaţie)}}{=} I(g).$$

d) $V = K(g) \oplus I(g)$ **şi** $K(g), I(g)$ **sînt subspaţii** g**–invariante.**

DEMONSTRAŢIE. a) Fie $x \in \operatorname{Ker} g^k$; atunci $g^k(x) = 0$, de unde $g(g^k(x)) = 0$, adică $g^{k+1}(x) = 0$, deci $x \in \operatorname{Ker} g^{k+1}$. Fie $y \in \operatorname{Im} g^{k+1}$; atunci $y = g^{k+1}(x)$, $x \in V$, de unde $y = g^k(g(x))$, deci $y \in \operatorname{Im} g^k$.

b) Presupunem că nu apare egalitatea în incluziunile $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} g^2 \subset \ldots \subset \operatorname{Ker} g^k \subset \ldots \subset V$. Atunci avem inegalităţile $\dim_K \operatorname{Ker} g < \dim_K \operatorname{Ker} g^2 < \ldots < \dim_K \operatorname{Ker} g^k < \ldots < \dim_K V = n$ şi deci există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încît $\dim_K \operatorname{Ker} g^k > n$, contradicţie. Fie $s \in \mathbb{N}^*$ primul indice pentru care apare egalitatea $\operatorname{Ker} g^s = \operatorname{Ker} g^{s+1}$. Să arătăm că $\operatorname{Ker} g^{s+k} = \operatorname{Ker} g^s$, $(\forall)\, k \in \mathbb{N}^*$. Aplicăm inducţia după k. Pentru $k = 1$ avem, într-adevăr, $\operatorname{Ker} g^{s+1} = \operatorname{Ker} g^s$. Presupunem că $\operatorname{Ker} g^{s+k} = \operatorname{Ker} g^s$ şi să arătăm că $\operatorname{Ker} g^{s+k+1} = \operatorname{Ker} g^s$. Avem $\operatorname{Ker} g^s = \operatorname{Ker} g^{s+k} \subset \operatorname{Ker} g^{s+k+1}$. Fie $x \in \operatorname{Ker} g^{s+k+1}$, deci $g^{s+k+1}(x) = 0$ sau $g^{s+k}(g(x)) = 0$, de unde $g(x) \in \operatorname{Ker} g^{s+k} = \operatorname{Ker} g^s$; rezultă că $g^s(g(x)) = 0$ sau $g^{s+1}(x) = 0$, adică $x \in \operatorname{Ker} g^{s+1} = \operatorname{Ker} g^s$, deci $\operatorname{Ker} g^{s+k+1} = \operatorname{Ker} g^s$.

c) Din punctul a) avem incluziunile;

$$\operatorname{Im} g \supset \operatorname{Im} g^2 \supset \ldots \supset \operatorname{Im} g^k \supset \ldots$$

Dar

$$\dim_K \operatorname{Im} g^k = n - \dim_K \operatorname{Ker} g^k,$$

deci

$$\operatorname{Im} g^k \overset{\supset}{\neq} \operatorname{Im} g^{k+1} \leftrightarrow \dim_K \operatorname{Im} g^k > \dim_K \operatorname{Im} g^{k+1} \leftrightarrow \dim_K \operatorname{Ker} g^k < \dim_K \operatorname{Ker} g^{k+1} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \operatorname{Ker} g^k \overset{\subset}{\neq} \operatorname{Ker} g^{k+1}.$$ Rezultă atunci de aici afirmaţia.

d) Fie $K(g) = \operatorname{Ker} g^s = \operatorname{Ker} g^{s+1} = \ldots$ şi $I(g) \overset{\text{(notaţie)}}{=} \operatorname{Im} g^s = \operatorname{Im} g^{s+1} = \ldots$

Fie $x \in K(g) \cap I(g)$; atunci $g^s(x) = 0$ şi $x = g^s(t)$ cu $t \in V$. Rezultă $g^s(g^s(t)) = 0$ sau $g^{2s}(t) = 0$, deci $t \in \mathit{Ker}\, g^{2s} = \operatorname{Ker} g^s$ $(s \geq 1)$, de unde $x = g^s(t) = 0$, adică $K(g) \cap I(g) = \{0\}$. Atunci avem $K(g) \oplus I(g) \subset V$. Dar $\dim_K(K(g) \oplus I(g)) = \dim_K \operatorname{Ker} g^s + \dim_K \operatorname{Im} g^s = n = \dim_K V$, deci $K(g) \oplus I(g) = V$.

Fie $x \in K(g)$; atunci $g^s(x) = 0$, deci $g^{s+1}(x) = 0$ sau $g^s(g(x)) = 0$, adică $g(x) \in \operatorname{Ker} g^s = K(g)$ şi $K(g)$ este g–invariant.

Fie $y \in I(g)$; atunci $y = g^s(x)$, de unde $g(y) = g^{s+1}(x) = g^s(g(x)) \in \operatorname{Im} g^s = I(g)$, deci $I(g)$ este g –invariant.

DEFINIŢIA 3.9. Subspaţiul vectorial $K(g)$ definit în teorema 3.12 se numeşte **nucleul stabil al lui** g. Subspaţiul vectorial $I(g)$ definit în aceeaşi teoremă se numeşte **imaginea stabilă a lui** g.

Aceste definiţii se adaptează în mod evident la matrice.

EXEMPLE. 1) Se consideră operatorul $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $g(x, y, z, t) = (x - y, x - y, x - y + z, t)$.

Matricea lui f în baza canonică este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem $\operatorname{Ker} A = \{x \mid A \cdot x = 0\} = \{a \cdot u^T \mid a \in \mathbb{R}\}$, unde $u = (1, 1, 0, 0)$; apoi

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şi $\operatorname{Ker} A^2 = \{(a, b, -a + b, 0)^T \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Deoarece $A^3 = A^2$, nucleul stabil al lui g este $K(g) = \operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} g^2$; în mod similar, imaginea stabilă este $I(g) = \operatorname{Im} g^2 = \{(0, 0, u, v)^T \mid u, v \in \mathbb{R}\}$.

2) Fie $D : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ operatorul de derivare; avem
$\operatorname{Ker} D = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P' = 0\} = \mathbb{R}$ (polinoame de gradul zero),
$\operatorname{Ker} D^2 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P''(X) = 0\}$ (polinoame de gradul întîi) şi în final,
$K(D) = \mathbb{R}_2[X]$, $I(D) = \{0\}$.

3) Dacă g este un operator **nilpotent** (adică $(\exists)$ $r \geq 1$, $g^r = 0$), atunci $K(g) = V$ şi $I(g) = \{0\}$, iar dacă g este un automorfism, atunci $K(g) = \{0\}$ şi $I(g) = V$.

PROPOZIȚIA 3.13. Fie V un spațiu vectorial peste K, $\dim_K V = n$, $g : V \to V$ un endomorfism. Fie $v \in V$ astfel încît $g^{k-1}(v) \neq 0$ şi $g^k(v) = 0$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Fie $W = \{v, g(v), \ldots, g^{k-1}(v)\}^\sim$ subspațiul generat de $\mathscr{B} = \{v, g(v), \ldots, g^{k-1}(v)\}$. Atunci:

a) $\mathscr{B}$ este bază în W şi $\dim_K W = k$.

b) W este g –invariant şi

$$M^{\mathscr{B}}_{g/W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 10 \end{pmatrix}.$$

DEMONSTRAȚIE. a) Fie $\alpha_1 v + \alpha_2 g(v) + \ldots + \alpha_k g^{k-1}(v) = 0$ cu $\alpha_i \in K$. Aplicăm g^{k-1} şi obținem:

$$\alpha_1 \underbrace{g^{k-1}(v)}_{\neq 0} + \alpha_2 \underbrace{g^k(v)}_{0} + \ldots + \alpha_k \underbrace{g^{2k-2}(v)}_{0} = 0,$$

deci $\alpha_1 = 0$. Rămîne $\alpha_2 g(v) + \ldots + \alpha_k g^{k-1}(v) = 0$ şi aplicăm g^{k-2}. Rezultă $\alpha_2 g^{k-1}(v) = 0$, deci $\alpha_2 = 0$, etc, ..., deci $\mathscr{B}$ este sistem liniar independent şi atunci este bază pentru W. În plus rezultă că $\dim_K W = k = \operatorname{card} \mathscr{B}$.

b) Fie $x \in W$; $x = \alpha_1 v + \alpha_2 g(v) + \ldots + \alpha_k g^{k-1}(v)$ şi

$g(x) = \alpha_1 g(v) + \alpha_2 g(v) + \ldots + \alpha_{k-1} g^{k-1}(v) + \underbrace{\alpha_k g^k(v)}_{0} \in W$ deci W este g–invariant. Notăm $v = u_1, g(v) = u_2, \ldots, g^{k-1}(v) = u_k$ şi avem:

$$\begin{aligned}
g(u_1) &= u_2 = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + \ldots + 0 \cdot u_k \\
g(u_2) &= u_3 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 + \ldots + 0 \cdot u_k \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
g(u_{k-1}) &= u_k = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + \ldots + 1 \cdot u_k \\
g(u_k) &= 0 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + \ldots + 0 \cdot u_k,
\end{aligned}$$

deci

$$M^{\mathscr{B}}_{g/W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definiţia 3.10. Subspaţiul W definit în propoziţia 3.13 se numeşte **subspaţiu g–ciclic.**

Corolar. În ipotezele propoziţiei 3.13, fie $\lambda \in K$ şi $f = g + \lambda \cdot 1_V : V \to V$. Atunci W este f–invariant şi

$$M^{\mathscr{B}}_{f/W} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Demonstraţie. Fie $x \in W$; $f(x) = g(x) + \lambda x \in W$ deoarece W este g–invariant, deci W este şi f–invariant. Avem că

$$M^{\mathscr{B}}_{f/W} = M^{\mathscr{B}}_{g/W} + \lambda I_k = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.14. Fie V spaţiu vectorial peste K, $\dim_K V = n$, $f : V \to V$ un endomorfism. Presupunem că $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_p$, unde W_i sînt

subspații f-invariante $(\forall) i = 1, 2, ..., p$, $\dim_K W_i = n_i$. $(n_1 + n_2 + ... + n_p = n)$.

Atunci există o bază $\mathscr{B}'$ în V astfel încît

$$M_f^{\mathscr{B}'} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & M_p \end{array}\right) = \operatorname{diag}(M_1, M_2, ..., M_p) \text{ cu } M_i \in M_{n_i}(K).$$

DEMONSTRAȚIE. Fie $\mathscr{B}_1$ bază în $W_1, \ldots, \mathscr{B}_p$ bază în W_p și $\mathscr{B}' = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 \cup ... \cup \mathscr{B}_p$. Deoarece $W_i \cap W_j = \{0\}$ rezultă că $\operatorname{card} \mathscr{B}' = n_1 + n_2 + ... + n_p = n$, deci este suficient să arătăm că $\mathscr{B}'$ este sistem de generatori ca să rezulte bază în V. Pentru $(\forall)\, v \in V$ putem scrie $v = v_1 + v_2 + ... + v_n$ cu $v_i \in W_i$, $i = 1, ..., p$ deci v = combinație liniară de vectori din $\mathscr{B}_1$ +...+ combinație liniară de vectori din $\mathscr{B}_p$ = combinație liniară de vectori din $\mathscr{B}'$.

Fie $\mathscr{B}_1 = \{u_1, u_2, ..., u_{n_1}\}$, $\mathscr{B}_2 = \{u_{n_1+1}, ..., u_{n_1+n_2}\}, ...,$ $\mathscr{B}_p = \{u_{n_1+...+n_{p-1}+1}, ..., u_n\}$.

Ținînd seama de faptul că fiecare W_i este f-invariant avem:

$f(u_1) = a_{11}u_1 + ... + a_{n_1 1}u_{n_1} + 0 \cdot u_{n_1+1} + ... + 0 \cdot u_n$

$f(u_{n_1}) = a_{1n_1}u_1 + ... + a_{n_1 n_1}u_{n_1} + 0 \cdot u_{n_1+1} + ... + 0 \cdot u_n$

$f(u_{n_1+1}) = 0 \cdot u_1 + ... + 0 \cdot u_{n_1} + a_{n_1+1\, n_1+1} u_{n_1+1} + ... + a_{n_1+n_2\, n_1+1}u_{n_1+n_2} + ... + 0 \cdot u_n$

. . . .

$f(u_n) = 0 \cdot u_1 + ... + 0 \cdot u_{n_1} + 0 \cdot u_{n_1+1} + ... + 0 \cdot u_{n_1+n_2} + ... + a_{n_1+...+n_{p-1}+1\, n}u_{n_1+...+n_{p-1}+1} + ... + a_{nn}u_n$

deci $M_f^{\mathscr{B}'} = \operatorname{diag}(M_1, M_2, ..., M_p)$, formă bloc diagonală, cu $M_i \in M_{n_i}(K)$.

Teorema este demonstrată.

Fie $A \in M_n(K)$ (K inel comutativ cu unitate) și fie $i_1 < i_2 < ... < i_k$ $(1 \le k \le n-1)$ linii fixate ale lui A; fie $j_1 < j_2 < ... < j_k$ $(1 \le k \le n-1)$ coloane fixate ale lui A. Notăm cu $M_{i_1...i_k}^{j_1...j_k}$ = minorul obținut din matricea A la intersecția celor k linii fixate cu cele k coloane fixate. Notăm complementul algebric al lui $M_{i_1...i_k}^{j_1...j_k}$ cu $A_{i_1...i_k}^{j_1...j_k} = (-1)^{i_1+...+i_k+j_1+...+j_k} \cdot M_{\{1,...n\}\setminus\{i_1,...,i_k\}}^{\{1,...,n\}\setminus\{j_1,...,j_k\}}$ (minorul aflat la intersecția celor $n-k$ linii rămase cu cele $n-k$ coloane rămase). Reamintim regula lui Laplace: dacă $A \in M_n(K)$, K fiind un inel comutativ și dacă $i_1 < i_2 < ... < i_k$ sînt linii fixate ale matricii A $(1 \le k \le n-1)$, atunci $A = \sum\limits_{j_1<j_2<...<j_k} M_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k} \cdot A_{i_1,...,i_k}^{j_1,...,j_k}$ (în mod analog, au loc dezvoltări după coloane fixate).

Folosind acest fapt, rezultă că dacă $A = \operatorname{diag}(M_1, M_2, ..., M_p) \in M_n(K)$ este o matrice bloc diagonală cu $M_i \in M_{n_i}(K)$ și $n_1 + n_2 + ... + n_p = n$, atunci $\det A = \det M_1 \cdot \det M_2 ... \det M_p$.

Procedăm prin inducție după p. Pentru $p = 1$ afirmația este clară și presupunînd formula adevărată pentru $p - 1 \geq 1$ și fixînd liniile $1, 2, ..., n_1$ va rezulta conform regulii lui Laplace că
$\det A = \det M_1 \cdot \det(\text{diag}(M_2, ..., M_p)) = \det M_1 \cdot (\det M_2 ... \det M_p)$, ultima relație decurgînd conform ipotezei de inducție.

De asemenea dacă $A = \text{diag}(M_1, M_2, ..., M_p) \in M_n(K)$, atunci

$$P_A(X) = P_{M_1}(X) \cdot P_{M_2}(X) ... P_{M_p}(X).$$

Într-adevăr, avem $A - XI_n = \text{diag}(M_1 - XI_{n_1}, M_2 - XI_{n_2}, ..., M_p - XI_{n_p})$ și folosind proprietatea anterioară, obținem:

$$P_A(X) = \det(M_1 - XI_{n_1}) ... \det(M_p - XI_{n_p}) = P_{M_1}(X) ... P_{M_p}(X).$$

Fie V un spațiu vectorial peste corpul comutativ K, $\dim_K V = n$, $f : V \to V$ un endomorfism al cărui polinom caracteristic se descompune în factori liniari peste K, adică $P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{n_1} (X - \lambda_2)^{n_2} ... (X - \lambda_p)^{n_p} \in K[X]$, unde $n_1 + n_2 + ... + n_p = n$. Vom nota $P_i(X) = (X - \lambda_i)^{n_i}$ și $Q_i(X) = P_f(X) : P_i(X)$, deci $P_f(X) = P_i(X) \cdot Q_i(X)$, $i = 1, ..., p$.

OBSERVAȚIE. Ținînd seama de teorema Hamilton–Cayley și de legătura între aplicații liniare și matrice, putem scrie:

$$P_f(f) = \alpha_0 f^n + \alpha_1 f^{n-1} + ... + \alpha_n 1_V = 0_V, \text{ sau}$$

$$P_f(f) = (-1)^n (f - \lambda_1 1_V)^{n_1} \circ (f - \lambda_2 1_V)^{n_2} \circ ... \circ (f - \lambda_p 1_V)^{n_p} = 0_V, \text{ sau încă:}$$

$$P_i(f) \circ Q_i(f) = 0_V, i = 1, 2, ..., p.$$

DEFINIȚIA 3.11. Endomorfismul $g_i = f - \lambda_i 1_V$ $(i = 1, 2, ..., p)$ se numește **endomorfism asociat** lui f și valorii proprii λ_i (deci f are p endomorfisme asociate). Subspațiul $V^{\lambda_i} = \text{Ker } g_i^{n_i}$ $(= \text{Ker}(P_i(f)))$ $(i = 1, 2, ..., p)$ se numește **subspațiu asociat** lui f (deci f are p subspații asociate).

PROPOZIȚIA 3.15. În ipotezele de mai sus avem:

a) $V_{\lambda_i} \subset V^{\lambda_i}$;

b) V^{λ_i} **sînt subspații** f**-invariante,** $(\forall)\, i = 1, 2, ..., p$.

DEMONSTRAȚIE. a) Avem: $V_{\lambda_i} = \text{Ker}(f - \lambda_i 1_V) = \text{Ker } g_i \subset \text{Ker } g_i^{n_i} = V^{\lambda_i}$ (deoarece $n_i \geq 1$).

b) Fie $x \in V^{\lambda_i}$; $g_i^{n_i}(x) = 0$ deci, $g_i^{n_i+1}(x) = 0$, sau $g_i^{n_i}(g_i(x)) = 0$ de unde $g_i(x) \in V^{\lambda_i}$. Dar $f(x) = g_i(x) + \lambda_i x$, deci $f(x) \in V^{\lambda_i}$, adică V^{λ_i} este f-invariant, $(\forall)\, i = 1, 2, ..., p$.

TEOREMA 3.16. (descompunerea primară). Fie V **un spațiu vectorial peste** K, $\dim_K V = n$, $f : V \to V$ **un endomorfism al cărui polinom caracteristic se descompune în factori liniari peste** K. **Atunci**

$$V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus ... \oplus V^{\lambda_p}.$$

DEMONSTRAȚIE. Să observăm mai întîi că polinoamele $Q_1, Q_2, ..., Q_p \in K[X]$ sînt prime în ansamblu. Fie $I \subset K[X]$, $I = \{T_1Q_1 + T_2Q_2 + ... + T_pQ_p \in K[X] \mid T_1, ..., T_p \in K[X]\}$; se vede imediat că I este

un ideal în $K[X]$, deci este principal (vezi teorema 1.3), adică $I = (U) = \{T \cdot U \in K[X] \mid T \in K[X]\}$. Deoarece $Q_i \in I$, $i = 1, 2, ..., p$, rezultă că $U \mid Q_i$, $(\forall)\, i = 1, 2, ..., p$, deci $U = 1$. Dar $U \in I$, deci există polinoamele $H_i \in K[X]$, $i = 1, 2, ..., p$, astfel încît $1 = H_1Q_1 + H_2Q_2 + ... + H_pQ_p$.

De aici obținem egalitatea de endomorfisme

$$(*) 1_V = H_1(f) \circ Q_1(f) +...+ H_p(f) \circ Q_p(f)$$

Fie acum $v \in V$, oarecare. Din relația (*) obținem:

$$v = Q_1(f)(H_1(f(v)) + ... + Q_p(f)(H_p(f(v)) = x_1 + ... + x_p,$$

unde am ținut seama de comutativitatea $H_i(f) \circ Q_i(f) = Q_i(f) \circ H_i(f)$ și am notat $x_i = Q_i(f)(H_i(f)(v))$, $i = 1, 2, ..., p$.

Vom arăta că $(\forall)\, i = 1, 2, ..., p$, avem $x_i \in V^{\lambda_i}$. Calculăm:
$P_i(f)(x_i) = P_i(f)(Q_i(f)(H_i(f(v))) = (P_i(f) \circ Q_i(f))(H_i(f)(v)) = 0_V(H_i(f)(v)) = 0$ deci $x \in V^{\lambda_i}$, de unde $V \subset V^{\lambda_1} + V^{\lambda_2} +...+ V^{\lambda_p}$, adică $V = V^{\lambda_1} + V^{\lambda_2} +...+ V^{\lambda_p}$, incluziunea cealaltă fiind evidentă.

Rămîne de demonstrat că suma este directă, deci că scrierea este unică.

Fie $v = x_1 + ... + x_p = y_1 + ... + y_p$, cu $x_i, y_i \in V^{\lambda_i}$, $i = 1, 2, ..., p$; obținem $(x_1 - y_1) + ... + (x_p - y_p) = 0$, deci $z_1 + z_2 + ... + z_p = 0$, dacă notăm $z_i = x_i - y_i \in V^{\lambda_i}$, $i = 1, 2, ..., p$.

Presupunem de exemplu $z_1 \neq 0$ și scriem $z_1 = -z_2 - ... - z_p$. Atunci

$$Q_1(f)(z_1) = -Q_1(f)(z_2) -...- Q_1(f)(z_p).$$

Dar $Q_1(f)(z_2) = ((-1)^n(f - \lambda_3 1_V)^{n_3} \circ...\circ (f - \lambda_p 1_V)^{n_p}(f - \lambda_2 1_V)^{n_2}(z_2)) = 0$, deoarece $z_2 \in V^{\lambda_2} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 1_V)^{n_2}$ (am folosit comutativitatea). Analog rezultă $Q_1(f)(z_3) =...= Q_1(f)(z_p) = 0$, deci $Q_1(f)(z_1) = 0$. Dar,

$$Q_i(f)(z_1) = ((-1)^n(f - \lambda_2 1_V)^{n_2} \circ...)(f - \lambda_1 1_V)^{n_1}(z_1) = 0$$

pentru $i = 2, ..., p$, de unde rezultă că $Q_i(f)(z_1) = 0$, $(\forall)\, i = 1, 2, ..., p$. Din relația (*) obținem:
$z_1 = H_1(f)(Q_1(f)(z_1)) + H_2(f)(Q_2(f)(z_1))+...+ H_p(f)(Q_p(f)(z_1)) = 0$, contradicție. Rezultă $z_i = 0$, $(\forall)\, i = 1, 2, ..., p$, adică $x_i = y_i$, $(\forall)\, i = 1, 2, ..., p$, deci scrierea este unică.

TEOREMA 3.17. În ipotezele și cu notațiile teoremei anterioare, avem:

a) $\dim_K V^{\lambda_i} = n_i$;

b) $\dim_K K(g_i) = n_i$;

c) $V^{\lambda_i} = K(g_i)$; $i = 1, 2, ..., p$.

DEMONSTRAȚIE. a) Conform ipotezei avem

$$P_f(X) = (-1)^n(X - \lambda_1)^{n_1}...(X - \lambda_p)^{n_p}, n_1 + n_2 +...+ n_p = n.$$

Conform teoremei de descompunere primară avem:

$$V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus ... \oplus V^{\lambda_p},$$

cu $V^{\lambda_i} = \mathrm{Ker}\, g_i^{n_i}$ subspații f-invariante. Fie $m_i = \dim_K V^{\lambda_i}$; atunci $m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n$. Fie $\tilde{g}_i = g_i\big|_{V^{\lambda_i}}$ și $f_i = \tilde{g}_i + \lambda_i 1_{V^{\lambda_i}} = f\big|_{V^{\lambda_i}}$. Pentru orice $x \in V^{\lambda_i}$ avem $\tilde{g}_i^{n_i}(x) = g_i^{n_i}(x) = 0$, deci $\tilde{g}_i^{n_i} = 0$peV^{λ_i}, adică g_i este nilpotent. Dacă λ este o valoare proprie a lui $\tilde{g}_i$, atunci λ^{n_i} este o valoare proprie a lui $\tilde{g}_i^{n_i} = 0$peV^{λ_i}, deci $\lambda^{n_i} = 0$, adică $\lambda = 0$ (am folosit lema 3.4). Rezultă că $\sigma(\tilde{g}_i) = \{0\}$. Fie acum $\lambda \in \sigma(f_i)$; atunci există $x \in V^{\lambda_i}$, $x \neq 0$, astfel încît $f_i(x) = \lambda x$, deci $\tilde{g}_i(x) = (\lambda - \lambda_i) \cdot x$. Rezultă că $\lambda - \lambda_i \in \sigma(\tilde{g}_i)$, deci $\lambda = \lambda_i$; cu alte cuvinte endomorfismul f_i are o singură valoare proprie pe λ_i, dacă are valori proprii. Din teorema 3.14 rezultă că există o bază $\mathscr{B}'$ în V astfel încît să avem:

$$M_f^{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} M_1 & & \ldots & 0 \\ & M_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & M_p \end{pmatrix}$$

unde $M_i \in M_{m_i}(K)$, aşa cum rezultă din demonstrația teoremei 3.14, unde $M_i = M_{f_i}^{\mathscr{B}_i}$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Dar $P_f(X) = P_{f_1}(X) \cdot P_{f_2}(X) \ldots P_{f_p}(X)$, deci fiecare polinom caracteristic $P_{f_i}(X)$ se descompune în factori liniari peste K, adică fiecare f_i are valori proprii; în concluzie $\sigma(f_i) = \{\lambda_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, cu multiplicitatea m_i. Rezultă $P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m_1} (X - \lambda_2)^{n} \ldots (X - \lambda_p)^{m_p}$,

de unde $m_i = \dim_K V^{\lambda_i} = n_i$, $(\forall)\, i = 1, 2, \ldots, p$.

b) Ştim că $K(g_i) = \mathrm{Ker}\, g_i^s$ şi $K(g_i)$ este g_i-invariant (teorema 3.12).

Deoarece $g_i = f - \lambda_i \cdot 1_V$ rezultă că $K(g_i)$ este f-invariant; analog $I(g_i)$ rezultă f-invariant şi avem $V = K(g_i) \oplus I(g_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, p$, i fiind fixat).

Fie $\dim_K K(g_i) = m_1$ şi $\dim_K I(g_i) = m_2$, $m_1 + m_2 = n$. Din teorema 3.14 avem o bază $\mathscr{B}''$ în V astfel încît

$$M_f^{\mathscr{B}''} = \left(\begin{array}{c|c} M_{\tilde{f}_1}^{\mathscr{B}_1''} & 0 \\ \hline 0 & M_{\tilde{f}_2}^{\mathscr{B}_2''} \end{array}\right)$$

unde $M_{\tilde{f}_1}^{\mathscr{B}_1''} \in M_{m_1}(K)$ este matricea asociată lui $\tilde{f}_1 = f\big|_{K(g_i)}$ şi $M_{\tilde{f}_2}^{\mathscr{B}_2''} \in M_{m_2}(K)$ este matricea asociată lui $\tilde{f}_2 = f\big|_{I(g_i)}$. Avem de asemenea relația $P_f = P_{\tilde{f}_1}(X) \cdot P_{\tilde{f}_2}(X)$, deci $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ au valori proprii. Ca la punctul a) rezultă că $\tilde{f}_1$ are ca valoare proprie doar pe λ_i, deoarece $\tilde{g}_i^s = 0$ şi $\tilde{g}_i$ are ca valoare proprie doar pe zero. Aici nu cunoaştem valorile proprii ale lui $\tilde{f}_2$; vom arăta că $\lambda_i \notin \sigma(\tilde{f}_2)$. Presupunem contrariul şi fie $x \in I(g_i)$, $x \neq 0$, astfel încît $\tilde{f}_2(x) = \lambda_i x$; atunci $(f - \lambda_i 1_V)(x) = 0$, deci $x \in \mathrm{Ker}\, g_i \subset K(g_i)$, de unde rezultă că $x \in K(g_i) \cap I(g_i) = \{0\}$ contradicție. În concluzie, $P_{\tilde{f}_2}(\lambda_i) \neq 0$ şi are loc relația

Din prima afirmație, pentru $t = k - 1$, obținem

$$\alpha_i = 0, i = 1, 2, ..., r, \text{ deci } u = 0.$$

OBSERVAȚIE. O mulțime $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ cu proprietățile din lemă poate fi obținută prin completarea oricărei baze a lui $\operatorname{Ker} g^{k-1}$ la o bază a lui $\operatorname{Ker} g^k$.

TEOREMA 3.19. Fie V spațiu vectorial peste K, $\dim_K V = n$, $f: V \to V$ un endomorfism cu polinomul caracteristic

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{n_1} (X - \lambda_2)^{n_2} \ldots (X - \lambda_p)^{n_p} \in K[X],\ n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n.$$

Atunci pentru orice $i = 1, 2, ..., p$, dacă $f_i = f\big|_{V^{\lambda_i}} : V^{\lambda_i} \to V^{\lambda_i}$, există o bază $\mathscr{B}_i'$ în V^{λ_i} astfel încît $M_{f_i}^{\mathscr{B}_i'}$ să fie bloc Jordan avînd pe diagonală scalarul λ_i.

DEMONSTRAȚIE. Pentru simplificarea scrierii vom nota $\lambda_i = \lambda$, $n_i = m$, $g_i = f - \lambda_i \cdot 1_V = g$, $V^{\lambda_i} = V^{\lambda}$. Conform teoremelor 3.17 și 3.12 avem incluziunile stricte:

$$\{0\} \subset V_\lambda = \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} g^2 \subset \ldots \subset \operatorname{Ker} g^{s-1} \subset \operatorname{Ker} g^s = K(g) = V_\lambda,$$

unde $s \le m$. Notăm $d_k = \dim_K \operatorname{Ker} g^k$, $k = 0, 1, ..., s$ și avem inegalitățile: $0 = d_0 < d_1 < d_2 < \ldots < d_{s-1} < d_s = m$ (multiplicitatea algebrică), unde $d_1 =$ multiplicitatea geometrică a valorii proprii λ. Notăm $p_1 = d_s - d_{s-1}$, $p_2 = d_{s-1} - d_{s-2}, ..., p_{s-1} = d_2 - d_1$, $p_s = d_1$. Vectorii x din $\operatorname{Ker} g^k \setminus \operatorname{Ker} g^{k-1}$ se numesc vectori de înălțime k și au proprietatea că $g^k(x) = 0$ și $g^{k-1}(x) \neq 0$.

Alegem p_1 vectori de înălțime s ca în lema 3.18, adică

$$u_1, u_2, \ldots, u_{p_1} \in \operatorname{Ker} g^s \setminus \operatorname{Ker} g^{s-1}$$

astfel încît $\{u_1, \ldots, u_{p_1}\}^{\sim} \oplus \operatorname{Ker} g^{s-1} = \operatorname{Ker} g^s = V^\lambda$, și $u_1, u_2, \ldots, u_{p_1}$ sistem liniar independent (aceasta din urmă rezultă de fapt din prima proprietate). Conform observației anterioare, alegerea se poate face prin completarea unei baze oarecare a lui $\operatorname{Ker} g^{s-1}$. Avem

$$\{g(u_1), g(u_2), \ldots, g(u_{p_1})\} \subset \operatorname{Ker} g^{s-1} \setminus \operatorname{Ker} g^{s-2},$$

$$\text{căci } g^{s-1}(g(u_i)) = g^s(u_i) = 0 \text{ și } g^{s-2}(g(u_i)) = g^{s-1}(u_i) \neq 0.$$

Conform lemei 3.18 rezultă că $g(u_1), \ldots, g(u_{p_1})$ este un sistem liniar independent și că $\{g(u_1), \ldots, g(u_{p_1})\}^{\sim} \cap \operatorname{Ker} g^{s-2} = 0$. Atunci $p_1 + d_{s-2} \le d_{s-1}$, deci $p_1 \le p_2$ și completăm o bază a lui $\operatorname{Ker} g^{s-2}$, cu

$$g(u_1), \ldots, g(u_{p_1}), u_{p_1+1}, \ldots, u_{p_2} \in \operatorname{Ker} g^{s-1} \setminus \operatorname{Ker} g^{s-2},$$

la o bază a lui $\operatorname{Ker} g^{s-1}$. Continuăm procedeul și avem:

$$\{g^2(u_1), \ldots, g^2(u_{p_1}), g(u_{p_1+1}), \ldots, g(u_{p_2})\}^{\sim} \subset \operatorname{Ker} g^{s-1} \setminus \operatorname{Ker} g^{s-2}$$

conform lemei 3.18 rezultă că obținem un sistem de vectori liniar independent și că $\{g^2(u_1), \ldots, g^2(u_{p_1}), g(u_{p_1+1}), \ldots, g(u_{p_2})\}^{\sim} \cap \operatorname{Ker} g^{s-3} = \{0\}$.

Rezultă $p_2 \le p_3$ și iar completăm la o bază a lui $\operatorname{Ker} g^{s-2}$, etc. Obținem în final, următoarea diagramă de vectori:

$$
\begin{array}{l}
V^\lambda = \operatorname{Ker} g^s \ni u_1, \ldots, u_{p_1} \\
\quad \cup \\
\quad \operatorname{Ker} g^{s-1} \ni g(u_1), \ldots, g(u_{p_1}); u_{p_1+1}, \ldots, u_{p_2} \\
\quad \cup \\
\quad \operatorname{Ker} g^{s-2} \ni g^2(u_1), \ldots, g^2(u_{p_1}); g(u_{p_1+1}, \ldots, g(u_{p_2})); u_{p_2+1}, \ldots, u_{p_3} \\
\quad \cup \\
\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\quad \cup \\
V_\lambda = \operatorname{Ker} g \ni g^{s-1}(u_1), \ldots, g^{s-1}(u_{p_1}); g^{s-2}(u_{p_1+1}), \ldots, g^{s-2}(u_{p_2}); g^{s-3}(u_{p_2+1}), \ldots, g^{s-3}(u_{p_3}); \ldots \\
\qquad \ldots; u_{p_{s-1}+1}, \ldots, u_{p_s}
\end{array}
$$

care conține $p_1 + p_2 + \ldots + p_s = d_s - d_{s-1} + d_{s-1} - d_{s-2} + \ldots + d_2 - d_1 = d_s = m$ vectori liniar independenți, deci o bază în V_λ ($\dim_K V^\lambda = m$) (faptul că sînt liniar independenți este o consecință a modului în care au fost aleși vectorii prin completarea bazelor și a folosirii sumelor directe).

Remarcăm că, luînd subspațiile lui V^λ generate de vectorii de pe fiecare coloană din diagrama de mai sus, în ordinea coloanelor, obținem pe V^λ ca sumă directă de subspații ciclice, și anume: p_1 subspații ciclice de dimensiune s, $p_2 - p_1$ subspații ciclice de dimensiune $s-1$, $p_3 - p_2$ subspații ciclice de dimensiune $s-2$, etc, ..., $p_s - p_{s-1}$ subspații ciclice de dimensiune 1, deci în total $p_1 + p_2 - p_1 + \ldots + p_s - p_{s-1} = p_s = d_1$ subspații ciclice (atîtea cît multiplicitatea geometrică).

Scriind matricea lui f_i în baza $\mathscr{B}_i'$ de mai sus, aranjată în ordinea parcurgerii coloanelor (adică $\mathscr{B}_i' = \{u_1, g(u_1), \ldots, g^{s-1}(u_1);\ u_2,\ g(u_2), \ldots, g^{s-1}(u_2), \ldots;\ u_{p_1}, \ldots, g^{s-1}(u_{p_1});\ u_{p_1+1}, \ldots, g^{s-2}(u_{p_1+1}); \ldots; u_{p_{s-1}+1}, \ldots, u_{p_s}\}$) și aplicînd corolarul propoziției 3.13 pentru subspații ciclice, obținem un bloc Jordan cu celule Jordan:

$$
M_{f_i}^{\mathscr{B}_i'} = \left(\begin{array}{ccccccccccccc}
\lambda & \cdots & 0 & & \cdots & & & \cdots & & & & & 0 \\
1 & \lambda & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & \ddots & \vdots \text{ (s)} & & & & & & & & & \\
\vdots & & \ddots & \ddots & & & & & 0 & & & & \\
0 & \cdots & 1 & \lambda & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & \vdots \\
 & & & & \lambda & \cdots & 0 & & & & & & \\
 & & & & 1 & \lambda & & & & & & & \\
 & & & \text{(s-1)} & & 1 & \ddots & \vdots & & & & & \\
\vdots & & & & \vdots & & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\
 & & & & 0 & \cdots & 1 & \lambda & & & & & \\
 & & & & & & & & \text{(2)}\ \lambda & 0 & & & \\
\vdots & & 0 & & & & & & 1 & \lambda & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & & & & \lambda & \\
 & & & & & & & & & & & & \ddots \\
0 & & & \cdots & & \cdots & & & \cdots & & & & \lambda
\end{array}\right)
$$

Deci în $M_{f_i}^{\mathscr{B}_i'}$ sînt p_1 celule Jordan de ordinul s, $p_2 - p_1$ celule Jordan de ordinul $s - 1$, ..., $p_s - p_{s-1}$ celule Jordan de ordinul 1; dacă $p_k = p_{k-1}$ atunci nu apar celule de ordinul $s + 1 - k$.

TEOREMA 3.20. Fie V un spațiu vectorial peste K, $\dim_K V = n$ și $f : V \to V$ un endomorfism cu polinomul caracteristic descompus în factori liniari peste K:

$$P_f(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{n_1}(X-\lambda_2)^{n_2}\dots(X-\lambda_p)^{n_p} \in K[X],$$

unde $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$. Atunci există o bază $\mathscr{B}$ în V astfel încît $M_f^{\mathscr{B}}$ să aibă formă canonică Jordan.

DEMONSTRAȚIE. Conform teoremei 3.16 de descompunere primară avem că $V = V^{\lambda_1} \oplus V^{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V^{\lambda_p}$. Conform teoremei 3.19 există în fiecare V^{λ_i} cîte o bază $\mathscr{B}_i$ astfel încît $M_{f_i}^{\mathscr{B}_i}$ să fie bloc Jordan cu scalarul λ_i, $i = 1, 2, \dots, p$. Atunci din teorema 3.14 rezultă că în baza $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2 \cup \dots \cup \mathscr{B}_p$ avem

$$M_f^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} M_{f_1}^{\mathscr{B}_1} & & \cdots & 0 \\ & M_{f_2}^{\mathscr{B}_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & M_{f_p}^{\mathscr{B}_p} \end{pmatrix},$$

formă canonică Jordan.

COROLAR. Fie $A \in M_n(K)$ o matrice pătratică pentru care polinomul caracteristic se descompune în factori liniari peste K,

$$P_A(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{n_i},\ \sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \text{ și } n_1 + \dots + n_p = n.$$

Atunci există o matrice nesingulară $T \in M_n(K)$ astfel încît $T^{-1} \cdot A \cdot T = J$, unde J este o matrice sub forma canonică Jordan.

DEMONSTRAȚIE. Fie $f : K^n \to K^n$ endomorfismul asociat lui A în baza canonică $\mathscr{B}_c$ din K^n (deci $f(x) = x \cdot A^T$).

Fie T matricea de trecere de la baza $\mathscr{B}_c$ la baza $\mathscr{B}$ din teorema 3.20. Atunci $T^{-1}AT = M_f^{\mathscr{B}} = J$.

A jordaniza o matrice $A \in M_n(K)$ ca mai sus, înseamnă a indica o matrice nesingulară $T \in M_n(K)$ astfel încît $T^{-1} \cdot A \cdot T = J$ (forma canonică Jordan).

OBSERVAȚII. 1) Forma canonică Jordan este unică pînă la o permutare a celulelor Jordan.

2) Demonstrațiile teoremelor 3.19 și 3.20 sînt constructive, deci ne oferă un algoritm de aducere la forma canonică Jordan.

3) Teorema 3.20 nu are loc dacă $K = \mathbb{R}$ și $P_f(X)$ nu are toate rădăcinile reale. Pentru aceste cazuri dăm cîteva definiții:

Definiția 3.13. Fie $\pi = X^r - \alpha_{r-1}X^{r-1} - \ldots - \alpha_1 X - \alpha_0 \in K[X]$ un polinom monic (primul coeficient = 1). Matricea

$$C_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_{r-1} \end{pmatrix} \in M_r(K)$$

se numește **companionul matricial al polinomului** π. Polinomul caracteristic al lui C_π este $(-1)^r\pi$.

Fie $P = \pi^k$, $\pi \in K[X]$, $k \geq 1$, π monic și ireductibil peste K, grad $\pi = r$. Matricea

$$J_{\pi^k} = \begin{pmatrix} C_\pi & 0 & & \cdots & 0 \\ N & C_\pi & & & \vdots \\ 0 & N & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & N & C_\pi \end{pmatrix} \in M_{rk}(K)$$

se numește **celulă Jordan** (peste K) **atașată polinomului** π^k, unde matricea $N \in M_r(K)$ are toate elementele nule cu excepția lui n_{1r}, egal cu 1.

Teorema Jordan are loc și în acest caz, doar că celulele Jordan sînt ca acelea definite mai sus. În cazul $K = \mathbb{R}$, dacă $\pi = X - \lambda \in \mathbb{R}[X]$ și $p = \pi^k$, atunci

$$J_{\pi^k} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

[deoarece $C_\pi = (\lambda)$ și $N = (1)$], adică forma anterioară a celulei Jordan. Dacă $\pi = X^2 - \beta X - \gamma \in \mathbb{R}[X]$ cu $\beta^2 + 4\gamma < 0$ (π ireductibil peste $\mathbb{R}$) și $P = \pi^k$, atunci avem:

$$J_{\pi^k} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & \gamma & & & \cdots & & \cdots & \\ 1 & \beta & & & & & & \\ \hline 0 & 1 & 0 & \gamma & & & \mathbf{0} & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \beta & & & & \\ \hline & & 0 & 1 & 0 & \gamma & & \\ & & 0 & 0 & 1 & \beta & & \vdots \\ \hline \vdots & & & & & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & & & & & \\ \hline & & & & 0 & 1 & 0 & \gamma \\ & & & & 0 & 0 & 1 & \beta \end{array}\right),$$

deoarece $C_\pi = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Prezentarea algoritmului de jordanizare

Presupunem că este dată o matrice $A \in M_n(K)$ satisfăcînd condițiile corolarului teoremei 3.20.

ETAPA I–A. Se calculează polinomul caracteristic

$$P_A(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{n_i}$$

şi spectrul $\sigma(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$, $n_1 + ... + n_p = n$.

ETAPA A II–A. Fixăm o valoare proprie $\lambda = \lambda_1 \in \sigma(A)$ şi fie $B = A - \lambda_1 I_n$ (matricea asociată operatorului $g = f - \lambda_1 1_V$ dacă A este asociată lui f). Se calculează şirul ascendent al nucleelor, staționar după un număr finit de paşi:

$$V_{\lambda_1} = \operatorname{Ker} B \subset \operatorname{Ker} B^2 \subset \ldots \subset \operatorname{Ker} B^{s-1} \subset \operatorname{Ker} B^s = K(B) = V^{\lambda_1}$$

(reamintim că dim V_{λ_1} = multiplicitatea geometrică, iar dim $V^{\lambda_1} = n_1$ = multiplicitatea algebrică ale lui λ_1).

ETAPA A III–A. Alegem vectori–coloană liniar independenți $u_1, ..., u_{p_1} \in \operatorname{Ker} B^s \setminus \operatorname{Ker} B^{s-1}$ astfel încît $\operatorname{Ker} B^{s-1} \oplus \{u_1, ..., u_{p_1}\}^{\sim} = \operatorname{Ker} B^s$.

Aceştia vor constitui prima linie a tabelului de mai jos: $u_1, \ldots, u_{p_1}$

Se calculează vectorii $Bu_1, \ldots, Bu_{p_1}$ care aparțin lui Ker $B^{s-1} \setminus \operatorname{Ker} B^{s-2}$ şi alegem vectori liniar independenți $u_{p_1+1}, \ldots, u_{p_2} \in \operatorname{Ker} B^{s-1} \setminus \operatorname{Ker} B^{s-2}$ astfel încît

$$\operatorname{Ker} B^{s-2} \oplus \{Bu_1, \ldots, Bu_{p_1}, u_{p_1+1}, \ldots, u_{p_2}\}^{\sim} = \operatorname{Ker} B^{s-1}.$$

Se poate scrie atunci o a doua linie de vectori a tabelului (*)

$$Bu_1, \ldots, Bu_{p_1}, u_{p_1+1}, \ldots, u_{p_2}.$$

Se calculează apoi prin înmulțirea acestora cu B, vectorii

$$B^2u_1, \ldots, Bu_{p_1+1}, \ldots, Bu_{p_2}$$

şi se aleg vectori liniar independenți $u_{p_2+1}, \ldots, u_{p_3}$ din Ker $B^{s-2} \setminus \operatorname{Ker} B^{s-3}$ astfel încît

$$\operatorname{Ker} B^{s-3} \oplus \{B^2u_1, \ldots, B^2u_{p_1}, Bu_{p_1+1}, \ldots, Bu_{p_2}, u_{p_2+1}, \ldots, u_{p_3}\}^{\sim} = \operatorname{Ker} B^{s-2} \text{etc.}$$

În final se completează următorul tabel:

$$(*)\begin{cases} u_1,\dots,u_{p_1} \\ Bu_1,\dots,Bu_{p_1},u_{p_1+1},\dots,u_{p_2} \\ B^2u_1,\dots,B^2u_{p_1},Bu_{p_1+1},\dots,Bu_{p_2},u_{p_2+1},\dots,u_{p_3} \\ \dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad\dots \\ B^{s-1}u_1,\dots,B^{s-1}u_{p_1},B^{s-2}u_{p_1+1},\dots,B^{s-2}u_{p_2},\dots,u_{p_{s-1}+1},\dots,u_{p_s} \end{cases}$$

Ultima linie constituie o bază pentru $V_{\lambda_1}=\operatorname{Ker}B$. Subspațiile generate de coloanele tabelului (*) sînt B-ciclice; mai precis p_1 dintre acestea sînt de dimensiune s, p_2-p_1 de dimensiune $s-1,\dots,p_s-p_{s-1}$ de dimensiune 1. În plus V^{λ_1} este suma directă a acestor subspații ciclice, al căror număr total este egal cu $p_1+(p_2-p_1)+\dots+(p_s-p_{s-1})=p_s=\dim V_{\lambda_1}$. Reunind toți vectorii din tabelul (*), luînd coloana întîi, apoi a doua, a treia etc., se obține o bază $\mathscr{B}_1$ a lui V^{λ_1}. Notînd $B(\lambda_1)=M^{\mathscr{B}_1}_{f/V^{\lambda_k}}$ (bloc diagonal format din atîtea celule cît $\dim V_{\lambda_1}$).

ETAPA A IV-A. Se reface etapa a III-a pentru fiecare din valorile proprii $\lambda_2,\dots,\lambda_p$, obținînd o bază $\mathscr{B}_2$ pentru $V^{\lambda_2},\dots$ și o bază $\mathscr{B}_p$ pentru V^{λ_p}. Reunind bazele $\mathscr{B}_1,\dots,\mathscr{B}_p$ se obține o bază $\mathscr{B}$ pentru $V^{\lambda_1}\oplus\dots\oplus V^{\lambda_p}=K^n$ (teorema 3.16). Notînd cu T matricea $n\times n$ avînd drept coloane succesiv vectorii din $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2,\dots,\mathscr{B}_p$, se obține o matrice nesingulară și $T^{-1}AT=J$. Dar

$$J=M_f^{\mathscr{B}}=\begin{pmatrix} B(\lambda_1) & & \cdots & 0 \\ & B(\lambda_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & B(\lambda_p) \end{pmatrix},$$

unde fiecare bloc diagonal $B(\lambda_k)=M^{\mathscr{B}_k}_{f/V^{\lambda_k}}$, $1\le k\le p$ este format din atîtea celule Jordan cît $\dim V_{\lambda_k}$.

EXEMPLE. Fie 1) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & -4 & -3 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$. În acest caz, $A\in M_3(\mathbb{R})$ și

$$P_A(X)=-(X+1)(X-2)^2,\ \text{deci } n_1=1,\ n_2=2,\ \sigma(A)=\{-1,2\}.$$

Considerăm mai întîi $\lambda_1=-1$, cu $n_1=1$. Avem $B=A-\lambda_1I_3$, și $V_{\lambda_1}=V^{\lambda_1}=$ subspațiul generat de $u_1=(0,1,-1)^T$. Tabelul (*) corespunzînd lui λ_1 este deci redus la un singur vector:

$$(*)\ u_1.$$

Apoi pentru $\lambda_2 = 2$ avem $n_2 = 2$ şi $B = A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -6 & -3 \\ 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$; rezultă

V_{λ_2} = subspaţiul lui $\mathbb{R}^3$ generat de $(1, 0, -1)$; apoi $\dim V_{\lambda_2} = 1$,

$V^{\lambda_2} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$ şi $\dim V^{\lambda_2} = 2$. Şirul ascendent al nucleelor este $V_{\lambda_2} \subset V^{\lambda_2}$.

Alegem $u_2 \in V^{\lambda_2} \setminus V_{\lambda_2}$ astfel încît $V_{\lambda_2} \oplus \{u_2\}^{\sim} = V^{\lambda_2}$; de exemplu $u_2 = (-2, 1, 0)^T$. Tabelul (*) arată în acest caz astfel:

$$(*) \begin{cases} u_2 \\ Bu_2 \end{cases}$$

unde

$$Bu_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -6 & -3 \\ 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Luînd matricea

$$T = (u_1 \mid u_2 \mid u_3) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rezultă

$$T^{-1}AT = J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ din $M_4(\mathbb{R})$.

În acest caz, $P_A(X) = (X - 1)^4$ şi $\sigma(A) = \overset{n_\lambda = 4}{\{1\}}$. Atunci pentru $\lambda = 1$ avem $\dim_{\mathbb{R}} V^\lambda = 4$, deci $V^\lambda = \mathbb{R}^4$. Şirul nucleelor este

$$V_\lambda = \operatorname{Ker} B \subset \operatorname{Ker} B^2 \subset V^\lambda = \mathbb{R}^4,$$

unde

$$B = A - I_3.$$

După un calcul evident, $V_\lambda = \{(a, b, -b, a - 2b)^T \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ şi $\dim_{\mathbb{R}} V_\lambda = 2$.
Apoi $\operatorname{Ker} B^2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ şi $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} B^2 = 3$.
Alegem $u_1 \in V^\lambda \setminus \operatorname{Ker} B^2$, cu $\operatorname{Ker} B^2 \oplus \{u_1\}^{\sim} = V^\lambda$; de exemplu $u_1 = (1\ 0\ 0\ 0)^T$.

Atunci

$$Bu_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Avem evident $V_\lambda \oplus \{Bu_1\}^\sim = \text{Ker}\, B^2$; calculăm

$$B^2 u_1 = B(Bu_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in V_\lambda .$$

În fine alegem un vector $u_2 \in V_\lambda$ astfel încît $\{B^2 u_1, u_2\}$ să constituie o bază pentru V_λ; de exemplu $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tabelul (*) este aici de forma

$$\begin{cases} u_1 \\ Bu_1 \\ B^2 u_1, u_2 \end{cases}$$

Luăm

$$T = (u_1 \mid Bu_1 \mid B^2 u_1 \mid u_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

şi conform teoremei anterioare,

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Luînd

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 & -6 \\ -6 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

rezultă $P_A(X) = (X+1)^2 (X-2)^2$ deci $\sigma(A) = \left\{ \overset{n_1=2}{2}, \overset{n_2=2}{-1} \right\}$. În acest caz, V_{λ_1} = subspaţiul lui $\mathbb{R}^4$ generat de $(0, 1, 0, -1)^T$, deci $\dim V_{\lambda_1} = 1$. Apoi

$$V^{\lambda_1} = \text{Ker}\, B^2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mid x_1 - x_2 = 0,\, x_1 + x_4 = 0\},$$

unde $B = A - 2I_4$; $\dim V_{\lambda_2} = 2$ şi $V^{\lambda_2} = V_{\lambda_2}$ = subspaţiul lui $\mathbb{R}^4$ generat de $(1, 2, 0, 0)^T$, $(0, 2, 0, 1)^T$. Tabelul (*) pentru $\lambda = \lambda_1 = 2$ este de forma

$$\begin{cases} u_1 = (0,0,1,0)^T \\ Bu_1 = (A - 2I_4)u_1 = (1,1,0,-1)^T. \end{cases}$$

Pentru $\lambda = \lambda_2 = -1$, tabelul este de forma

$$(*)\ u_3, u_4$$

unde vectorii u_3, u_4 constituie o bază pentru $V_{\lambda_2} = \operatorname{Ker}(A + I_4)$; de exemplu, $u_3 = (1, 2, 0, 0)^T$ şi $u_4 = (0, 2, 0, 1)^T$. Luînd

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ rezultă } T^{-1}AT = J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

OBSERVAŢIE. Aplicaţiile jordanizării sînt numeroase. De exemplu, dacă $A \in M_n(K)$ şi $T^{-1}AT = J$ (forma canonică Jordan), atunci

$$(T^{-1}AT)^n = T^{-1} \cdot A^n \cdot T = J^n,$$

deci $A^n = T \cdot J^n \cdot T^{-1}$ pentru orice $n \geq 1$; astfel se calculează puterile naturale ale oricărei matrici (reducîndu-le la puterile lui J, care se efectuează pe celule).

Vom vedea mai tîrziu că sistemele diferenţiale liniare de ordinul I cu coeficienţi constanţi se rezolvă folosind jordanizarea, care în plus permite "decuplarea" sistemelor respective, în subsisteme mai mici, asociate unor celule Jordan.

§ 4. Metode numerice în algebra liniară

4.1. Rezolvarea sistemelor liniare

Fie un sistem liniar $AX = B$, cu $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrice nesingulară. Atunci sistemul admite o soluţie, unică. Pentru rezolvarea lui efectivă se pot aplica metode directe (Gauss) sau metode iterative (acestea din urmă recomandabile pentru n mare). Regula lui Cramer este nepractică şi are doar o însemnătate principială. Într-adevăr, aplicarea ei conduce la calculul a $n + 1$ determinanţi de ordin n. Dar calculul unui determinant de ordin n revine la a calcula o sumă de $n!$ termeni, fiecare termen fiind produsul a n factori. Aşadar, pentru a aplica efectiv regula lui Cramer, trebuie efectuate cel puţin $N = (n + 1) \cdot (n!)$ operaţii. Deoarece $n! > n^n e^{-n}$ pentru orice $n \geq 1$, rezultă $N > (n+1) \cdot n^n \cdot e^{-n}$; de exemplu, pentru $n = 30$, rezultă $N > 10^{25}$. Astfel, dacă se efectuează 10^8 operaţii pe secundă, rezolvarea unui sistem liniar de 30 de ecuaţii şi 30 de necunoscute prin regula lui Cramer ar necesita cel puţin 10^9 ani!

a) Metoda lui Gauss (K. F. Gauss, 1777–1855)

Fie un sistem liniar

$$(1)\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i,n+1};\ 1 \le i \le n$$

(scris matriceal $A \cdot X = B$), unde se presupune că $\det A \neq 0$. Prezentăm pe scurt metoda Gauss.

Să presupunem că $a_{11} \neq 0$ (ceea ce se obține printr-o renumerotare a necunoscutelor; deoarece $\det A \neq 0$, cel puțin unul din coeficienții a_{1j}, $1 \le j \le n$, este nenul). Atunci prima ecuație se scrie

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1,n+1}^{(1)},\ \text{unde } a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}\ (2 \le j \le n+1).$$

Înmulțind aici cu a_{i1} pentru $i = 2, \ldots, n$, scăzînd din ecuația a i–a și punînd

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1j}^{(1)}a_{i1}\ (2 \le i \le n,\ 2 \le j \le n+1),$$

se obține ecuația

$$\sum_{j=2}^{n} a_{ij}^{(1)}x_j = a_{i,n+1}^{(1)}\ \text{pentru } i = 2, \ldots, n.$$

Se constată că am efectuat $n + 1 + (n+1)(n-1) = n^2 + n$ operații. Așadar sistemul inițial (1) este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1,n+1}^{(1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = a_{2,n+1}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n = a_{3,n+1}^{(1)} \\ \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = a_{n,n+1}^{(1)} \end{cases}$$

Presupunînd că $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (ceea ce se obține renumerotînd necunoscutele) și repetînd procedeul anterior se obține sistemul echivalent cu (1)

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1,n+1}^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = a_{2,n+1}^{(2)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = a_{3,n+1}^{(2)} \\ \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = a_{n,n+1}^{(2)} \end{cases}$$

(la exponent am indicat numărul de ordine al etapei în care se calculează coeficienții respectivi).

Iterînd procedeul, se va obține în final un sistem triunghiular echivalent cu (1), anume

$$(2)\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1,n+1}^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = a_{2,n+1}^{(2)} \\ x_3 + \ldots + a_{3n}^{(3)}x_n = a_{3,n+1}^{(3)} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n = a_{n-1,n+1}^{(n-1)} \\ x_n = a_{n,n+1}^{(n)} \end{cases}$$

Acest sistem se rezolvă "de jos în sus". Se constată că numărul total de operații este

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+k) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = 0(n^3).$$

OBSERVAȚII. 1) Pentru a obține o precizie mărită se recomandă ca la fiecare pas *k*, în cazul cînd elementul $a_{kk}^{(k-1)}$ este nul sau "foarte mic", să se schimbe locul ecuațiilor astfel încît pe locul acestui element să fie situat elementul cel mai mare (în modul) dintre $a_{pk}^{(k-1)}$ cu $p = k+1, \ldots, n$, numit **pivot** (pentru pasul respectiv).

2) Se observă că în aplicarea metodei Gauss anterioare se obține "en passant" și valoarea determinantului matricei *A*, anume

$$A = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \ldots a_{nn}^{(n-1)}.$$

EXEMPLE. 1) Rezolvăm prin metoda Gauss sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 4x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$$

urmînd etapele anterioare. Prima ecuație se scrie echivalent $x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 2$. Înmulțind-o cu -4 și cu -1 și adunînd-o la ecuațiile a doua și a treia, se obține sistemul echivalent

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 \qquad = 2 \\ \quad -2x_2 - \ x_3 = -7 \\ \quad \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

Se observă că dintre elementele -2, $\frac{1}{2}$ (coeficienții lui x_2 din ecuațiile a doua și a treia) primul are modulul mai mare, astfel că nu trebuie modificată ordinea ecuațiilor. Înmulțind ecuația a doua cu $-\frac{1}{2}$ și eliminînd apoi x_2 se obține sistemul triunghiular echivalent cu cel inițial:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 2 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{7}{2} \\ x_3 = -\frac{15}{7} \end{cases}$$

Se obține soluția $\left(-\frac{2}{7}, \frac{32}{7}, -\frac{15}{7}\right)$.

2) Rezolvăm sistemul tri-bandă

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ 5x_2 + 5x_3 + x_4 = 4 \\ -x_3 + 2x_4 = 20 \end{cases}$$

Prima ecuație este deja pregătită. Înmulțind-o cu –2 și adunînd-o cu a doua se obține sistemul

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ -x_2 - x_3 = -9 \\ \boxed{5}x_2 + 5x_3 + x_4 = 4 \\ -x_3 + 2x_4 = 20 \end{cases}$$

Intervertind ecuațiile a doua și a treia (pivotul fiind indicat în pătrățel), se obține sistemul

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_2 + x_3 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{4}{5} \\ -x_2 - x_3 = -9 \\ x_3 + 2x_4 = 20 \end{cases}$$

Eliminînd x_2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_2 + x_3 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5}x_4 = -\frac{41}{5} \\ \boxed{-1}x_3 + 2x_4 = 20 \end{cases}$$

Forma triunghiulară se obține intervertind ultimele două ecuații (pivotul pentru x_3 fiind indicat în pătrățel). Soluția sistemului este (–218, 111, –102, –41).

Se poate constata că pentru un sistem liniar cu matricea tribandă cu n ecuații și n necunoscute, numărul total de operații este $9n$.

b) Metoda iterativă a lui Jacobi (K. G. Jacobi, 1804–1851)

Să presupunem că un sistem liniar $A \cdot X = B$ [cu $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ și A nesingulară] este echivalent cu un sistem de forma $X = C \cdot X + D$ unde $C \in M_n(\mathbb{R})$, $D \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, cu condiția ca pentru matricea $C = (c_{ij})_{1\le i,\, j\le n}$ să avem

$$\|C\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 < 1$$

TEOREMA 4.1. (Jacobi–Banach). În aceste condiții, șirul de vectori–coloană $X^{(k)}$ definit prin recurență astfel: $X^{(0)}$ = arbitrar, $X^{(k+1)} = C \cdot X^{(k)} + D$ este convergent către soluția ξ a sistemului. În plus, are loc formula aproximativă $\xi \simeq X^{(k)}$, cu evaluarea erorii

$$\left\|X^{(k)} - \xi\right\| \le \frac{\|C\|^k}{1 - \|C\|}\left\|X_1 - X_0\right\|,\ k \gg 1.$$

DEMONSTRAȚIE. Să considerăm aplicația

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, X \to C \cdot X + D$$

(identificăm elementele lui $\mathbb{R}^n$ cu vectorii-coloană n–dimensionali). Pentru orice $X, Y \in \mathbb{R}^n$ avem

$$\mathrm{d}(\varphi(X), \varphi(Y)) = \left\|\varphi(X) - \varphi(Y)\right\| = \left\|(C \cdot X + D) - (C \cdot Y + D)\right\| =$$
$$= \left\|C(X - Y)\right\| \le \left\|C\right\| \cdot \left\|X - Y\right\| = \left\|C\right\| \cdot \mathrm{d}(X, Y).$$

Deoarece $\|C\| < 1$, rezultă că aplicația φ este o contracție; restul rezultă din principiul contracției al lui ST. BANACH (1892–1945), tratat la cursul de Analiză matematică.

4.2. Inversarea matricelor

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice pătratică nesingulară ($\det A \ne 0$). Calculul inversei lui A după formula $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(A_{ij})^T_{1\le i,\, j\le n}$ este impropriu pentru aplicarea metodelor numerice, deoarece revine la calculul a n^2 determinanți de ordin $n - 1$. Folosind de exemplu algoritmul Gauss, putem rezolva simultan cele n sisteme

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = e_j, \text{ unde } e_j = {}_j\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, 1 \le j \le n.$$

Pentru $j = 1, 2, ..., n$ se obțin respectiv soluțiile $X_1, X_2, ..., X_n$ (vectori–coloană) astfel încît $A \cdot X_j = e_j$. Considerînd matricea

$$X = (X_1 \mid X_2 \mid ... \mid X_n),$$

rezultă

$$A \cdot X = (AX_1 \mid AX_2 \mid \dots \mid AX_n) = (e_1 \mid e_2 \mid \dots \mid e_n) = I_n$$

şi ca atare $A^{-1} = X$. În practică, pornind de la matricea $2n \times n$, $(A \mid I_n)$, se obţine, prin operaţii de tip Gauss, o matrice de tipul $(I_n \mid A^{-1})$ şi organizînd astfel lucrurile, calculul lui A^{-1} necesită $2n^2$ celule de memorie şi $2n^3$ operaţii.

Pentru valori mici ale lui n se recomandă următoarea metodă: fiind dată A, se scrie sistemul liniar $A \cdot x = y$ cu x, y vectori–coloană n–dimensionali, care se rezolvă prin metode elementare şi se obţine $x = By$. Atunci $A^{-1} = B$.

EXEMPLE. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Scriem sistemul $A \cdot x = y$, deci explicit

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = y_1 \\ x_1 + 4x_2 = y_2. \end{cases}$$

Înmulţind prima ecuaţie cu –4 şi adunînd cu a doua, rezultă $x_1 = \frac{4}{7}y_1 - \frac{1}{7}y_2$ şi apoi $x_2 = -\frac{1}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2$, deci

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

2) Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, atunci sistemul $A \cdot x = y$ se scrie

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_1 = y_3 \end{cases}$$

de unde $x_1 = y_3$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_1 - 2y_3$ şi ca atare, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4.3. Calculul rangului unei matrice; forma eşalon

Dacă $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ este o matrice, atunci am văzut că rangul ei $\rho(A)$ este egal cu dimensiunea subspaţiului lui $\mathbb{R}^m$ generat de cei n vectori–coloană ai lui A (deoarece acest subspaţiu este tocmai imaginea aplicaţiei liniare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \to A \cdot x$, asociate lui A). Deoarece $\rho(A) = \rho(A^T)$, un rezultat similar are loc pentru liniile lui A.

Reamintim că am numit elementare următoarele trei tipuri de transformări asupra coloanelor lui A: intervertirea a două coloane oarecare; înmulţirea unei coloane cu un scalar nenul şi adunarea la o coloană a elementelor unei alte coloane. Deoarece subspaţiul lui $\mathbb{R}^m$ generat de coloanele lui A nu se modifică, rezultă că rangul lui A nu se modifică prin

aplicarea unei transformări elementare (sau a unei succesiuni de astfel de transformări) asupra coloanelor lui A.

Prin transformări elementare asupra coloanelor, din orice matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang r se poate obține o matrice de forma

$$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & c_{i_2 2} & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & * & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & c_{i_3 3} & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & * & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & c_{i_r r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; \quad 1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_r,$$

(primele r coloane, respectiv ultimele $n-r$ coloane)

unde $c_{11}, c_{i_2 2}, \ldots, c_{i_r r}$ sînt scalari nenuli (numiți **pivoți**); astfel de forme se mai numesc **matrice eşalon pe coloane.** În mod similar se definesc formelele eşalon pe linii.

EXEMPLE. 1) Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; atunci intervertind coloanele întîia şi a treia, apoi înmulțind prima coloană cu $-\frac{1}{2}$ şi adunînd la a doua, se obține:

$$A \to \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şi aceasta este o formă eşalon pe coloane pentru A; rezultă că $\rho(A) = 1$.

2) Avem

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \\ 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \\ 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

formă eşalon pe coloane pentru A; aşadar, $\rho(A) = 2$.

3) Ne propunem să aducem la forma eşalon pe linii matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şi $\rho(A) = 2$.

Aplicînd transformări elementare atît asupra coloanelor cît şi asupra liniilor unei matrice A de rang r, se poate obţine în final forma – eşalon

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dacă $A \to B$ şi B este o formă eşalon pe coloane a lui A, atunci $\rho(B) = \rho(A)$ şi coloanele lui B generează ImA; în mod similar, dacă $A \to C$ şi C este o formă – eşalon a lui A pe linii, atunci $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, C$ (pentru că sistemele liniare şi omogene $Ax = 0$ şi $Cx = 0$ sînt evident echivalente). Reamintim că dacă $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $\rho(A) = r$, atunci spaţiul vectorial $\mathrm{Ker}\, A$ al soluţiilor sistemului liniar şi omogen $Ax = 0$ are dimensiunea $n - r$; în particular, dacă $r = n$, atunci sistemul admite numai soluţia banală $x = 0$.

APLICAŢII. Să considerăm o reţea electrică (prin care trece un curent constant) avînd m noduri (vîrfuri) şi n arce. În fiecare vîrf al reţelei suma intensităţilor curenţilor "care intră" este egală cu suma celor "care ies" (de exemplu în figura I.25 avem $m = 4$, $n = 6$ şi în nodul 1 avem $I_3 = I_1 + I_4$). De asemenea, suma căderilor de tensiune în lungul oricărui contur închis este nulă (de exemplu, în figură dacă E_k este căderea de tensiune pe arcul I_k în direcţia săgeţii, atunci pentru triunghiul 143 avem $E_4 + E_6 + E_3 = 0$). Acestea sînt binecunoscutele legi ale lui G. R. KIRCHHOFF (1824–1887), care admit o reprezentare matriceală remarcabilă.

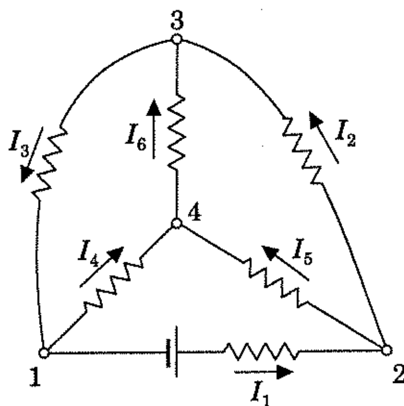


Figura I.25.

Să notăm cu $M = (a_{ij})_{1 \le i \le m; 1 \le j \le n}$ matricea de incidenţă a reţelei, în care fiecare element a_{ij} este egal respectiv cu 0, 1 sau -1 după cum arcul j nu trece prin vîrful i, "iese" din i sau "intră" în i. De exemplu în cazul figurii anterioare,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci legea lui Kirchhoff relativ la curenți se scrie matriceal astfel

$$M \cdot I = 0, \text{ unde } I = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}$$

este vectorul coloană al curenților pe cele n arce. Pentru a scrie matriceal cealaltă lege, vom fixa în mod convențional în primul vîrf un potențial p_1 egal cu 0 şi vom defini potențialul p_i în fiecare vîrf i astfel încît căderea de tensiune între orice două vîrfuri i, j (presupuse unite şi parcurse în sensul $i \to j$) să fie egală cu diferența $p_i - p_j$ a potențialelor. A doua lege a lui Kirchhoff afirmă deci că, în lungul oricărui contur închis al rețelei, suma căderilor de tensiune este nulă (deci ne întoarcem cu aceeaşi valoare a potențialului cu care am pornit). Ca atare, notînd cu p vectorul–coloană m–dimensional al potențialelor şi cu E vectorul–coloană n–dimensional al căderilor de tensiune, rezultă că $E = M^T \cdot p$.

Reținem aşadar că $I \in \operatorname{Ker} M$ şi $E \in \operatorname{Im}(M^T)$; în particular, avem $E^T \cdot I = p^T \cdot M \cdot I = 0$. Scriind matricea de incidență M asociată unui circuit, intensitățile se determină rezolvînd sistemul liniar–omogen $MI = 0$, ceea ce se poate face utilizînd forma eşalon pe linii a matricei M. Rangul matricei M joacă şi el un rol important, legat de exemplu de contururile independente ale circuitului.

Capitolul II GEOMETRIE LINIARĂ

§1. Spații euclidiene

1.1. Produs scalar, normă, ortogonalizare

Începem acest capitol cu studiul noțiunii fundamentale de spațiu cu produs scalar (numit și spațiu prehilbertian), care înlesnește o extindere fascinantă și utilă a geometriei euclidiene, permițînd să vorbim de funcții ortogonale, de norma unei matrice, de unghi a doi vectori n–dimensionali nenuli, de unghi a două funcții nenule etc. Spațiile cu produs scalar și operatorii pe astfel de spații constituie totodată obiectele matematice principale ale mecanicii cuantice.

Definiția 1.1. Un spațiu vectorial real V se numește **prehilbertian real** dacă există o aplicație $V \times V \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to <x, y>$, astfel încît pentru orice $x, y, z \in V$ și pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, să fie îndeplinite proprietățile:

PS.1. $<x, y> = <y, x>$;

PS.2. $<x + z, y> = <x, y> + <z, y>$;

PS.3. $<\lambda x, y> = \lambda <x, y>$;

PS.4. $(\forall)\, x \in V$, numărul real $<x, x>$ este pozitiv și este nul dacă și numai dacă $x = 0$.

Aplicația $V \times V \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to <x, y>$, se numește **produs scalar real;** spațiile prehilbertiene reale finit dimensionale se mai numesc **spații euclidiene reale.**

Se verifică imediat prin inducție că dacă $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n \in V$ și $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$, atunci

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j \left\langle x_i, y_j \right\rangle.$$

Punînd $\lambda = -1$ în PS.3, rezultă $<-x, y> = -<x, y>$ pentru orice $x, y \in V$.

Doi vectori $x, y \in V$ se numesc **ortogonali** dacă $<x, y> = 0$ și se scrie $x \perp y$.

Relația de ortogonalitate este, conform PS.1, simetrică. Deoarece

$$<u, 0> = <u, v-v> = <u, v> + <u, -v> = <u, v> - <u, v> = 0,$$

rezultă că $u \perp 0$ pentru orice $u \in V$. De asemenea, observăm că dacă $u \perp u$, atunci $u = 0$ conform PS.4. Pentru orice $x \in V$ notăm $\|x\| = \sqrt{<x, x>}$; evident, conform PS.4, $\|x\| \geq 0$ și $\|x\| = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$. Numărul $\|x\|$ se

numeşte **norma** lui x; vom vedea că într-adevăr se verifică proprietăţile unei norme pe V.

EXEMPLE. 1) $V = \mathbb{V}_3$ cu produsul scalar uzual al vectorilor: pentru orice

$$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{V}_3,\ \boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k} \text{ şi } \boldsymbol{w} = y_1\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + y_3\boldsymbol{k}$$

avem

$$<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}> = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

$\mathbb{V}_3$ este astfel un spaţiu euclidian (deoarece au loc evident proprietăţile PS.1 – PS.4).

2) Fie $V = \mathbb{R}^n$. Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, punînd $<x, y> = x_1y_1 + ... + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$, se obţine un produs scalar numit euclidian.

Dacă identificăm spaţiile vectoriale reale $M_{n,1}(\mathbb{R})$ şi $\mathbb{R}^n$, atunci este evident că se poate exprima produsul scalar euclidian în scriere matriceală astfel:

$$<x, y> = X^T \cdot Y,$$

unde X, respectiv Y, este matricea–coloană a coordonatelor lui x, respectiv y, în baza canonică. Spaţiul $V = \mathbb{R}^n$ cu produsul scalar de mai sus este "prototipul" spaţiului euclidian real, într-un sens care va fi precizat mai departe. Mai general, pe spaţiul vectorial real $M_{m,n}(\mathbb{R})$ se poate defini produsul scalar următor: pentru orice $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, se pune $<A, B>$ = urma matricii $A^T \cdot B$; aşadar, dacă $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, atunci

$$< A, B >= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ij}.$$

Acesta este de fapt produsul euclidian în spaţiul $M_{m,n}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{mn}$.

3) Fie $V = C^0_{[a,b]}$ (spaţiul vectorial real al funcţiilor continue $[a, b] \to \mathbb{R}$); se poate considera pe V produsul scalar definit prin

$$< f, g > = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, (\forall) f, g \in C^0_{[a,b]}.$$

V este un spaţiu prehilbertian real (infinit dimensional).

TEOREMA 1.1. Fie V un spaţiu prehilbertian real.

(a) Pentru orice $x, y \in V$ are loc relaţia $|< x, y >| \le \|x\| \cdot \|y\|$ (inegalitatea lui H. A. Schwartz, 1843–1921).

(b) V este spaţiu vectorial normat, relativ la norma $V \to \mathbb{R}$, $x \to \|x\|$;

(c) $(\forall)\, x, y \in V$, $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (regula paralelogramului).

DEMONSTRAŢIE. a) Dacă $y = 0$, atunci $\|y\| = 0$, $<x, y> = 0$ şi relaţia este evidentă. Presupunem $y \neq 0$ şi fie $\lambda \in \mathbb{R}$. Atunci conform PS.4,

$$<x + \lambda y, x + \lambda y> \ge 0,$$

adică

$$<x, x> + 2\lambda <x, y> + \lambda^2 <y, y \ge 0,$$

deci

$$\|y\|^2 \cdot \lambda^2 + 2 \cdot <x, y> \cdot \lambda + \|x\|^2 \ge 0, (\forall)\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Din regula semnului trinomului de gradul doi rezultă în mod necesar că discriminantul trinomului este negativ, deci

$$<x, y>^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0,$$

adică

$$|<x, y>| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

b) Pentru orice $x \in V$ şi orice $\lambda \in \mathbb{R}$ avem

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Apoi pentru orice $x, y \in V$ avem

$$\|x + y\| = \sqrt{< x + y, x + y >} = \sqrt{\|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2} = \|x\| + \|y\|.$$

În sfîrşit, avem $\|x\| = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$, deci $x \to \|x\|$ este o normă pe V şi V devine un spaţiu vectorial normat.

c) Pentru orice $x, y \in V$ avem

$$\|x + y\|^2 = < x + y, x + y > = \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2,$$

$$\|x - y\|^2 = < x - y, x - y > = \|x\|^2 - 2 < x, y > + \|y\|^2,$$

şi adunînd aceste relaţii, se obţine relaţia dorită.

OBSERVAŢII. Pentru orice $x \in V$ (spaţiu prehilbertian real), norma $\|x\|$ se mai numeşte **lungimea vectorului** x; dacă $x, y \in V$ numărul real $d(x, y) = \|x - y\|$ se numeşte **distanţa** între x şi y; iar dacă x, y sînt nenuli, atunci conform inegalităţii lui Schwartz $\frac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|} \in [-1, 1]$ şi numim **unghi al vectorilor** x, y numărul real $\theta \in [0, \pi]$ astfel încît

$$\cos\theta = \frac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Deoarece orice spaţiu prehilbertian V este un spaţiu metric relativ la distanţa $d(x, y) = \|x - y\|$, $(\forall)$ $x, y \in V$, se poate vorbi de convergenţa şirurilor de elemente din V.

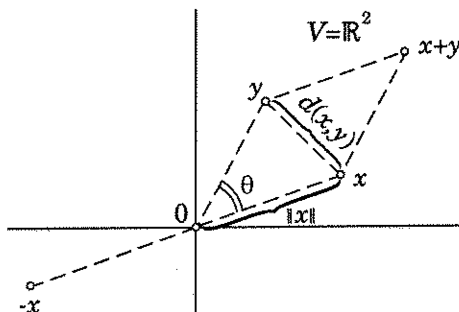


Figura II.1.

DEFINIŢIA 1.2. Se numeşte **spaţiu Hilbert real** orice spaţiu prehilbertian real, care este complet (DAVID HILBERT, 1862–1943).

1) $V = \mathbb{R}^n$ este un spaţiu Hilbert real.

2) $V = C^0_{[a, b]}$ nu este complet, deci nu este spaţiu Hilbert.

DEFINIŢIA 1.3. Un spaţiu vectorial complex V se numeşte **prehilbertian complex** dacă există o aplicaţie $V \times V \to \mathbb{C}$, $(x, y) \to <x, y>$, astfel încît pentru orice $x, y, z \in V$ şi pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$ să fie îndeplinite proprietăţile:

$$<x, y> = \overline{<y, x>},\ <x+z, y> = <x, y> + <z, y>,\ <\lambda x, y> = \lambda <x, y>;$$

în plus numărul real $<x, x>$ (real deoarece $<x, x> = \overline{<x, x>}$) este pozitiv şi este nul dacă şi numai dacă $x = 0$. Aplicaţia $V \times V \to \mathbb{C}$, $(x, y) \to <x, y>$, se numeşte **produs scalar complex;** spaţiile prehilbertiene complexe finit dimensionale se mai numesc **spaţii euclidiene complexe** (sau spaţii **unitare**).

Produsul scalar complex are aceleaşi proprietăţi ca şi cel real şi demonstraţiile sînt aproape identice. Deoarece inegalitatea lui Schwartz se obţine puţin diferit de cazul real, vom da argumentul: pentru $y = 0$ la fel; fie $y \neq 0$ şi $\lambda \in \mathbb{C}$. Atunci

$$\langle x+\lambda y,\ x+\lambda y\rangle \geq 0,$$

adică

$$\lambda \cdot \overline{\lambda} \cdot \|y\|^2 + \overline{\lambda} <x, y> + \lambda <y, x> + \|x\|^2 \geq 0.$$

Dacă $<x, y> = 0$, inegalitatea Schwartz este evidentă.

Dacă $<x, y> \neq 0$, alegem $\lambda = t\dfrac{<x, y>}{|<x, y>|}$, cu $t \in \mathbb{R}$, şi obţinem

$$t^2\|y\|^2 + 2t\,|<x, y>| + \|x\|^2 \geq 0,\ (\forall) t \in \mathbb{R}.$$

Din regula semnului trinomului de gradul doi obţinem

$$|<x, y>|^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0,$$

adică

$$|<x, y>| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

În cazul spaţiilor prehilbertiene complexe se definesc analog ortogonalitatea, norma, distanţa, dar nu se defineşte unghiul a doi vectori. Un spaţiu prehilbertian complex complet se numeşte **spaţiu Hilbert complex.**

EXEMPLE. 1) Fie $V = \mathbb{C}^n$. Pentru orice $x, y \in \mathbb{C}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, punînd

$$<x, y> = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i},$$

se obţine un produs scalar complex.

$V = \mathbb{C}^n$ cu acest produs scalar este "prototipul" spaţiului euclidian complex; el este şi spaţiu Hilbert. Analog putem exprima produsul scalar în scrierea matriceală: $<x, y> = X^T \cdot \overline{Y}$.

2) Fie $V = \{f : [a, b] \to \mathbb{C} \mid f \text{ continuă}\}$, spaţiul vectorial complex al funcţiilor continue $[a, b] \to \mathbb{C}$, cu produsul scalar complex.

$$<f, g> = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x,\ (\forall) f, g \in V.$$

Se obţine un spaţiu prehilbertian complex infinit dimensional, care nu este un spaţiu Hilbert (deoarece nu este complet).

DEFINIŢIA 1.4. Fie V un spaţiu prehilbertian real sau complex. Un sistem (finit sau numărabil) de vectori nenuli $\{e_1, e_2, ..., e_i, ...\}$ se numeşte **sistem**

ortogonal de vectori dacă $<e_i, e_j> = 0$ pentru orice $i \neq j$. El se numeşte **sistem ortonormal de vectori** dacă

$$(\forall)\, i, j, <e_i, e_j> = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } i \neq j \\ 1 & \text{pentru } i = j \end{cases}$$

Aşadar, $\|e_i\| = 1$, pentru orice i.

Fie V un spaţiu euclidian real sau complex de dimensiune n. Un sistem ortonormal (respectiv ortogonal) cu n vectori se numeşte **bază ortonormală (respectiv ortogonală).**

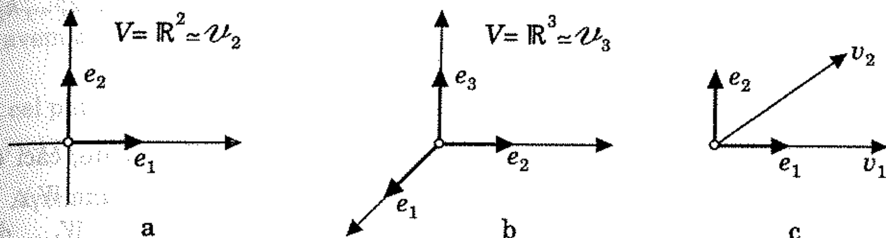


Figura II.2.

LEMA 1.2. a) Fie V un spaţiu prehilbertian real sau complex şi $L \subset V$ un sistem ortogonal de vectori. Atunci L este liniar independent.

b) Fie V un spaţiu euclidian real sau complex şi $\mathscr{B} \subset V$ o bază ortogonală. Atunci $\mathscr{B}$ este bază în V.

DEMONSTRAŢIE. a) Presupunem că L ar fi liniar dependent şi fie

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k = 0,$$

cu $e_i \in L$, $\alpha_i \in K$ ($K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) şi $\alpha_{i_0} \neq 0$. Avem

$<\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_k e_k, e_{i_0}> = \alpha_1 <e_1, e_{i_0}> + \dots + \alpha_{i_0} <e_{i_0}, e_{i_0}> + \dots + \alpha_k <e_k, e_{i_0}> = 0$, deci $\alpha_{i_0} <e_{i_0}, e_i> = 0$, de unde rezultă $\alpha_{i_0} = 0$; contradicţie.

b) Din punctul anterior rezultă că $\mathscr{B}$ este sistem liniar independent şi conform corolarului teoremei I.2.3., $\mathscr{B}$ avînd $n = \dim V$ vectori, rezultă că este bază în V.

TEOREMA 1.3. (ortogonalizarea Gram–Schmidt; I. P. Gram, 1850–1916; E. Schmidt, 1876–1959). Fie V un spaţiu prehilbertian real sau complex, $L = \{v_1, v_2, \dots, v_k, \dots\}$ un sistem liniar independent de vectori şi fie, pentru orice $k \geq 1$, W_k subspaţiul generat de $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Atunci există un sistem ortogonal de vectori $L' = \{e_1, e_2, \dots, e_k, \dots\}$ astfel încît subspaţiul W'_k generat de $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ să coincidă cu W_k, pentru orice $k = 1, 2, \dots$.

DEMONSTRAŢIE. Inducţie după k; pentru $k = 1$ luăm $e_1 = v_1$ ($v_1 \neq 0$ căci L este sistem liniar independent) şi evident $W'_1 = W_1$. Pentru $k = 2$ luăm $e_2 = v_2 + \alpha e_1$, $\alpha \in K$, şi determinăm α astfel încît $<e_2, e_1> = 0$. Obţinem

$<v_2, e_1> + \alpha<e_1, e_1> = 0$, deci $\alpha = -\frac{<v_2, e_1>}{\|e_1\|^2}$ ($\|e_1\| \neq 0$ deoarece $e_1 \neq 0$). Deoarece $e_1 = v_1$ şi $e_2 = v_2 + \alpha v_1$ avem $e_1, e_2 \in W_2$ şi atunci $W_2' \subset W_2$. Dar avem şi $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2 - \alpha e_1$, deci $v_1, v_2 \in W_2'$ şi atunci $W_2 \subset W_2'$, adică $W_2' = W_2$.

Continuăm procedeul şi presupunem că avem sistemul ortogonal $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ astfel încît $W_i' = W_i$ pentru orice $i = 1, 2, ..., k$. Luăm

$$e_{k+1} = v_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i,\ \ \alpha_i \in K$$

şi determinăm scalarii α_i astfel încît $<e_{k+1}, e_i> = 0$, pentru orice $i = 1, 2, ..., k$.

Obținem $<v_{k+1}, e_i> + \alpha_i \cdot <e_i, e_i> = 0$, deci

$$\alpha_i = -\frac{<v_{k+1}, e_i>}{\|e_i\|^2}$$

(avem $\|e_i\| \neq 0$ deoarece $e_i \neq 0$; altfel $W_i = W_{i-1}$, ceea ce nu se poate, căci din ipoteza L sistem liniar independent, rezultă $\dim W_{i-1} = i - 1 < i = \dim W_i$).

Din ipoteza $W_k' = W_k$ şi din definiția lui e_{k+1}, rezultă că $e_{k+1} \in W_{k+1}$, deci $W_{k+1}' \subset W_{k+1}$; dar $v_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i \in W_{k+1}'$ deci avem şi $W_{k+1} \subset W_{k+1}'$, adică $W_{k+1}' = W_{k+1}$.

COROLARUL 1. În orice spațiu euclidian real sau complex există baze ortonormale.

DEMONSTRAȚIE. Notăm $K = \mathbb{R}$ (respectiv $\mathbb{C}$). Fie $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ o bază oarecare în V ($n = \dim_K V$). În particular $\mathscr{B}$ este sistem liniar independent şi putem aplica teorema anterioară: există $L' = \{e_1', e_2', ..., e_n'\}$ sistem ortogonal de vectori astfel încît subspațiul generat de L' să coincidă cu subspațiul generat de $\mathscr{B}$, adică cu V. Rezultă că L' este bază în V şi luăm $L = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, unde $e_i = \frac{e_i'}{\|e_i'\|}$, $i = 1, 2, ..., n$. Atunci L este o bază ortonormală în V deoarece $<e_i, e_i> = \|e_i\|^2 = 1$; fig. II.2.c, pentru n=2.

OBSERVAȚIE. Fie V un spațiu euclidian real sau complex şi $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază ortonormală în V. Pentru orice $x, y \in V$ avem:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ \ y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\ \ x_i, y_j \in K,\ i, j = 1, 2, ..., n \text{ şi}$$

$$<x, y> = \sum_{i=1}^{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y}_j \cdot <e_i, e_j> = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y}_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i = X^T \cdot \overline{Y},$$

adică într-o bază ortonormală orice produs scalar admite scrierea "standard" (dacă V este real, atunci $\overline{Y} = Y$).

COROLARUL 2. Fie V un spațiu euclidian real sau complex, $\dim_K V = n$ ($K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) şi fie $W \subset V$ un subspațiu vectorial cu $\dim_K V = r$, $1 \leq r \leq n - 1$. Atunci există un unic subspațiu $U \subset V$ cu pro-

prietățile $W \oplus U = V$ și $W \perp U$ (adică $(\forall)\, x \in W$ și $(\forall)\, y \in U$, avem $x \perp y$).

În particular, rezultă că $\dim_K U = n - r$ și că $U = \{u \in V \mid u \perp W\}$ [$u \perp W$ înseamnă $u \perp x$, $(\forall)\, x \in W$].

Subspațiul U se mai notează $W^{\perp}$ și se numește **complementul ortogonal al subspațiului W.**

DEMONSTRAȚIE. Fie $\{w_1, ..., w_r\}$ o bază în W, pe care o completăm la o bază $\mathscr{B} = \{w_1, ..., w_r, v_{r+1}, ..., v_n\}$ a lui V. Din rezultatele anterioare rezultă că există o bază ortonormală $\{e_1, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_n\}$ în V astfel încît subspațiul generat de $\{e_1, ..., e_r\}$ să coincidă cu W. Luăm atunci U subspațiul generat de $\{e_{r+1}, ..., e_n\}$ și avem $\dim_K U = n - r$. Evident $W \cap U = \{0\}$; altfel am obține

$$\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_r e_r = \alpha_{r+1} e_{r+1} + ... + \alpha_n e_n$$

cu cel puțin un $\alpha_i \neq 0$, ceea ce contrazice liniar independența vectorilor $\{e_1, ..., e_n\}$. Rezultă atunci relația $W \oplus U = V$. $(\dim_K(W \oplus U) = r + n - r = n)$.

Avem apoi $W \perp U$: $(\forall)\, x = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i \in W$ și $(\forall) y = \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_j e_j$,

$$< x, y > = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha}_j \cdot < e_i, e_j > = 0 \text{ (căci } i \neq j).$$

Să arătăm acum unicitatea lui U. Fie subspațiul $U_1 \subset V$ astfel încît $W \oplus U_1 = V$ și $W \perp U_1$. Fie $u_1 \in U_1$ oarecare; atunci $u_1 = w + u$, $w \in W$ și $u \in U$, deci $<u_1, w> = 0$, adică $0 = <w, w> + <u, w> = <w, w>$. Rezultă $w = 0$, deci $u_1 = u \in U$, adică $U_1 \subset U$. Schimbînd rolurile lui U și U_1 rezultă analog $U \subset U_1$, deci $U_1 = U$. Evident pentru orice $u \in U$ avem $u \perp W$; reciproc, dacă $u \perp W$, atunci raționamentul anterior ne arată că $u \in U$, deci $U = \{u \in V \mid u \perp W\}$.

1.2. Funcționale liniare, spațiul vectorial dual.

DEFINIȚIA 1.5. Fie V un spațiu vectorial peste un corp comutativ K. Se numește **funcțională liniară** pe V orice aplicație liniară $F : V \to K$.

Mulțimea funcționalelor liniare, $\mathrm{Hom}_K(V, K)$, este un spațiu vectorial peste K, numit **spațiul vectorial dual** al lui V și notat cu V^* (sau cu V').

Fie $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază în spațiul vectorial V de dimensiune n. Se știe că orice aplicație liniară este complet determinată de valorile ei pe vectorii unei baze. Definim pentru $i = 1, 2, ..., n$ funcționalele liniare e^i pe V prin $e^i(e_j) = \delta_{ij}$.

PROPOZIȚIA 1.4. **Fie V un spațiu vectorial peste corpul K, $\dim_K V = n$, $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază în V și $\mathscr{B}^* = \{e^1, e^2, ..., e^n\} \subset V^*$. Atunci $\mathscr{B}^*$ este o bază în V^*** (numită **baza duală lui $\mathscr{B}$**).

DEMONSTRAȚIE. Fie $\alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2 + ... + \alpha_n e^n = 0$ cu $\alpha_i \in K$; atunci avem

$$\alpha_1 e^1(e_j) + \alpha_2 e^2(e_j) + ... + \alpha_j e^j(e_j) + ... + \alpha_n e^n(e_j) = 0,$$

deci $\alpha_j = 0$ pentru orice $j = 1, 2, ..., n$, adică $\mathscr{B}^*$ este sistem liniar independent de vectori. Se știe că $\dim_K V^* = n \cdot 1 = n$ (teorema 2.17, cap. 1), deci $\mathscr{B}^*$ este bază.

LEMA 1.5. Fie V un spațiu vectorial peste K și $\dim_K V = n$. Dacă $F, G : V \to K$ sînt funcționale liniare cu $\operatorname{Ker} F = \operatorname{Ker} G$, atunci $F = \lambda G$, cu $\lambda \in K$.

DEMONSTRAȚIE. Dacă $F = 0$ atunci $\operatorname{Ker} F = V = \operatorname{Ker} G$, deci $G = 0$ și orice $\lambda \in K$ verifică relația $F = \lambda G$. Fie $F \neq 0$ și fie $x_1 \in V$ cu $F(x_1) \neq 0$. Atunci $\operatorname{Im} F \neq \{0\}$, deci $\operatorname{Im} F = K$ și alegem $x_0 \in V$ astfel încît $F(x_0) = 1$. Pentru orice $x \in V$ avem:

$$F(x) - F(x) \cdot 1 = 0 \text{ sau } F(x) - F(x) \cdot F(x_0) = 0,$$

deci $F(x - F(x)x_0) = 0$, adică $x - F(x)x_0 \in \operatorname{Ker} F = \operatorname{Ker} G$, de unde $G(x - F(x)x_0) = 0$ sau $G(x) = G(x_0) \cdot F(x)$. Dar $G(x_0) \neq 0$ [căci altfel $G(x) = 0$ pentru orice $x \in V$, deci $G = F = 0$, contradicție]. Atunci putem scrie $F(x) = \lambda G(x)$, $(\forall)\, x \in V$ $\left(\lambda = \dfrac{1}{G(x_0)}\right)$.

Pentru $F \neq 0$ scalarul λ este unic. Într-adevăr, fie $F = \lambda_1 G$ cu $\lambda_1 \in K$; atunci $(\lambda - \lambda_1)G = 0$ și cum $G(x_0) \neq 0$, rezultă $\lambda = \lambda_1$.

Obținem următoarea caracterizare a funcționalelor liniare pe spații euclidiene:

TEOREMA 1.6. (F. Riesz, 1880–1956). Fie V un spațiu euclidian real sau complex. Pentru orice funcțională liniară $F : V \to K$ există și este unic $x_0 \in V$ astfel încît $F(x) = \langle x, x_0 \rangle$ pentru orice $x \in V$.

DEMONSTRAȚIE. Fie $W = \operatorname{Ker} F$; dacă $F = 0$ (adică $W = V$), atunci luăm $x_0 = 0$ și avem $0 = F(x) = \langle x, 0 \rangle$, pentru orice $x \in V$. Fie $F \neq 0$ (adică $W \neq V$); atunci $\operatorname{Im} F = K$, deci $\dim_K W = n - 1$ și aplicînd corolarul 2 al teoremei 1.3, rezultă că există un unic $U \subset V$ astfel încît $W \oplus U = V$, $W \perp U$ ($\dim_K U = 1$, $U = W^\perp$ complementul ortogonal al lui W). Fie $\{u\} \subset U$ ($u \neq 0$) o bază a lui U și considerăm funcționala liniară $G(x) = \langle x, u \rangle$. Atunci avem:

$$\operatorname{Ker} G = \{x \in V \mid x \perp u\} = \{x \in V \mid x \perp U\} = U^\perp.$$

Aplicînd din nou corolarul pentru U obținem $\operatorname{Ker} G = U^\perp = W = \operatorname{Ker} F$. Din lema anterioară rezultă că există $\lambda \in K$ astfel încît $F(x) = \lambda G(x)$, pentru orice $x \in V$, adică $F(x) = \lambda \langle x, u \rangle = \langle x, \bar{\lambda} u \rangle$.

Luînd $x_0 = \bar{\lambda} u$, obținem pentru orice $x \in V$: $F(x) = \langle x, x_0 \rangle$.

Să arătăm unicitatea lui x_0; fie $x_1 \in V$ cu $F(x) = \langle x, x_1 \rangle$ pentru orice $x \in V$.

Atunci $\langle x, x_0 \rangle = \langle x, x_1 \rangle$, deci $\langle x, x_0 - x_1 \rangle = 0$, $(\forall)\, x \in V$. Alegînd $x = x_0 - x_1$ obținem $\langle x_0 - x_1, x_0 - x_1 \rangle = 0$, deci $x_0 - x_1 = 0$, adică $x_1 = x_0$.

EXEMPLE. 1) Fie $V = C^0_{[a,b]}$ spațiul vectorial real al funcțiilor continue pe $[a, b]$; aplicația

$$I : V \to \mathbb{R},\ \varphi \to \int_a^b \varphi(t)\,dt,$$

de luare a integralei, este o funcțională liniară pe V. (În acest caz $\dim_{\mathbb{R}} V = \infty$).

2) Pentru orice funcțională liniară $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, avem $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ ($\{e_1, ..., e_n\}$ fiind baza canonică în $\mathbb{R}^n$) deci $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$; notînd $c_i = f(e_i)$, $1 \le i \le n$, rezultă că f este bine determinată prin vectorul $c = (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$ şi anume $f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = < c, x >$ (produsul scalar euclidian). Aceasta este de fapt demonstrația teoremei lui Riesz în cazul $V = \mathbb{R}^n$, $K = \mathbb{R}$.

În cadrul analizei funcționale sînt caracterizate funcționalele liniare (şi continue) pe spații înzestrate cu diverse structuri.

§ 2. Clase de operatori pe spații euclidiene

2.1. Adjunctul unui operator, operatori autoadjuncți

PROPOZIȚIA 2.1. **Fie V un spațiu euclidian real sau complex şi $f: V \to V$ un operator liniar. Atunci există un unic operator liniar $f^*: V \to V$ cu proprietatea că** $<f(x), y> = <x, f^*(y)>$, $(\forall)\, x, y \in V$ (f^* se numeşte **adjunctul lui** f).

DEMONSTRAȚIE. Fie $y \in V$ oarecare, dar fixat, şi $x \in V$ oarecare. Funcția $F_y: V \to K$ ($K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$), $x \to F_y(x) = <f(x), y>$, este o funcțională liniară deoarece f şi produsul scalar sînt liniare. Conform teoremei 1.6 a lui Riesz, există un unic $x_0 = f^*(y) \in V$ (x_0 este independent de x, dar este dependent, evident, de y) astfel încît $F_y(x) = <f(x), y> = <x, x_0> = <x, f^*(y)>$ pentru orice $x \in V$. Obținem atunci o funcție $f^*: V \to V$, $y \to x_0 = f^*(y)$, care este operator liniar. Într-adevăr, pentru $(\forall)\, x, y_1, y_2 \in V$ şi $(\forall)\, \alpha_1, \alpha_2 \in K$ avem:

$$< f(x), \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 > = \overline{\alpha}_1 < f(x), y_1 > + \overline{\alpha}_2 < f(x), y_2 >=$$
$$= \overline{\alpha}_1 < x, f^*(y_1) > + \overline{\alpha}_2 < x, f^*(y_2) > = < x, \alpha_1 f^*(y_1) + \alpha_2 f^*(y_2) >;$$

dar

$$<f(x), \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2> = <x, f^*(\alpha_1 y + \alpha_2 y_2)>,$$

deci obținem

$$f^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 f^*(y_1) + \alpha_2 f^*(y_2),$$

din unicitatea reprezentării funcționalelor liniare cuprinsă în teorema lui Riesz. Din definiția lui f^* rezultă că

$$<f(x), y> = <x, f^*(y)>, (\forall)\, x, y \in V.$$

Unicitatea lui f^* este imediată.

PROPOZIȚIA 2.2. **Fie V un spațiu euclidian real sau complex şi $f, g: V \to V$ operatori liniari. Atunci avem:**

a) $(f + g)^* = f^* + g^*$;

b) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$;

c) $(f^*)^* = f$;

d) $(\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*$, $(\forall)\, \lambda \in K$;

e) $(1_V)^* = 1_V$, $(0_V)^* = 0_V$.

DEMONSTRAȚIE. a) Pentru $(\forall)\, x, y \in V$ avem:

$$<x, (f+g)^*(y)> = <(f+g)(x), y> = <f(x), y> + <g(x), y> =$$
$$= <x, f^*(y)> + <x, g^*(y)> = <x, (f^* + g^*)(y)>, \text{ deci}$$
$$(f+g)^*(y) = (f^* + g^*)(y),\ (\forall)\, y \in V, \text{ adică}$$
$$(f+g)^* = f^* + g^*.$$

b) Pentru $(\forall)\, x, y \in V$ avem:

$$<x, (f \circ g)^*(y)> = <(f \circ g)(x), y> = <f(g(x)), y> = <g(x), f^*(y)> =$$
$$= <x, g^*(f^*(y))> = <x, (g^* \circ f^*)(y)>,$$

deci, ca mai sus, rezultă că

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

c) Pentru $(\forall)\, x, y \in V$ avem:

$$<x, (f^*)^*(y)> = <f^*(x), y> = \overline{<y, f^*(x)>} = \overline{\overline{<f(y), x>}} = <x, f(y)>, \text{ deci } (f^*)^* = f.$$

d) Pentru $(\forall)\, x, y \in V$ avem:

$$<x, (\lambda f)^*(y)> = <(\lambda f)(x), y> = \lambda <f(x), y> = \lambda <x, f^*(y)> = <x, (\overline{\lambda} f^*)(y)>, \text{ deci}$$
$$(\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*,\ (\forall)\, \lambda \in K.$$

e) Pentru $(\forall)\, x, y \in V$ avem:

$$<1_V(x), y> = <x, (1_V)^*(y)> = <x, y> = <x, 1_V(y)>, \text{ deci } (1_V)^* = 1_V \text{ și}$$
$$<0_V(x), y> = <x, (0_V)^*(y)> = <0, y> = 0 = <x, 0> = <x, 0_V(y)>, \text{ deci } (0_V)^* = 0_V.$$

TEOREMA 2.3. Fie V un spațiu euclidian real sau complex, $\dim_K V = n$, $f : V \to V$ **un operator liniar și** $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ **o bază ortonormală în** V.

Dacă $A = M_f^{\mathcal{B}}$, **atunci** $M_{f^*}^{\mathcal{B}} = \overline{A^T}$.

DEMONSTRAȚIE. Fie $A = (a_{ij})$, $M_{f^*}^{\mathcal{B}} = (b_{ij}) \in M_n(K)$, deci

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \text{ și } f^*(e_k) = \sum_{s=1}^{n} b_{sk} e_s,\ (\forall)\, j, k = 1, 2, ..., n.$$

Calculăm:

$$< f(e_j), e_k > = < \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i, e_k > = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} < e_i, e_k > = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \delta_{ik} = a_{kj}; \text{ dar}$$

$$< e_j, f^*(e_k) > = < e_j, \sum_{j=1}^{n} b_{sk} e_s > = \sum_{s=1}^{n} \overline{b}_{sk} < e_j, e_s > = \sum_{s=1}^{n} \overline{b}_{sk} \cdot \delta_{js} = \overline{b}_{jk},$$

și, deoarece $<f(e_j), e_k> = <e_j, f^*(e_k)>$ rezultă că $\overline{a}_{kj} = b_{jk}, (\forall)\ j, k = 1, 2, ..., n$, adică $M_{f^*}^{\mathcal{B}} = \overline{A}^T$.

OBSERVAȚIE. Această teoremă sugerează o altă definiție pentru adjunctul unui operator liniar, și anume: dacă $A = M_f^{\mathcal{B}}$ ($\mathcal{B}$ bază ortonormală în V)

putem defini adjunctul lui f, ca fiind operatorul liniar definit de matricea $\overline{A}^T$ pentru $\mathscr{B}$ bază ortonormală fixată. Atunci avem:

$<f(x), y> = (AX)^T \cdot \overline{Y} = X^T(A^T\overline{Y} = X^T(\overline{\overline{A}^T Y}) = <x, f^*(y)>$, $(\forall)\, x, y \in V$, etc.

Definiţia 2.1. Fie V un spaţiu euclidian real sau complex. Operatorul liniar $f: V \to V$ se numeşte **autoadjunct** dacă $f^* = f$.

Observaţii. 1) Dacă $f: V \to V$ este autoadjunct atunci pentru $(\forall)\, x, y \in V$ avem relaţia

$$<f(x), y> = <x, f(y)>.$$

2) Dacă V este spaţiu euclidian real, $f: V \to V$ este autoadjunct şi $\mathscr{B}$ este o bază ortonormală în V, atunci pentru $A = M_f^{\mathscr{B}}$ avem relaţia $A^T = A$, adică A este **simetrică.**

3) Dacă V este spaţiu euclidian complex, $f: V \to V$ este autoadjunct şi $\mathscr{B}$ este o bază ortonormală în V, atunci pentru $A = M_f^{\mathscr{B}}$ avem relaţia $\overline{A}^T = A$ adică A este **hermitică.**

Teorema 2.4. Fie V un spaţiu euclidian complex şi $f: V \to V$ un operator autoadjunct. Atunci valorile proprii ale lui f sînt reale.

Demonstraţie. Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o valoare proprie a lui f şi $x \neq 0$ un vector propriu corespunzător, adică $f(x) = \lambda x$. Atunci avem:

$$<f(x), x> = <\lambda x, x> = \lambda <x, x> = \lambda\|x\|^2,$$

$$<x, f(x)> = <x, \lambda x> = \overline{\lambda} <x, x> = \overline{\lambda}\,\|x\|^2;$$

dar $<f(x), x> = <x, f(x)>$, deci $(\lambda - \overline{\lambda}) \cdot \|x\|^2 = 0$ de unde $\lambda = \overline{\lambda}$, adică $\lambda \in \mathbb{R}$ ($x \neq 0$ implică $\|x\| \neq 0$).

Corolar. Fie V un spaţiu euclidian real şi $f: V \to V$ un operator autoadjunct. Atunci valorile proprii ale lui f sînt reale.

Demonstraţie. Fie $\mathscr{B}$ o bază ortonormală în V şi $n = \dim_{\mathbb{R}} V$. Atunci matricea $A = M_f^{\mathscr{B}} \in M_n(\mathbb{R})$ este simetrică, adică $A^T = A$. Considerînd că $A \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$ putem scrie că $\overline{A}^T = A$, deci A defineşte pe $\mathbb{C}^n$ în baza canonică un operator liniar autoadjunct, care are valorile proprii reale. Rezultă că matricea A (deci şi f) are valorile proprii reale.

Teorema 2.5. Fie V un spaţiu euclidian real sau complex şi $f: V \to V$ un operator autoadjunct. Atunci vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sînt ortogonali.

Demonstraţie. Fie $\lambda_1 \neq \lambda_2$ două valori proprii distincte ale lui f şi $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ vectori proprii corespunzători, adică $f(x_1) = \lambda_1 x_1$ şi $f(x_2) = \lambda_2 x_2$. Atunci $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ şi avem:

$$<f(x_1), x_2> = <\lambda_1 x_1, x_2> = \lambda_1 <x_1, x_2>,$$

$$<x_1, f(x_2)> = <x_1, \lambda_2 x_2> = \overline{\lambda}_2 <x_1, x_2> = \lambda_2 <x_1, x_2>;$$

dar $<f(x_1), x_2> = <x_1, f(x_2)>$, deci $(\lambda_1 - \lambda_2)<x_1, x_2> = 0$, de unde $<x_1, x_2> = 0$, adică $x_1 \perp x_2$.

TEOREMA 2.6. Fie V un spaţiu euclidian real sau complex ($K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$), $\dim_K V = n$ **şi** $f : V \to V$ **un operator autoadjunct. Atunci există o bază ortonormală $\mathcal{B}$ în V în care matricea $M_f^{\mathcal{B}}$ este diagonală.**

DEMONSTRAŢIE. Vom demonstra rezultatul prin inducţie după $n = \dim_K V$.

Pentru $n = 1$ nu avem nimic de arătat. Fie $n \geq 2$ şi presupunem afirmaţia adevărată pentru orice spaţiu euclidian de dimensiune $n - 1$. Operatorul f fiind autoadjunct are numai valori proprii reale; fie $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ o valoare proprie şi $e_1 \in V_{\lambda_1}$ $e_1 \neq 0$, un vector propriu, adică $f(e_1) = \lambda_1 e_1$ (evident, putem alege e_1 astfel încît $\|e_1\| = 1$). Considerăm subspaţiul vectorial $U = \{e_1\}^{\sim} \hookrightarrow V$ şi fie $W = U^{\perp}$ complementul său ortogonal. Să arătăm că W este f–invariant; fie $x \in W$ şi calculăm:

$$<f(x), e_1> = <x, f(e_1)> = <x, \lambda_1 e_1> = \lambda_1 <x, e_1> = 0,$$

deoarece $W \perp U$. Atunci $f(x) \perp e_1$, deci $f(x) \perp U$, adică $f(x) \in W$. Rezultă că restricţia

$$g = f|_W : W \to W$$

este autoadjunct [W cu restricţia produsului scalar $W \times W \to K$ este de asemenea un spaţiu euclidian]. Într-adevăr, pentru $(\forall)\, x, y \in W$ avem:

$$<g(x), y> = <f(x), y> = <x, f(y)> = <x, g(y)>.$$

Deoarece $\dim_K W = n - 1$, din ipoteza de inducţie rezultă că există $\mathcal{B}_1 = \{e_2, ..., e_n\}$ bază ortonormală în W astfel încît $M_g^{\mathcal{B}_1} = D_1$ să fie diagonală.

Avem $V = U \oplus W = \{e_1\}^{\sim} \oplus \{e_2, ..., e_n\}^{\sim}$ şi deoarece $<e_1, e_i> = 0$ pentru $i=2, ..., n$, rezultă că $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este bază ortonormală în V şi că

$$M_f^{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \ldots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & D_1 \\ 0 & \end{array}\right) = \text{ este diagonală.}$$

OBSERVAŢII. 1) Conform teoremei 3.10 din capitolul 1 baza ortonormală $\mathcal{B}$ este formată din vectori proprii.

2) În limbaj matriceal teorema spune că **orice matrice hermitică** (sau peste $\mathbb{R}$, simetrică) **este diagonalizabilă.**

2.2. Operatori ortogonali, operatori unitari.

DEFINIŢIA 2.2. Fie V un spaţiu euclidian real, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. Un operator liniar $f : V \to V$ se numeşte **operator ortogonal** dacă transformă orice bază ortonormală într-o bază ortonormală [adică, pentru $(\forall)$ bază ortonormală $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ rezultă că $\{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\}$ este bază ortonormală].

TEOREMA 2.7. Fie V un spaţiu euclidian real, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ **şi** $f : V \to V$ **un operator liniar. Sînt echivalente afirmaţiile:**

(a) f este operator ortogonal;

(b) f conservă produsele scalare [adică $(\forall)\, x, y \in V$, $<f(x), f(y)> = <x, y>$];

(c) Matricea $M = M_f^{\mathscr{B}}$, în orice bază ortonormală $\mathscr{B}$, este inversabilă şi are proprietatea $M^T = M^{-1}$.

DEMONSTRAŢIE. (a) $\to$ (b). Fie $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază ortonormală în V. Pentru $(\forall)\, x, y \in V$ avem scrierea unică $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ şi $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, deci

$$<x, y> = <\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j> = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j <e_i, e_j> = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Conform ipotezei $\{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\}$ este bază ortonormală. Calculăm:

$f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$ şi $f(y) = f(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} y_j f(e_j)$, deci avem:

$$<f(x), f(y)> = <\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j f(e_j)> = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j <f(e_i), f(e_j)> =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = <x, y>$$

(b) $\to$ (c). Vom arăta mai întîi că $\operatorname{Ker} f = \{0\}$; fie $x \in \operatorname{Ker} f$, atunci

$$<f(x), f(x)> = <x, x> \text{ sau } <0, 0> = <x, x>,$$

deci $x = 0$. Rezultă că f este injectivă, deci f este izomorfism (corolarul 2, teorema 2.15, cap. I). Atunci există $f^{-1}: V \to V$ şi în relaţia

$<f(x), f(y)> = <x, y>$ alegem $y = f^{-1}(z)$, $(\forall)\, z \in V$. Obţinem:

$$<f(x), f(f^{-1}(z))> = <x, f^{-1}(z)> \text{ sau } <f(x), z> = <x, f^{-1}(z)>$$

pentru $(\forall)\, x, z \in V$, deci $f^{-1} = f^*$ (adjunctul lui f) şi atunci $M^{-1} = M^T$, unde $M = M_f^{\mathscr{B}}$ cu $\mathscr{B}$ bază ortonormală.

(c) $\to$ (a). Fie $\mathscr{B}$ o bază ortonormală şi $M = M_f^{\mathscr{B}}$. Din egalitatea $M^T = M^{-1}$ rezultă că există $f^{-1}: V \to V$ şi că $f^{-1} = f^*$. Dacă $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ avem:

$$<f(e_i), f(e_j)> = <e_i, f^*(f(e_j))> = <e_i, f^{-1}(f(e_j))> = <e_i, e_j> = \delta_{ij}$$

deci $\{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\}$ este o bază ortonormală, adică f este operator ortogonal.

OBSERVAŢIE. Din condiţia (b) rezultă că un operator ortogonal conservă distanţele şi unghiurile. Într-adevăr, pentru $(\forall)\, y = x \in V$ obţinem

$$<f(x), f(x)> = <x, x> \text{ sau } \|f(x)\| = \|x\|.$$

Din această relaţie şi din relaţia

$$\cos(\widehat{x, y}) = \frac{<x, y>}{\|x\| \cdot \|y\|}, \text{ obţinem } \cos(\widehat{x, y}) = \cos(\widehat{f(x), f(y)}).$$

O matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ se numeşte **matrice ortogonală** dacă este inversabilă şi $A^{-1} = A^T$. Mulţimea matricelor ortogonale este evident un subgrup al grupului $GL(n, \mathbb{R})$, numit **grupul ortogonal** $O(n) \subset GL(n, \mathbb{R})$.

Pentru (∀) $A \in O(n)$, din relația $A \cdot A^T = I_n$ rezultă că $(\det A)^2 = 1$, deci $\det A = \pm 1$. Matricele $A \in O(n)$ cu $\det A = 1$ se numesc **matrice de rotație** în $\mathbb{R}^n$ şi mulțimea matricelor de rotație este evident un subgrup al lui $O(n)$, numit **grupul special ortogonal** $SO(n) \subset O(n)$.

Exemple. 1) Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ [$\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ baza ortonormală canonică] cu $M_f^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Operatorul f este operator ortogonal, căci $M^T = M^{-1}$.

Deoarece $\det M = 1$ rezultă că $M \in SO(2)$.

2) La schimbarea coordonatelor carteziene în spațiu (vezi § 2.6 cap. 1) s-a definit un operator liniar $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, a cărui matrice în baza ortogonală canonică, $M = M_f^{\mathscr{B}}$, verifică relația $M^T = M^{-1}$, deci f este un operator ortogonal şi mai mult, $M \in SO(3)$.

Fie V un spațiu euclidian complex. Un operator liniar $f: V \to V$ se numeşte **operator unitar** dacă transformă orice bază ortonormală într-o bază ortonormală.

Se demonstrează analog

Teorema 2.8. Fie V un spațiu euclidian complex $\dim_{\mathbb{C}} V = n$ **şi $f: V \to V$ un operator liniar. Sînt atunci echivalente afirmațiile:**

(a) f este operator unitar;

(b) f conservă produsele scalare;

(c) Matricea $M = M_f^{\mathscr{B}}$, în orice bază ortonormală $\mathscr{B}$, are proprietatea $M^T = \overline{M}^{-1}$.

O matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ se numeşte **matrice unitară** dacă $A \cdot \overline{A}^T = I_n$, adică A este inversabilă şi $A^{-1} = \overline{A}^T$. Mulțimea matricelor unitare este un subgrup al grupului multiplicativ $GL(n, \mathbb{C})$, numit **grupul unitar,** notat $U(n)$.

Exemple. 1) Fie $V = \mathbb{R}^n$, înzestrat cu produsul scalar euclidian (deci pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n \simeq M_{1,n}(\mathbb{R})$, $<x, y> = x \cdot y^T$.

Exemplul tipic de operator liniar autoadjunct $f: V \to V$ este cel asociat unei matrici A simetrice (în baza canonică); într-adevăr, avem $f(x) = x \cdot A$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ şi $<f(x), y> = x \cdot A \cdot y^T = x(yA)^T = <x, f(y)>$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2) Fie $V = \mathbb{C}^n$, cu produsul scalar euclidian $<z, w> = z \cdot \overline{w}^T$. Exemplul tipic de operator liniar autoadjunct $f: V \to V$ este cel asociat unei matrici hermitice $A(A = \overline{A}^T,)$, anume $f(z) = z \cdot A$, (∀) $z \in \mathbb{C}^n$. Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ ar fi unitară (adică $A \cdot \overline{A}^T = I_n$), atunci operatorul $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $f(z) = z \cdot A$ ar fi unitar (conform teoremei 2.8).

Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sînt matrice unitare, atunci matricele A^{-1}, A^T, A^m $(m \in \mathbb{Z})$, A, B şi $A^p \cdot B^q$ $(p, q \in \mathbb{Z})$ sînt de asemenea unitare.

3) Se numeşte **transformare Galilei** (G. Galilei, 1564–1642) orice aplicaţie bijectivă $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ pentru care există o aplicaţie liniară $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ astfel încît $(\forall)\ a, b \in \mathbb{R}^4$, $f(b-a) = F(b) - F(a)$, $\|a-b\| = \|F(a)-F(b)\|$ (pentru norma euclidiană în $\mathbb{R}^4$) şi $p_1(b-a) = p_1(F(b)-F(a))$, unde p_1: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $(t, x, y, z) \to t$ (proiecţia întîi). Pentru orice $v \in \mathbb{R}$, aplicaţia

$$f_v : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, (t, x, y, z) \to (t, x + vt, y + vt, z + vt)$$

este o transformare Galilei (numită **mişcarea uniformă în spaţiu cu viteza** v). Pentru orice $s \in \mathbb{R}$, $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ aplicaţia

$$\tau_{s,a} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, (t, x, y, z) \to (t+s, x+a_1, y+a_2, z+a_3)$$

este o transformare Galilei (numită **mişcarea de translaţie de timp** s **şi vector** a). În fine, dacă $G \in M_3(\mathbb{R})$ este o matrice ortogonală, atunci aplicaţia

$$\rho_G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, (t, x, y, z) \to (t, x', y', z'),$$

unde

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

este o transformare Galilei, numită **mişcarea de rotaţie asociată lui** G. Se poate arăta că orice transformare Galilei este o compunere de mişcări uniforme, translaţii şi rotaţii.

§ 3. Aplicaţii biliniare, forme pătratice

3.1. Aplicaţii biliniare, matrice asociate

Fie V un spaţiu vectorial real şi $\dim_{\mathbb{R}} V = n$.

Definiţia 3.1. Se numeşte **aplicaţie biliniară** pe V orice aplicaţie $h(x, y)$, $h : V \times V \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

1) $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$ şi $h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$, $(\forall)\ x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$.

2) $h(\lambda x, y) = \lambda h(x, y)$ şi $h(x, \lambda y) = \lambda h(x, y)$, $(\forall)\ x, y \in V$ şi $(\forall)\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Aşadar, h este liniară în fiecare din cele două argumente. De exemplu aplicaţia $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = xy$ este biliniară, fără a fi liniară.

În cazul complex, o aplicaţie biliniară $h : V \times V \to \mathbb{C}$ are proprietăţi similare, doar că

$$h(x, \lambda y) = \bar{\lambda} h(x, y),\ (\forall) x, y \in V \text{ şi } (\forall)\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

O aplicaţie biliniară $h : V \times V \to \mathbb{R}$ se numeşte **simetrică** dacă

$$h(x, y) = h(y, x), (\forall)\ x, y \in V.$$

O aplicaţie biliniară $h : V \times V \to \mathbb{C}$ se numeşte **hermitică** (Ch. Hermite, 1822–1901) dacă

$$h(x, y) = \overline{h(y, x)},\ (\forall) x, y \in V.$$

O aplicaţie biliniară simetrică $h : V \times V \to \mathbb{R}$ se numeşte **pozitiv–semidefinită** dacă $h(x, x) \geq 0$, $(\forall) x \in V$ şi **pozitiv–definită** dacă este pozitiv–semidefinită şi, în plus, $h(x, x) = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$. (În cazul complex definiţiile sînt similare, deoarece din $h(x,x) = \overline{h(x,x)}$, rezultă $h(x, x) \in \mathbb{R}$).

EXEMPLE. 1) Orice produs scalar complex este o aplicaţie biliniară hermitică pozitiv–definită şi orice produs scalar real este o aplicaţie biliniară simetrică pozitiv–definită.

2) Fie $E = \mathbb{R}^2$; aplicaţia

$$h : E \times E \to \mathbb{R},\ h((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1y_2 + x_2y_1$$

este biliniară simetrică, care nu este pozitiv definită; aplicaţia

$$k : E \times E \to \mathbb{R},\ k((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - y_1y_2$$

este biliniară, dar nesimetrică.

3) Fie $U \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi $f(x_1, ..., x_n)$, $f : U \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^2(U)$. Pentru orice punct $a \in U$ se poate considera aplicaţia $\mathbb{R}$ – liniară $df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (s_1, ..., s_n) \to \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) s_i$ (**numită diferenţiala întîi a lui** f **în punctul** a), ca şi aplicaţia biliniară $d^2f(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(s_1, ..., s_n; t_1, ..., t_n) \to \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) s_i t_j$ (**numită diferenţiala a doua a lui** f **în** a).

Reamintim că punctul a se numeşte **critic** pentru f dacă $df(a) = 0$ adică $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0,\ 1 \leq i \leq n$.

Din analiza matematică se ştie că dacă a este critic şi dacă $d^2f(a)$ este pozitiv–definită (respectiv negativ–definită), atunci a este un punct de minim (respectiv maxim) local pentru f.

Fie $h : V \times V \to \mathbb{R}$ o aplicaţie biliniară şi $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază oarecare fixată în V. Pentru orice $x, y \in V$ avem scrierea unică

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\quad y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j,$$

deci

$$h(x, y) = h\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j\, h(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} x_i y_j,$$

unde

$$a_{ji} \overset{\Delta}{=} h(e_i, e_j).$$

Evident, dacă baza $\mathscr{B}$ este fixată, atunci h determină matricea $A = (a_{ij})_{1\leq i, j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ şi reciproc, matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$ determină complet aplicaţia biliniară h. În cazul complex, obţinem în mod analog relaţia

$$h(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} x_i \overline{y_j}\text{, unde } A = (a_{ij})_{1\leq i, j\leq n} \in M_n(\mathbb{C}) \text{ şi } a_{ji} = h(e_i, e_j).$$

Matricea A se numeşte **matricea asociată aplicaţiei biliniare h în baza fixată $\mathscr{B}$.**

TEOREMA 3.1. Fie V un spaţiu vectorial complex, $\dim_{\mathbb{C}} V = n$ şi $h : V \times V \to \mathbb{C}$ o aplicaţie biliniară. Fie $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ două baze fixate în V, iar $P = (p_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{C})$ matricea de trecere $\mathscr{B} \rightsquigarrow \mathscr{B}'$. Atunci, dacă A este matricea asociată lui h în baza $\mathscr{B}$ şi C este matricea asociată lui h în baza $\mathscr{B}'$, avem $C = \overline{P}^T AP$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $C = (c_{ij})$, $A = (a_{ij})$, $P=(p_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, unde $a_{ji} = h(e_i, e_j)$, $c_{ji} = h(e_i', e_j')$, $e_j' = \sum_{s=1}^{n} p_{sj} e_s$ şi $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$, $\mathscr{B}' = \{e_1', ..., e_n'\}$.

Calculăm: $c_{ji} = h(e_i', e_j') = h(\sum_{k=1}^{n} p_{ki} e_k, \sum_{s=1}^{n} p_{sj} e_s) = \sum_{k,s=1}^{n} p_{ki} \overline{p}_{sj} h(e_k, e_s) =$

$= \sum_{s=1}^{n} \overline{p}_{sj} (\sum_{k=1}^{n} a_{sk} p_{ki}) = \sum_{s=1}^{n} (\overline{P}^T)_{js} (AP)_{si} = (\overline{P}^T AP)_{ji}$, pentru $(\forall)\, i, j = 1, 2, ..., n$,

$$\text{deci } C = \overline{P}^T AP.$$

COROLAR. Rangul matricei asociate aplicaţiei biliniare h nu depinde de baza aleasă.

DEMONSTRAŢIE. Din teoremă rezultă că matricele lui h în oricare două baze sînt echivalente, deci au acelaşi rang (corolarul teoremei I.2.22).

OBSERVAŢII. 1) Pentru aplicaţii biliniare pe spaţii vectoriale reale concluzia teoremei rămîne valabilă şi se scrie sub forma $C = P^T AP$.

2) Dacă aplicaţia biliniară h este hermitică avem:

$$a_{ji} = h(e_i, e_j) = \overline{h(e_j, e_i)} = \overline{a_{ij}},$$

deci matricea asociată A verifică relaţia $\overline{A^T} = A$ (adică A este hermitică).

Dacă aplicaţia biliniară h este simetrică (cazul real) avem $a_{ji} = a_{ij}$, deci matricea asociată A verifică relaţia $A^T = A$ (adică este simetrică).

3) Relaţia $h(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} x_i \overline{y}_j$ se scrie matriceal sub forma echivalentă $h(x, y) = \overline{Y^T} AX$, unde X, Y sînt vectorii–coloană ai coordonatelor lui x, y.

3.2. Forme pătratice

Fie V un spaţiu vectorial real sau complex, $\dim_K V = n$ ($K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$).

DEFINIŢIA 3.2. Fie $h : V \times V \to \mathbb{C}$ o aplicaţie biliniară hermitică (sau, în cazul real, simetrică). Se numeşte **formă pătratică asociată lui** h funcţia $q : V \to \mathbb{R}$, $q(x) \overset{\Delta}{=} h(x, x)$, $(\forall)\, x \in V$.

Forma pătratică q se numeşte **pozitiv–definită** dacă aplicaţia biliniară h este pozitiv–definită.

OBSERVAȚII. 1) Fie $\mathscr{B}=\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază oarecare fixată în V, A matricea lui h în această bază şi $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$.

Atunci avem: $q(x)=h(x,x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{x_j}$; sau, sub formă matricială:

$$q(x)=\overline{X}^T AX.$$

2) Dacă funcția $q: V \to \mathbb{R}$ are, într-o bază fixată din V, forma de mai sus (cu $\overline{A}^T=A$), atunci există o unică aplicație biliniară $h: V\times V \to \mathbb{C}$ astfel încît $q(x)=h(x, x)$, $(\forall)\, x\in V$. Aplicația biliniară h se poate defini cu ajutorul matricei A sau, direct, prin

$$h(x, y)=\frac{1}{2}[q(x+y)-q(x)-q(y)].$$

3) Matricea hermitică A (în cazul real simetrică), asociată aplicației biliniare hermitice h se mai numeşte şi **matricea asociată formei pătratice** q.

4) Fie $q:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o formă pătratică (reală); deci $q(0)=0$. Ea este numită **pozitiv definită** (şi se scrie $q>0$) dacă $q(x)>0$ pentru orice $x\in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; q este pozitiv semidefinită ($q\geq 0$) dacă $q(x)\geq 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}^n$. O imagine sugestivă este cuprinsă în figura II.3.

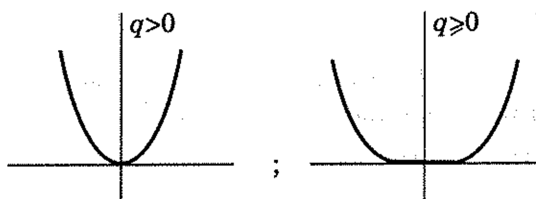


Figura II.3.

De exemplu, $q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $q(x, y)=2x^2+y^2$ este pozitiv–definită, iar $q_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $q_1(x,y)=2x^2$ este pozitiv–semidefinită. Imaginea pentru forme pătratice care sînt respectiv negativ–definită, ($q(x)<0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}^n$, $x\neq 0$), negativ–semidefinită ($q(x)\leq 0$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}^n$) şi cu semn nedefinit, este dată în figura II.4.

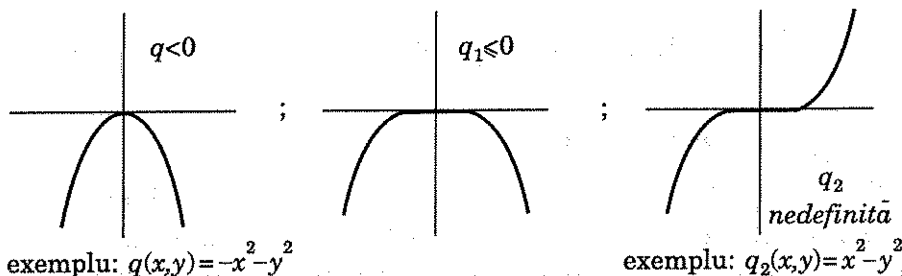


Figura II.4.

TEOREMA 3.2. (de reducere a aplicațiilor biliniare hermitice la forma canonică). Fie V un spațiu euclidian real sau complex,

$\dim_K V = n$ **şi** $h : V \times V \to K$ **o aplicaţie biliniară hermitică. Atunci există o bază ortonormală** $\mathscr{B}'$ **în** V **astfel încît matricea asociată lui** h **în baza** $\mathscr{B}'$ **să fie diagonală.**

DEMONSTRAŢIE. Fie $\mathscr{B}$ o bază ortonormală fixată în V, $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ şi fie A matricea asociată lui h în baza $\mathscr{B}$. Avem $\overline{A}^T = A$, deci A defineşte un operator liniar $f : V \to V$ cu $M_f^{\mathscr{B}} = A$, adică f este autoadjunct. Conform teoremei 2.6 de diagonalizare pentru operatorii autoadjuncţi, există o altă bază ortonormală $\mathscr{B}'$ în V, $\mathscr{B}' = \{e_1', e_2', ..., e_n'\}$ astfel încît $M_f^{\mathscr{B}'} = D$ să fie matrice diagonală. Atunci $D = T^{-1}AT$, unde T este matricea de trecere $\mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{B}'$. Conform unei observaţii făcute după definiţia I.2.12 a matricelor de trecere, T poate fi considerată ca matricea în baza $\mathscr{B}$ a operatorului liniar (endomorfismului) $t : V \to V$, definit prin $t(e_j) = e'_j$, $j = 1, 2, ..., n$. Deci operatorul liniar t transformă baza ortonormală $\mathscr{B}$ într-o bază ortonormală $\mathscr{B}'$ şi atunci este operator unitar (respectiv ortogonal). Atunci avem $T^{-1} = \overline{T}^T$.

Calculînd matricea C asociată aplicaţiei biliniare h în baza $\mathscr{B}'$, avem: $C = \overline{T}^T AT = T^{-1}AT = D$, deci C este matrice diagonală.

OBSERVAŢIE. Dacă matricea asociată aplicaţiei biliniare h în baza $\mathscr{B}'$ este diagonală, adică

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \cdots & 0 \\ & d_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & d_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}), \text{ atunci în această bază putem scrie}$$

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^{n} d_i x_i \overline{y}_i;$$

Baza $\mathscr{B}'$ se numeşte **bază canonică pentru** h, iar membrul secund din relaţia de mai sus se numeşte **formă canonică a lui** h. Evident, nici baza $\mathscr{B}'$, nici forma canonică a lui h, nu sînt unice. Forma pătratică asociată lui h se scrie, în baza $\mathscr{B}'$, astfel:

$$q(x) = d_1 |x_1|^2 + d_2 |x_2|^2 + ... + d_n |x_n|^2, (\forall)\, x \in V;$$

baza $\mathscr{B}'$ se numeşte o **bază canonică a formei pătratice** q, iar expresia de mai sus se numeşte **formă canonică a formei pătratice** q.

COROLAR (reducerea formelor pătratice la forma canonică). Fie V **un spaţiu euclidian real sau complex,** $\dim_K V = n$ **şi** $q : V \to \mathbb{R}$ **forma pătratică asociată unei aplicaţii biliniare hermitice** h. **Atunci există o bază ortonormală** $\mathscr{B}'$ **canonică pentru** q, **în care forma pătratică** q **se scrie sub forma canonică** $q(x) = d_1 |x_1|^2 + d_2 |x_2|^2 + ... + d_n |x_n|^2, (\forall)\, x \in V$.

DEMONSTRAŢIE. Se aplică direct teorema anterioară.

OBSERVAŢIE. Din demonstratia teoremei (de fapt din demonstraţia teoremei de diagonalizare a operatorilor autoadjuncţi), rezultă că baza $\mathscr{B}'$ este formată din vectorii proprii ai matricei A, iar elementele $d_1, ..., d_n$ ale

matricei diagonale D sînt tocmai valorile proprii ale lui A. Din acest motiv metoda de mai sus de reducere a formelor pătratice la forma canonică se mai numeşte *metoda valorilor şi vectorilor proprii.*

Prezentarea algoritmului de reducere a unei forme pătratice la forma canonică (sumă de pătrate) printr-o transformare ortogonală.

I. Fiind dată o formă pătratică $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se determină matricea ei asociată A deci $q(x) = x^T \cdot A \cdot x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}^n \simeq M_{n,1}(\mathbb{R})$.

II. Se calculează valorile proprii λ_i, $1 \le i \le p$, ale lui A, avînd multiplicitățile algebrice n_i şi se determină subspațiile proprii corespunzătoare V_{λ_i} (deoarece A este simetrică, ea este diagonalizabilă şi $\dim V_{\lambda_i} = n_i$, $1 \le i \le p$).

III. Se consideră cîte o bază ortonormală în fiecare spațiu propriu V_{λ_i} (folosind eventual procedeul Gram–Schmidt).

IV. Se formează matricea $T \in M_n(\mathbb{R})$ avînd drept coloane versorii proprii ai bazelor reunite ale spațiilor V_{λ_i}, $1 \le i \le p$. Matricea T este ortogonală ($T^{-1} = T^T$) şi în plus $T^{-1}AT = \text{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

V. Punînd $x = T \cdot y$, rezultă $q(x) = x^T Ax = (Ty)^T A(Ty) = y^T \cdot (T^T AT)y = = y^T(T^{-1}AT)y = y^T \,\text{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)y = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2$. Un rezultat similar are loc în cazul complex.

Exemple. 1) Să considerăm forma pătratică

$$q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

În acest caz, matricea asociată lui q este

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii ale lui A sînt $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_{2,3} = 3$. Avem $V_{\lambda_1} = \text{Ker}\, A = \tilde{v}_1$, unde $v_1 = (1\ 1\ 1)^T$ şi luăm versorul corespunzător

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Apoi $V_{\lambda_2} = \text{Ker}\,(A - 3I_3) = \{v_2, v_3\}^{\sim}$ unde $v_2 = (1\ {-1}\ 0)^T$, $v_3 = (1\ 0\ {-1})^T$.

Normalizăm pe v_2 luînd

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

şi considerăm pe $u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1 1 - 2)^T$, obținut aplicînd procedeul Gram–Schmidt de ortonormalizare a sistemului de vectori $\{v_2, v_3\}$. Se formează matricea ortogonală

$$T=(u_1\,|\,u_2\,|u_3)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\end{pmatrix}.$$

Conform teoriei, $T^{-1}AT=\text{diag}\,(0,3,3)$ şi prin transformarea liniară ortogonală $x=Ty$, se obţine $q(y_1,y_2,y_3)=3y_2^2+3y_3^2$ (deci $q\geq 0$).

2) Considerăm forma pătratică

$$q:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C},\ q(z_1,z_2)=z_1\overline{z_1}+i\overline{z_1}z_2-iz_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_2}.$$

În acest caz, matricea asociată este

$$A=\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}$$

şi are valorile proprii $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$. Versorii proprii corespunzători sînt

$$u_1=\begin{pmatrix}-i/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix};\ u_2=\begin{pmatrix}i/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\ \text{şi luînd}\ T=(u_1|\,u_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i & i\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

se obţine o matrice unitară; în plus, prin transformarea liniară $\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}$,

deci $z_1=\dfrac{i}{\sqrt{2}}(-w_1+w_2)$, $z_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(w_1+w_2)$, se obţine forma canonică $q=2w_2\cdot\overline{w}_2$.

În cele ce urmează, considerăm doar cazul real şi vom da încă o metodă de reducere a formelor pătratice la forma canonică, cuprinsă în

TEOREMA 3.3. (Jacobi). Fie V un spaţiu vectorial real, $\dim_{\mathbb{R}}V=n$, $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ o bază oarecare fixată în V şi $q:V\to\mathbb{R}$ o formă pătratică, $q(x)=\sum\limits_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}x_ix_j$, unde $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie_i$ şi $a_{ji}=h(e_i,e_j)$, h fiind aplicaţia biliniară simetrică asociată lui q.

Dacă toţi determinanţii principali ai matricei simetrice asociate lui q, $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$, adică

$$\Delta_1=a_{11},\ \Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n=\det A,$$

sînt nenuli, atunci există o bază canonică pentru q, $\mathcal{B}'=\{e_1',e_2',\ldots,e_n'\}$ în V, pentru care avem forma canonică

$$q(x)=\frac{\Delta_0}{\Delta_1}(x_1')^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2')^2+\ldots+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x_n')^2$$

pentru orice $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i'e_i'\in V$ (se ia $\Delta_0=1$).

DEMONSTRAŢIE. Vom căuta noua bază $\mathcal{B}'$ astfel încît

$$e_1'=p_{11}e_1,\ e_2'=p_{12}e_1+p_{22}e_2,\ \ldots,\ e_k'=p_{1k}e_1+p_{2k}e_2+\ldots+p_{kk}e_k,\ \ldots,$$

$$e_n' = p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \ldots + p_{nn}e_n$$

şi vom impune condițiile $h(e_i, e_k') = 0$, $i = 1, 2, ..., k - 1$; $k = 1, 2, ..., n$ şi $h(e_k, e_k') = 1$. Pentru $k = 1$ obținem $1 = h(e_1, e_1') = p_{11}\ h(e_1, e_1) = p_{11}a_{11}$, deci $p_{11} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}$. Presupunem că am găsit vectorii $e_1', e_2', \ldots, e_{k-1}'$ şi impunem condițiile: $h(e_1, e_k') = 0, h(e_2, e_k') = 0, ..., h(e_{k-1}, e_k') = 0$ şi $h(e_k, e_k') = 1$; obținem sistemul liniar:

$$\begin{aligned} a_{11}p_{1k} + a_{21}p_{2k} + \ldots + a_{k1}p_{kk} &= 0 \\ a_{12}p_{1k} + a_{22}p_{2k} + \ldots + a_{k2}p_{kk} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{1k}p_{1k} + a_{2k}p_{2k} + \ldots + a_{kk}p_{kk} &= 1, \end{aligned}$$

cu necunoscutele $p_{1k}, p_{2k}, ..., p_{kk}$ şi determinantul $\Delta_k \neq 0$. Deci aplicînd regula lui Cramer, putem calcula coeficienții vectorului e_k'. În particular obținem că

$$p_{kk} = \frac{1}{\Delta_k}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{k-1,1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,k-1} & a_{2,k-1} & \cdots & a_{k-1,k-1} & 0 \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{k-1,k} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}.$$

Atunci, dacă $P = (p_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, rezultă că $\det P = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}\cdot\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\cdots\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} = \frac{1}{\Delta_n} \neq 0$,

deci $\mathscr{B}' = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este bază în V.

Pentru orice $k = 2, 3, ..., n$ şi orice $i = 1, 2, ..., k - 1$ avem:

$$a_{ki}' = h(e_i', e_k') = h(\sum_{s=1}^{i} p_{si}e_s, e_k') = \sum_{s=1}^{i} p_{si}h(e_s, e_k') = 0,$$

deci $a_{ki}' = 0$ pentru orice $i, k = 1, 2, ..., n$ şi $i \neq k$, deoarece matricea asociată lui h (deci lui q) în baza $\mathscr{B}'$ este simetrică. Atunci rezultă că $A' = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ este diagonală şi, în plus, avem relația:

$$a_{kk}' = h(e_k', e_k') = h(\sum_{s=1}^{k} p_{sk}e_s, e_k') = p_{kk}h(e_k, e_k') = p_{kk} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k},$$

adică $q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}(x_1')^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2')^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x_n')^2$, pentru $(\forall)\ x = \sum_{k=1}^{n} x_k'e_k' \in V$.

OBSERVAȚIE. Există şi alte metode de reducere a formelor pătratice la sume (sau diferențe) de pătrate. Astfel, Gauss a sistematizat o metodă elementară, de grupare convenabilă a termenilor, pe care o ilustrăm pe exemple. Pentru $q(x, y) = 2x^2 + 8xy - 5y^2$ avem

$$q(x, y) = 2(x^2 + 4yx - \frac{5}{2}y^2) = 2\left[(x+2y)^2 - 4y^2 - \frac{5}{2}y^2\right] = 2(x + 2y)^2 - 13y^2$$

şi punînd $x' = \sqrt{2}(x + 2y)$, $y' = y\sqrt{13}$ avem $q = x'^2 - y'^2$; în mod similar, pentru $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 4xy + 3z^2 + 2yz + 2xz$, grupînd separat termenii care conțin x, avem

$$q = (x^2 - 4xy + 2xz) + (2y^2 + 2yz + 3z^2) = x^2 - 2x(2y - z) + (2y^2 + 2yz + 3z^2) =$$
$$= (x - 2y + z)^2 - (2y - z)^2 + (2y^2 + 2yz + 3z^2) = (x - 2y + z)^2 - 2y^2 + 6yz + 2z^2 =$$
$$= (x - 2y + z)^2 - 2(y^2 - 3yz) + 2z^2 = (x - 2y + z)^2 - \left[\left(y - \frac{3z}{2}\right)^2 - \frac{9z^2}{4}\right] + 2z^2 =$$
$$= (x - 2y + z)^2 - 2\left(y - \frac{3z}{2}\right)^2 + \frac{13}{2}z^2 = x'^2 - y'^2 + z'^2,$$

unde am pus $x' = x - 2y + z$, $y' = \sqrt{2}\left(y - \frac{3z}{2}\right)$, $z' = z\sqrt{\frac{13}{2}}$ (transformarea liniară $(x, y, z) \to (x', y', z')$ nefiind ortogonală).

Aşadar, aceeaşi formă pătratică poate fi redusă la forma canonică în mai multe moduri. Există totuşi ceva comun în aceste reprezentări, ceea ce vom vedea în continuare (teorema 3.5).

3.3. Clasificarea formelor pătratice

Ne situăm în cazul real şi fie $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o formă pătratică, A matricea ei asociată. Am văzut că există o matrice ortogonală T astfel încît punînd $x = Ty$ să rezulte

$$q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2,$$

unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sînt valorile proprii (reale şi eventual nule) ale lui A. Printr-o renumerotare putem presupune că $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_r > 0$ şi $\lambda_{r+1} < 0, \ldots, \lambda_{r+s} < 0$, unde $r \geq 0$, $s \geq 0$ şi $r + s \leq n$. Notînd $y_i\sqrt{\lambda_i} = z_i$, $1 \leq i \leq r$ şi $y_j\sqrt{-\lambda_j} = z_j$, $r + 1 \leq j \leq r + s$, avem $q = z_1^2 + \ldots + z_r^2 - z_{r+1}^2 - \ldots - z_{r+s}^2$.

Din corolarul teoremei 3.1 ştim că rangul matricei A nu depinde de baza aleasă şi coincide cu numărul coeficienţilor nenuli din forma canonică a formei pătratice; deci $\rho(A) = r + s$ (numit şi **rangul** lui q).

Dacă $r + s = n$, atunci $\rho(A) = n$ deci A este inversabilă; în acest caz se spune că forma pătratică q este **nedegenerată.**

TEOREMA 3.4. Presupunem q nedegenerată, adică $r + s = n$. Atunci

$$r = \max\{\dim_{\mathbb{R}} V \mid V \subset \mathbb{R}^n \text{ şi } q \text{ este pozitiv–definită pe } V\}$$

şi

$$s = \max\{\dim_{\mathbb{R}} V \mid V \subset \mathbb{R}^n \text{ şi } q \text{ este negativ–definită pe } V\}.$$

DEMONSTRAŢIE. Fie subspaţiile $V_1 = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid z_{r+1} = \ldots = z_n = 0\}$ şi $V_2 = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n \mid z_1 = \ldots = z_r = 0\}$ deci $\dim_{\mathbb{R}} V_1 = r$ şi $\dim_{\mathbb{R}} V_2 = n - r = s$.

Notăm cu r' şi s' membrii secunzi ai egalităţilor din enunţ. Deoarece q este pozitiv definită pe V_1 şi negativ definită pe V_2, rezultă $r \leq r'$ şi $s \leq s'$. Pe de altă parte, dacă $W_1 \subset \mathbb{R}^n$ (respectiv $W_2 \subset \mathbb{R}^n$) este un subspaţiu oarecare pe care $q < 0$ (respectiv $q > 0$), atunci $V_1 \cap W_1 = \{0\}$ şi $V_2 \cap W_2 = \{0\}$. Aşadar

$$n = \dim \mathbb{R}^n \geq \dim(V_1 + W_1) = \dim V_1 + \dim W_1,$$

deci $\dim W_1 \leq n - r = s$ şi ca atare, $s' \leq s$. În mod similar, $n \geq \dim(V_2 + W_2) = \dim V_2 + \dim W_2$, deci $\dim W_2 \leq r$, de unde $r' \leq r$. Prin urmare, $r = r'$ şi $s = s'$.

Revenim la cazul general. Teorema 3.4 arată de ce r se numeşte **indexul pozitiv** al lui q, iar s se numeşte **indexul negativ** al lui q. Perechea (r, s) se numeşte **signatura** formei pătratice q. Un rezultat important îl constituie teorema următoare care arată că signatura unei forme pătratice este "inertă" în sensul că nu depinde de modul în care forma pătratică este redusă la forma canonică (în cazul nedegenerat acest fapt rezultă şi din teorema 3.4, ţinînd cont că r' şi s' depind exclusiv de q).

TEOREMA 3.5. (legea de inerţie). Fie V un spaţiu vectorial real, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ şi $q : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Atunci indexul pozitiv şi indexul negativ sînt invarianţi ai formei pătratice (adică sînt independenţi de alegerea bazelor canonice).

DEMONSTRAŢIE. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază canonică pentru forma pătratică q, adică, pentru orice $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$ avem

$q(x) = d_1 x_1^2 + ... + d_r x_r^2 - d_{r+1} x_{r+1}^2 - ... - d_k x_k^2$, unde $k = \text{rang}\,(q) \le n$ şi $d_i > 0$, $i = 1, 2, ..., k$. Înlocuind vectorii e_i prin vectorii $\tilde{e}_i = \dfrac{1}{\sqrt{d_i}} e_i$, $i = 1, ..., k$, obţinem o nouă bază canonică $\mathcal{B} = \{\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_k, e_{k+1}, ..., e_n\}$ şi deoarece $(\forall)\, x \in V$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{e}_i = \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i \frac{1}{\sqrt{d_i}} e_i + \sum_{i=k+1}^{n} \tilde{x}_i e_i, \text{ avem } q(x) = \tilde{x}_1^2 + ... + \tilde{x}_r^2 - \tilde{x}_{r+1}^2 - ... - \tilde{x}_k^2.$$

Rezultă că putem presupune de la început că toţi $d_i = 1$.

Fie $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ două baze canonice pentru q astfel încît

$$q(x) = x_1^2 + ... + x_r^2 - x_{r+1}^2 - ... - x_k^2 = y_1^2 + ... + y_l^2 - y_{l+1}^2 - ... - y_k^2,$$

unde (x_i) sînt coordonatele lui x în baza $\mathcal{B}$ şi (y_i) sînt coordonatele lui x în baza $\mathcal{B}_1$. Presupunem că $r \ne l$ şi fie $l > r$. Dacă $P = (p_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ este matricea de trecere $\mathcal{B} \to \mathcal{B}_1$, atunci $x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} y_j$, $(\forall)\, i = 1, 2, ..., n$. Căutăm vectorii $x \in V$ care să satisfacă simultan condiţiile: $y_{l+1} = ... = y_k = y_{k+1} = ... = y_n = 0$ şi $x_1 = ... = x_r = 0$, care sînt în număr de $n - l + r < n$.

Obţinem sistemul liniar omogen:

$$p_{11} y_1 + p_{12} y_2 + ... + p_{1l} y_l = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$p_{r1} y_1 + p_{r2} y_2 + ... + p_{rl} y_l = 0,$$

în care numărul de necunoscute l este mai mare decît numărul de ecuaţii r, deci sistemul are şi soluţii nebanale. Rezultă că pentru acei vectori $x \in V$ care satisfac condiţiile de mai sus avem relaţia:

$$q(x) = -x_{r+1}^2 - ... - x_k^2 = y_1^2 + ... + y_l^2,$$

ceea ce reprezintă o contradicţie. Prin urmare $l = r$ şi atunci indexul negativ nu se schimbă nici el $(k - r)$.

COROLARUL 1. Fie V un spaţiu vectorial real, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ şi $q : V \to \mathbb{R}$ o formă pătratică. Atunci q este pozitiv definită dacă şi numai dacă rangul k al lui q este egal cu n şi indexul pozitiv al lui q este n [deci indexul negativ este zero şi signatura $(n, 0)$].

DEMONSTRAŢIE. Dacă $k = n$ şi indexul pozitiv este tot n într-o bază canonică, atunci avem: $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, $(\forall) x \in V$, deci $q(x) \geq 0$ şi $q(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$, iar q este pozitiv definită.

Reciproc, fie q pozitiv definită şi $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază canonică a sa. Pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$ avem $q(e_i) = h(e_i, e_i) = a_{ii} = d_i > 0$, deoarece $e_i \neq 0$; deci indexul pozitiv este n şi evident, $k = n$.

COROLARUL 2. Fie $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o formă pătratică şi A matricea simetrică asociată.

a) $q > 0 \leftrightarrow$ toate valorile proprii ale lui A sînt strict pozitive;

b) $q < 0 \leftrightarrow$ toate valorile proprii ale lui A sînt strict negative;

c) $q \geq 0 \leftrightarrow$ valorile proprii ale lui A sînt ≥ 0;

d) $q \leq 0 \leftrightarrow$ valorile proprii ale lui A sînt ≤ 0;

e) q are semn nedefinit $\leftrightarrow$ există valori proprii ale matricei A de semn contrar.

Se foloseşte observaţia de după corolarul teoremei 3.2, împreună cu corolarul 1 (eventual pentru $-q$).

OBSERVAŢIE. Evident, $q < 0 \leftrightarrow -q > 0$; $q \leq 0 \leftrightarrow -q \geq 0$. Uneori pentru o matrice simetrică $A \in M_n(\mathbb{R})$ se scrie $A > 0$ în cazul cînd forma pătratică $q(x) = x^T \cdot A \cdot x$ este pozitiv definită.

Prezentăm acum un criteriu pentru ca o formă pătratică să fie pozitiv definită, care poate fi aplicat fără a reduce forma pătratică la forma canonică.

TEOREMA 3.5. (J. J. Sylvester, 1814–1897). Pentru ca o formă pătratică q să fie pozitiv definită este necesar şi suficient ca toţi minorii principali ai matricei asociate lui q într-o bază oarecare să fie pozitivi.

DEMONSTRAŢIE. Fie q formă pătratică pozitiv definită şi $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază oarecare în spaţiul vectorial $V(\dim_{\mathbb{R}} V = n)$. Fie $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ matricea asociată lui q în această bază. Fie $W_k \subset V$ subspaţiul vectorial generat de $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Evident, restricţia lui q la W_k este o formă pătratică q_k pozitiv definită a cărei matrice asociată în baza $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ este

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2k} \\ & & \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{kk} \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{R}).$$

Aducînd pe q_k la o formă canonică obţinem:

$$q_k(x) = d_1(x_1)^2 + d_2(x_2)^2 + \ldots + d_k(x_k)^2,$$

unde

$$x = \sum_{i=1}^{k} x_i e_i \in W_k \text{ şi } d_1 > 0, d_2 > 0, ..., d_k > 0.$$

Atunci matricea asociată lui q_k în noua bază este matricea diagonală

$$D_k = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & d_k \end{pmatrix}.$$

Dacă P_k este matricea de trecere de la baza $\{e_1, ..., e_k\}$ la noua bază, atunci se ştie că $D_k = P_k^T A_k P_k$, deci $\det D_k = (\det P_k)^2 \cdot \det A_k = (\det P_k)^2 \Delta_k > 0$, de unde rezultă că $\Delta_k > 0$, $(\forall)$ $k = 1, 2, ..., n$.

Reciproc, fie $\Delta_k > 0$, $k = 1, 2, ..., n$. Aplicînd teorema 3.3, aducem pe q la forma canonică prin metoda Jacobi, deci

$$q(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}(x_1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2)^2 + ... + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x_n)^2,$$

pentru orice $x \in V$. De aici rezultă $q(x) \geq 0$ pentru orice $x \in V$ şi $q(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$, deci $q > 0$.

OBSERVAŢIE. Din teorema 3.5 rezultă imediat, trecînd la $-q$, un criteriu ca o formă pătratică să fie negativ definită.

EXEMPLU. Determinăm $k \in \mathbb{R}$ astfel încît forma pătratică

$$q(x, y, z) = kx^2 + y^2 + z^2 + 4xy$$

să fie pozitiv definită. Matricea asociată lui q este

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Minorii ei principali sînt $\Delta_1 = k$, $\Delta_2 = k - 4$, $\Delta_3 = k - 4$ şi conform teoremei lui Sylvester, rezultă $k > 4$.

3.4. Interpretări geometrice; conice şi cuadrice

DEFINIŢIA 3.3. Se numeşte **hipercuadrică** în $\mathbb{R}^n$ (sau echivalent **hipersuprafaţă de gradul** 2) mulţimea H a punctelor $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ verificînd o ecuaţia de forma

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0,$$

unde $a_{ij} = a_{ji}$ nu sînt toţi nuli, b_i $(1 \leq i, j \leq n)$ şi c sînt constante reale.

În cazul $n = 2$, hipercuadricele se mai numesc **conice** (în plan), iar în cazul $n = 3$, **cuadrice** (în spaţiu).

Revenind la cazul general şi notînd $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $B = -(b_1, b_2, ..., b_n)^T$, ecuaţia anterioară se scrie (*) $x^T \cdot A \cdot x - 2B^T \cdot x + c = 0$, unde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$.

Conform teoriei formelor pătratice, expusă mai sus, există o transformare liniară care reduce ecuația anterioară la forma

$$z_1^2 + \ldots + z_r^2 - z_{r+1}^2 - \ldots - z_{r+s}^2 - 2d_1 z_1 - \ldots - 2d_n z_n + c_1 = 0,$$

unde (r, s) este signatura formei pătratice asociate matricei A, $q(x) = x^T \cdot A \cdot x$.

Făcînd o translație $z = u + \alpha$, cu $\alpha \in \mathbb{R}^n \simeq M_{n,1}(\mathbb{R})$ convenabil, se obține în coordonatele $u_1, \ldots, u_n$ o ecuație de forma

$$u_1^2 + \ldots + u_r^2 - u_{r+1}^2 - \ldots - u_{r+s}^2 - 2d_{r+s+1}u_{r+s+1} - \ldots - 2d_n u_n + d = 0.$$

Apar trei cazuri:

1) Cel puțin unul din numerele $d_{r+s+1}, \ldots, d_n$ este nenul, de exemplu $d_n \neq 0$ și $r + s < n$. Atunci punînd $v_i = \begin{cases} u_i & \text{dacă} \quad i < n \\ d_{r+s+1}u_{r+s+1} + \ldots + d_n u_n & \text{dacă} \quad i = n \end{cases}$

și apoi efectuînd translația $w_i = \begin{cases} v_i & \text{dacă } i < n \\ v_i - \dfrac{d}{2} & \text{dacă } i = n \end{cases}$

se obține ecuația hipercuadricii în coordonatele $w_1, \ldots, w_n$ sub formă redusă

$$\pm w_1^2 \pm w_2^2 \pm \ldots \pm w_{r+s}^2 - 2w_n = 0,\ 1 \le r + s \le n - 1.$$

2) Toate numerele $d_{r+s+1}, \ldots, d_n$, d sînt nule și ecuația hipercuadricii este

$$\pm u_1^2 \pm \ldots \pm u_{r+s}^2 = 0,\ 1 \le r + s \le n.$$

3) Numerele $d_{r+s+1}, \ldots, d_n$ sînt nule și $d \neq 0$. Atunci punînd $v_i = \dfrac{u_i}{\sqrt{|d|}}$, ecuația hipercuadricii se scrie sub forma redusă

$$\pm v_1^2 \pm \ldots \pm v_{r+s}^2 \pm 1 = 0,\ 1 \le r + s \le n.$$

Conform legii inerției aceste trei tipuri de cuadrice sînt distincte și nu pot fi transformate una în alta prin transformări liniare sau translații.

Cazul conicelor în plan ($n = 2$)

Ecuația generală a conicelor este

$$f(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,\ a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Punînd $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ aceasta se scrie sub forma $X^T \cdot A \cdot X - 2B^T \cdot X + a_{33} = 0$.

Sistemul liniar $A \cdot s = B$, $s = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se scrie echivalent $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ și dacă A este nesingulară (adică $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$), atunci el are o soluție unică (α, β); conica $f(x, y) = 0$ admite un centru de simetrie, tocmai $s = (\alpha, \beta)$, care este deci tocmai punctul critic al funcției f [Într-adevăr, punînd $x = x_1 + \alpha$, $y = y_1 + \beta$, ecuația conicei este de forma

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + a'_{33} = 0$$

și originea $x_1 = 0, y_1 = 0$ este centru de simetrie].

Făcînd o transformare ortogonală T convenabilă (care se determină cu ajutorul vectorilor proprii ai lui A), $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, ecuația conicei în coordonatele x', y' va fi de forma $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0$.

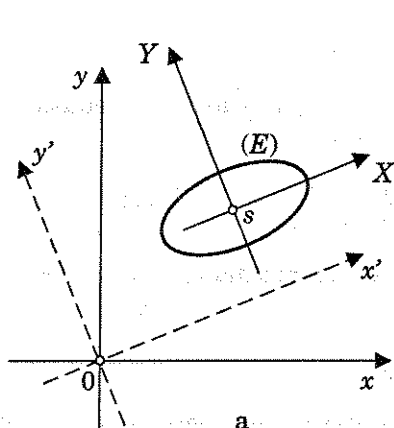
Cazul I. Dacă λ_1 și λ_2 sînt nenule (deci A este nesingulară), atunci printr-o translație convenabilă,

$x' = \alpha + X, y' = \beta + Y$ se obține o ecuație de forma $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + d = 0$.

Dacă λ_1, λ_2 au același semn și $d \neq 0$, atunci se obține în planul XOY o **elipsă** (E) (figura II.5, a) (reală dacă $d \cdot \lambda_1 < 0$ și imaginară dacă $d \cdot \lambda_1 > 0$);

Dacă $d = 0$ se obține o elipsă care degenerează în două drepte imaginare

$$Y = \pm i\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}X.$$



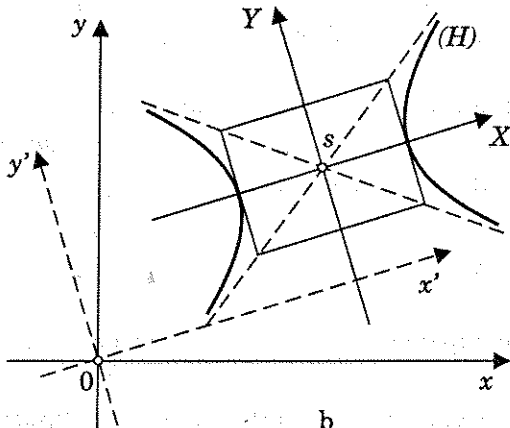


Figura II.5.

Dacă λ_1, λ_2 au semne contrarii și $d \neq 0$, se obține o **hiperbolă** (figura II.5, b) și dacă $d = 0$, hiperbola degenerează în două drepte reale $Y = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}X$.

Să remarcăm că axele Ox', Oy' au direcțiile vectorilor proprii ai matricii A, iar sistemul de coordonate XO_1Y are originea în centrul conicei.

Cazul II. Presupunem de exemplu $\lambda_1 = 0$ și $\lambda_2 \neq 0$ (cazul $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ fiind exclus, pentru că ar rezulta $A = 0$). Atunci printr-o translație convenabilă, se obține o ecuație de forma $\lambda_1 Y^2 + dX = 0$ sau de forma $\lambda_2 Y^2 + d_1 = 0$.

Dacă $d \neq 0$ recunoaștem ecuația unei parabole (în acest caz conica nu admite centru de simetrie); în celelalte cazuri se obțin două drepte confundate sau paralele.

Din discuția anterioară reținem că fiind dată o conică

$$f(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

se calculează mai întîi valorile proprii λ_1, λ_2 ale matricei A asociate, care sînt rădăcinile ecuației

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ sau } \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + \delta = 0, \text{ unde } \delta = \det A.$$

Dacă $\delta > 0$, atunci λ_1, λ_2 au acelaşi semn şi conica este o elipsă (eventual degenerată în două drepte imaginare), iar dacă $\delta < 0$, atunci conica este o hiperbolă (care degenerează eventual în două drepte reale). În cazul cînd $\delta = 0$, se obţine o parabolă (degenerată eventual în două drepte paralele).

Conica are centru dacă şi numai dacă $\delta \neq 0$ şi în acest caz, centrul se determină rezolvînd sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Cazul cuadricelor în spaţiu ($n = 3$)

Ecuaţia generală a acestor suprafeţe va fi de forma

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Procedînd ca mai sus, se constată că există în esenţă 5 tipuri de cuadrice, ale căror ecuaţii reduse (după transformări ortogonale şi translaţii convenabile) vor fi de forma

I. $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + d = 0$

II. $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + bZ = 0$

III. $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + d = 0$

IV. $\lambda_1 Y^2 + bX = 0$

V. $\lambda_1 X^2 + d = 0.$

În cazul I, dacă $d \neq 0$ şi dacă $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (care vor fi tocmai valorile proprii ale matricei formei pătratice asociate) au acelaşi semn (opus lui d), atunci se obţine un **elipsoid,** avînd o ecuaţie de tipul

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0 \ (a > 0, b > 0, c > 0 \text{ constante}).$$

Relativ la coordonatele X, Y, Z el admite planele de coordonate ca plane de simetrie şi are imaginea geometrică de forma indicată în figura II.6.

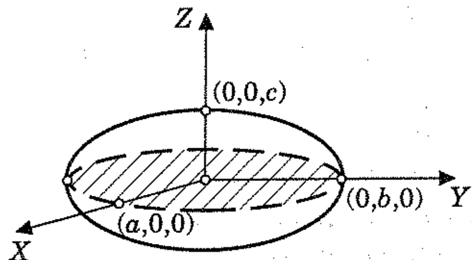
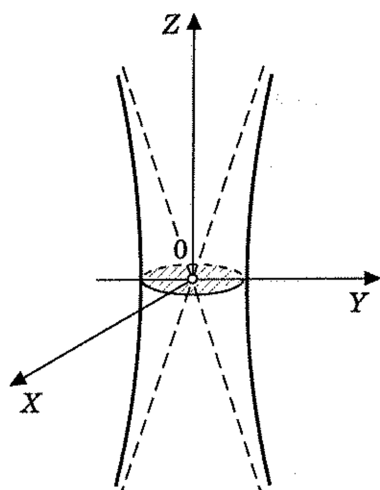


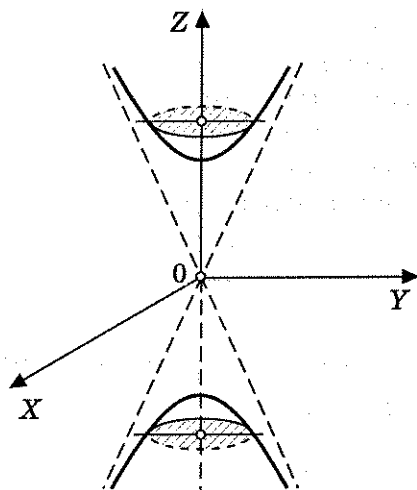
Figura II.6.

Dacă $d \neq 0$ şi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, d$ au acelaşi semn, cuadricea este un elipsoid imaginar. Dacă $d = 0$, atunci cuadricea este un con de gradul II.

Dacă $d \neq 0$ şi λ_1, λ_2, λ_3 nu au acelaşi semn, atunci se obţine un **hiperboloid,** avînd una din formele indicate în figura II.7.



(Hiperboloid cu o pînză)



(Hiperboloid cu două pînze)

Figura II.7.

În cazul II, dacă λ_1, λ_2 au acelaşi semn, se obţine un **paraboloid eliptic** ("titirez"), iar dacă au semn contrar, un **paraboloid hiperbolic** ("şaua").

În cazurile III, IV, V se observă că lipseşte o variabilă (anume Z). De exemplu, o suprafaţă avînd o ecuaţie de forma $g(X, Y) = 0$ este un cilindru cu generatoarele paralele cu OZ şi sprijinite pe curba din planul XOY, de ecuaţii

$$\begin{cases} g(X,Y) = 0 \\ Z = 0 \end{cases}$$

EXEMPLE. 1) Reprezentăm grafic conica $f(x,y) \equiv x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x = 0$.

În acest caz sistemul $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 2x + 4y + 2 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 4x + 10y = 0$ admite soluţia $(-5, 2)$ care constituie centrul conicei. Făcînd translaţia $x = X - 5$, $y = Y + 2$, ecuaţia conicei devine

$$X^2 + 4XY + 5Y^2 - 5 = 0.$$

Pe de altă parte, avem $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ şi valorile proprii sînt $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Deoarece $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, conica este o elipsă; vectorii proprii ai lui A dau direcţiile axelor elipsei. Ţinînd cont şi de intersecţiile conicei $f(x, y) = 0$ cu

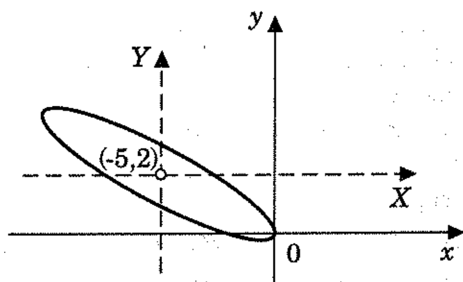


Figura II.8.

axele Ox, Oy, se obţine conica din figura II.8.

2) Cuadrica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$ ($a>0$, $b>0$ date) este un paraboloid eliptic (figura II.9).

3) Cuadrica $z=xy$ este un paraboloid hiperbolic (deoarece prin rotaţia cu 45° în jurul axei Oz:

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$, $z=z'$, se obţine $x'^2-y'^2=2z'$).

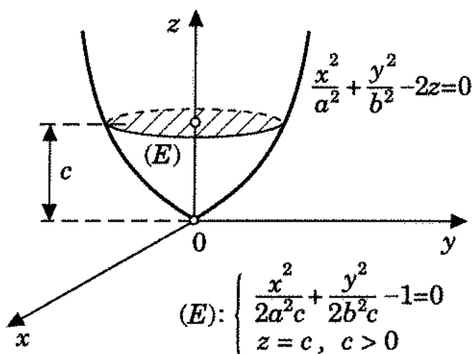


Figura II.9

§ 4. Metode numerice în algebra liniară (continuare)

Indicăm cîteva alte metode numerice care utilizează noţiunile studiate în acest capitol – produse scalare, norme, aplicaţii biliniare etc.

4.1. Pseudoinversa unei matrice

Vom asocia oricărei matrice, dreptunghiulare sau pătratice singulare, o altă matrice, cu proprietăţi remarcabile, numită pseudoinversă. Definiţia şi studiul acestei noţiuni sînt datorate matematicianului englez R. Penrose.

Fie $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ o matrice **oarecare** şi $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ aplicaţia liniară asociată, $\varphi(x)=xA^T$. Vom defini o nouă aplicaţie liniară, notată $\varphi^{\#}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ (se citeşte "diez"), în modul următor: pentru orice $u\in\mathbb{R}^m$ se consideră acel unic vector $v\in\operatorname{Im}\varphi$ astfel încît $\|u-v\|=$ minim. Deoarece $v\in\operatorname{Im}\varphi$, există

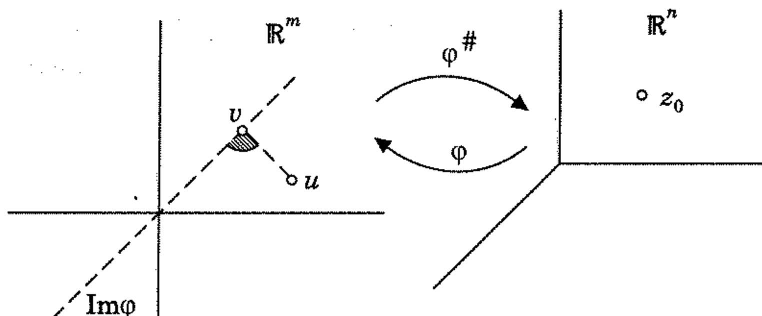


Figura II.10.

$z\in\mathbb{R}^n$ astfel încît $v=\varphi(z)$; acest z nu este neapărat unic şi alegem acel z_0 unic astfel încît $v=\varphi(z_0)$ şi $\|z_0\|=$ minim. Prin definiţie, se pune $\varphi^{\#}(u)=z_0$.

Aplicaţia $\varphi^{\#}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $u\to z_0$ astfel definită se dovedeşte a fi liniară şi se notează cu $A^{\#}$, matricea din $M_{n,m}(\mathbb{R})$ asociată. Matricea $A^{\#}$ se numeşte **pseudoinversa** lui A. (Unii autori notează A^+ în loc de $A^{\#}$).

Fără a intra în detalii, [recomandăm V. Voevodin – "Algebră liniară" (l. rusă), Ed. Nauka, 1980] indicăm o listă de proprietăți:

1) Orice matrice dreptunghiulară (sau pătratică, singulară sau nesingulară) are o pseudoinversă unică.

2) Dacă $m = n$ şi A este nesingulară, atunci $A^{\#} = A^{-1}$ (un rezultat liniştitor);

3) Pentru orice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $A \cdot A^{\#}$ şi $A^{\#} \cdot A$ sînt simetrice şi în plus $(A^{\#})^{\#} = A$, $AA^{\#}A = A$.

4) Dacă $D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ este o matrice diagonală şi notăm

$$\mu_i = \begin{cases} 1/\lambda_i & \text{dacă} \quad \lambda_i \neq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad \lambda_i = 0, \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq n,$$

atunci $D^{\#} = \text{diag}(\mu_1, ..., \mu_n)$. Dacă există o matrice ortogonală U astfel încît $A = U^T \cdot D \cdot U$ (cu D diagonală), atunci $A^{\#} = U^T \cdot D^{\#} \cdot U$.

5) Dacă rangul matricei A este maxim (adică $\rho(A) = \min(m, n)$), atunci

$$A^{\#} = \begin{cases} (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T & \text{dacă} \quad m > n \\ A^{-1} & \text{dacă} \quad m = n \\ A^T (A \cdot A^T)^{-1} & \text{dacă} \quad m < n. \end{cases}$$

Proprietățile 4, 5 dau reguli explicite de calcul al lui $A^{\#}$.

Aplicația cea mai interesantă a pseudoinversei este următoarea: Dacă $A \cdot X = B$ este un sistem liniar oarecare (cu $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$), atunci vectorul-coloană $X^{\#} = A^{\#} \cdot B$ se numeşte **pseudosoluția** sistemului. O soluție exactă ar fi satisfăcut condiția $A \cdot X - B = 0$, iar pseudosoluția poate fi caracterizată prin aceea că $\left\| AX^{\#} - B \right\|^2 = \min\limits_X \left\| AX - B \right\|^2$ (se mai spune că pseudosoluția este determinată prin metoda celor mai mici pătrate).

Reținem că orice sistem liniar, compatibil sau chiar incompatibil, admite o pseudosoluție, unică.

EXEMPLE. 1) Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, atunci $A^{\#} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, în timp ce A^{-1} nu există.

2) Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ o matrice de tip 2×4. Aplicația liniară asociată este $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_2 - x_4, x_3)$ şi $\text{Im}\, \varphi = \mathbb{R}^2$.

Construim $\varphi^{\#}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ şi fie $\forall\ u = (p, q) \in \mathbb{R}^2$; cu notațiile de mai sus, avem $v = (p, q)$. Alegem $z_0 = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ cu $\|z_0\| =$ minim, astfel încît $\varphi(z_0) = (p, q)$; aceasta revine la a găsi minimul lui $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ cu legăturile $3b - d = p$, $c = q$ (p, q date) deci cu metoda multiplicatorilor Lagrange, $a = 0$,

$b = \frac{3p}{10}$, $c = q$, $d = -\frac{p}{10}$. Ca atare, $\varphi^{\#}(p, q) = \left(0,\ \frac{3p}{10},\ q,\ -\frac{1p}{10}\right)$ şi $A^{\#} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-1}{10} & 0 \end{pmatrix}$.

Se putea observa şi că rang A = maxim deci $A^{\#} = A^T \cdot (A \cdot A^T)^{-1}$.

3) Folosind rezultatul de la exemplul precedent, determinăm pseudosoluţia sistemului liniar

$$\begin{cases} 3x_2 - x_4 = 1 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

Acest sistem se scrie matricial $A \cdot X = B$ unde $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$,

iar pseudosoluţia lui este $X^{\#} = A^{\#} \cdot B = \left(0 \quad \frac{3}{10} \quad 4 \quad -\frac{1}{10}\right)^T$.

4) Fie matricea singulară $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$. Aplicaţia liniară asociată este

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \varphi(a, b) = (4a + b,\ 8a + 2b),$$

iar $\operatorname{Im} \varphi = \{(t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ este identificată cu dreapta din plan de ecuaţie $y = 2x$. Fie $\forall\, u = (p, q) \in \mathbb{R}^2$; vectorul $v \in \operatorname{Im} \varphi$ astfel încît $\|u - v\|$ = minim este obţinut prin intersecţia dreptelor perpendiculare $y = 2x$ şi $y - q = -\frac{1}{2}(x - p)$; rezultă $x = \frac{p + 2q}{5}$, $y = \frac{2p + 4q}{5}$ deci $v = \left(\frac{p + 2q}{5},\ \frac{2p + 4q}{5}\right)$.

Considerăm acum toţi vectorii $z = (x, y)$ cu $\varphi(x, y) = v$ deci $4x + y = \frac{p + 2q}{5}$ şi alegem pe acela pentru care $x^2 + y^2$ = minim; folosind metoda multiplicatorilor lui Lagrange, rezultă $x = \frac{4p + 8q}{85}$, $y = \frac{p + 2q}{85}$; ca atare,

$$\varphi^{\#}(p, q) = \left(\frac{4p + 8q}{85},\ \frac{p + 2q}{85}\right).$$

Determinăm acum pseudosoluţia sistemului liniar nedeterminat

$$\begin{cases} 4x + y = k \\ 8x + 2y = 2k, \qquad k \text{ real dat.} \end{cases}$$

Aceasta este $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{\#} \cdot \begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} = \frac{1}{85}\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ 2k \end{pmatrix} = \frac{k}{17}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ deci $x = \frac{4k}{17}$, $y = \frac{k}{17}$.

Trebuie remarcat că acest punct reprezintă coordonatele proiecţiei originii pe dreapta $4x + y = k$.

5) Sistemul $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=2 \end{cases}$ este evident incompatibil. Pseudosoluţia lui este $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{\#} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; deoarece $A^{\#} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$, rezultă $x = y = \frac{5}{4}$. Se observă că punctul $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$ este situat pe segmentul perpendicularei dusă din origină pe dreptele paralele $x+y=3$, $x+y=2$, "mediind" între acestea.

OBSERVAŢIE. Pînă acum eram obişnuiţi să rezolvăm doar sisteme liniare de forma $A \cdot X = B$ cu A matrice pătratică nesingulară de ordin n. Astfel de sisteme apar în multe consideraţii practice, unde se cer valorile a n mărimi şi bineînţeles se recomandă să se facă exact n măsurători (dacă se fac prea puţine sistemul devine în general nedeterminat, iar dacă se fac prea multe determinări, sistemul devine incompatibil!). Apăreau astfel restricţii supărătoare. Pseudosoluţia există pentru orice sistem liniar, ea "mediază" între ecuaţiile sistemului şi astfel nu mai respingem sistemele incompatibile.

4.2. Metoda Ritz-Galerkin

Fie V un spaţiu vectorial real. Presupunem că sînt definite o aplicaţie biliniară $h : V \times V \to \mathbb{R}$ şi o aplicaţie liniară $\varphi : V \to \mathbb{R}$. Se poate formula următoarea problemă:

(RG) **Să se determine un element** $u \in V$ **astfel încît** $h(u,v) = \varphi(v)$ **pentru orice** $v \in V$.

În practică se rezolvă o problemă finit dimensională, care o aproximează pe cea precedentă. Anume se alege un subspaţiu vectorial $W \hookrightarrow V$ de dimensiune finită n ($n \geq 1$) şi se caută un element $u_0 \in W$ astfel încît $h(u_0, w) = \varphi(w)$ pentru orice $w \in W$. Dacă n este suficient de mare, se consideră că u_0 aproximează soluţia problemei (RG). Se pun în mod natural întrebări asupra existenţei şi unicităţii soluţiei problemei (RG), asupra erorii în formula aproximativă $u \simeq u_0$, ca şi întrebări legate de convergenţa soluţiilor aproximative către soluţia exactă; răspunsul necesită dezvoltări ample de analiză funcţională care depăşesc cadrul acestui curs.

Indicăm doar modul cum se poate rezolva problema (RG) finit dimensională. Se alege o bază $v_1, ..., v_n$ a lui W ($n = \dim W$). Atunci $u_0 = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$ şi orice vector $w \in W$ se scrie $w = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$; a determina u_0 revine la a determina numerele reale $x_1, ..., x_n$. Condiţia $h(u_0, w) = \varphi(w)$ pentru orice $w \in W$ revine la $h(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j, \sum_{i=1}^{n} y_i v_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} y_i v_i)$ adică

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j y_i\, h(v_j, v_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi(v_i) \text{ sau } \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n} h(v_j, v_i) x_j - \varphi(v_i)\right] y_i = 0.$$

Numerele y_i, $1 \leq i \leq n$, fiind arbitrare, rezultă

$$\sum_{j=1}^{n} h(v_j, v_i)x_j = \varphi(v_i),\ 1 \leq i \leq n.$$

Să notăm $a_{ij} = h(v_j, v_i)$ şi fie $H = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ matricea aplicaţiei liniare h relativ la baza $v_1, \ldots, v_n$.

Notînd $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} \varphi(v_1) \\ \vdots \\ \varphi(v_n) \end{pmatrix}$ relaţiile anterioare se scriu matriceal $H \cdot X = c$.

Metoda Ritz–Galerkin stă la baza dezvoltării **metodei elementelor finite**; în unele contexte fizice matricea H se mai numeşte **matrice de rigiditate.** Pseudosoluţia $X^{\#} = H^{\#} \cdot c$ oferă valori pentru necunoscutele $x_1, \ldots, x_n$ şi astfel se determină u_0. În practică, V este un spaţiu de funcţii iar W este un spaţiu de polinoame sau de funcţii–spline (care sînt funcţii polinomiale pe porţiuni).

EXEMPLU. Fie $V = C^1_{[0,1]}$, $h : V \times V \to \mathbb{R}$, $h(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx$ şi $\varphi : V \to \mathbb{R}$, $\varphi(v) = \int_0^1 v'(x)\,dx = v(1) - v(0)$. Determinăm $u \in V$ astfel încît $h(u, v) = \varphi(v)$ pentru orice $v \in V$. Alegem $W = \mathbb{R}_2[X]$ şi baza $\{1, X, X^2\}$ a lui W; deci $v_1 = 1$, $v_2 = x$, $v_3 = x^2$ şi $h(v_1, v_1) = 0$; $h(v_1, v_2) = h(v_2, v_1) = 0$; $h(v_1, v_3) = h(v_3, v_1) = 0$; $h(v_2, v_2) = \int_0^1 1 \cdot 1\,dx = 1$; $h(v_2, v_3) = h(v_3, v_2) = \int_0^1 1 \cdot 2x\,dx = 1$ şi $h(v_3, v_3) = \int_0^1 2x \cdot 2x\,dx = \frac{4}{3}$. În plus, $\varphi(v_1) = 0$, $\varphi(v_2) = 1$, $\varphi(v_3) = 1$ deci

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4/3 \end{pmatrix} \text{ şi } c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se determină numerele α_1, α_2, α_3 din condiţia $(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^T = H^{\#} \cdot c$ şi apoi soluţia aproximativă $u_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2$ a problemei puse.

4.3. Calculul aproximativ al valorilor proprii

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice pătratică de ordin n. Calculul teoretic al valorilor proprii se face rezolvînd ecuaţia algebrică $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$, de grad n.

Pentru valori mari ale lui n este necesar un volum foarte mare de calcul; în plus, calculele prezintă fenomene de instabilitate, în sensul că variaţii mici ale coeficienţilor matricei A pot conduce la variaţii mari ale valorilor proprii.

Iată un exemplu în acest sens. Fie matricea $A \in M_{20}(\mathbb{R})$,

$$A=\begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 20 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 20 & & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & \ddots & \ddots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & \ddots & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 2 & 20 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este evident că $P_A(\lambda)=\prod_{k=1}^{20}(k-\lambda)-20^{19}\cdot\varepsilon$. Vom urmări modul cum variază cu ε cea mai mică (în modul) valoare proprie a lui A. Termenul liber al polinomului caracteristic va fi $P_A(0)$. Pentru $\varepsilon=0$ acesta va fi egal cu $20!\simeq 2{,}5\cdot 10^{18}$ (Stirling); în acest caz valorile proprii ale lui A vor fi $1, 2, 3, ..., 20$ şi cea mai mică în modul va fi $\lambda_{20}=1$. Să presupunem acum că $\varepsilon=20^{-19}\times 20!\simeq 5\cdot 10^{-7}$ (deci am dat o variație foarte mică lui ε). În acest caz $P_A(\lambda)=\prod_{k=1}^{20}(k-\lambda)-20!$ şi $P_A(0)=0$ deci $\lambda_{20}=0$ este valoare proprie pentru A (desigur cea mai mică în modul), iar saltul de la $\lambda_{20}=1$ la $\lambda_{20}=0$ este foarte mare.

Acest exemplu arată că valorile proprii ale matricei (în acest caz cea mai mică în modul) au fost perturbate serios, deşi un singur coeficient al matricii a fost foarte uşor perturbat. [Atragem atenția că forma canonică Jordan este de asemenea sensibilă la perturbații, ceea ce face ca în utilizarea ei în practică să se ia precauții mari în controlul propagării erorilor de metodă sau de trunchiere]. Se poate arăta că perturbațiile elementelor de pe diagonala principală sînt mai puțin grave, iar pentru matrice simetrice este asigurată stabilitatea la perturbații a valorilor proprii.

Am indicat anterior un mod geometric (lema lui Gerşgorin, I.3.3) de localizare în planul complex a valorilor proprii ale unei matrice. Vom da ulterior, în cadrul studiului stabilității sistemelor dinamice, criterii ca valorile proprii ale unei matrice să fie situate în semiplanul stîng $\operatorname{Re}\lambda<0$. În cele ce urmează vom prezenta **metoda iterativă** pentru calculul valorilor şi vectorilor proprii în cazul matricelor simetrice, aplicabilă doar cu ajutorul mijloacelor rapide de calcul.

Fie $A\in M_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică, cu toate valorile proprii simple şi strict pozitive, pe care le presupunem dispuse în ordine descrescătoare

$$\lambda_1>\lambda_2>...>\lambda_n>0.$$

Să notăm respectiv $u_1, u_2, ..., u_n$ versorii proprii corespunzători (asimilați cu vectori-coloană) deci $\|u_k\|=1$ şi $A\cdot u_k=\lambda_k u_k$ pentru $1\le k\le n$. Atunci pentru orice întreg $p\ge 1$ avem $A^p\cdot u_k=\lambda_k^p u_k$. Deoarece A este simetrică, conform

teoremei 2.5 rezultă că vectorii $u_1, \ldots, u_n$ formează o bază ortonormală a lui $\mathbb{R}^n$ deci $<u_i, u_j> = \delta_{ij}$. Apoi pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ avem

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k \text{ cu } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Atunci $A^p \cdot x = A^p \cdot (\sum_{k=1}^{n} a_k u_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k (A^p u_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \lambda_k^p u_k$

deci $\left\| A^p \cdot x \right\|^2 = < A^p x, A^p x > = < \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k^p u_k, \sum_{s=1}^{n} a_s \lambda_s^p u_s > =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_k a_s \lambda_k^p \lambda_s^p < u_k, u_s > = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \lambda_k^{2p}.$$

Facem ipoteza că $a_1 \neq 0$. Atunci pentru orice $p \geq 1$,

$$\frac{A^p x}{\left\| A^p x \right\|} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k^p u_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \lambda_k^{2p}}} = \frac{a_1 \lambda_1^p \left[u_1 + \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^p u_2 + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^p u_n \right]}{|a_1| \lambda_1^p \sqrt{1 + \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2p} + \ldots + \left(\frac{a_n}{a_1} \right)^2 \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{2p}}}.$$

În general, dacă $0 < \alpha < 1$ atunci $\lim_{p \to \infty} \alpha^p = 0$ deci dacă $p >> 1$ (suficient de mare), atunci $\alpha^p \simeq 0$. Aplicînd acest fapt pentru rapoartele subunitare $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$, rezultă $\frac{A^p x}{\left\| A^p x \right\|} \simeq \frac{a_1 \lambda_1^p u_1}{|a_1| \lambda_1^p}$ deci $u_1 = \pm \frac{A^p x}{\left\| A^p x \right\|}$ (semnul nu are importanță). Pe de altă parte, rezultă

$$\frac{\left\| A^{p+1} x \right\|}{\left\| A^p x \right\|} = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \lambda_k^{2p+2}}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \lambda_k^{2p}}} = \frac{|a_1| \lambda_1^{p+1} \sqrt{1 + \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2p+2} + \ldots + \left(\frac{a_n}{a_1} \right)^2 \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{2p+2}}}{|a_1| \lambda_1^p \sqrt{1 + \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{2p} + \ldots + \left(\frac{a_n}{a_1} \right)^2 \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{2p}}}$$

și pentru $p >> 1$ avem $\frac{\left\| A^{p+1} x \right\|}{\left\| A^p \cdot x \right\|} = \lambda_1$.

Din cele de mai sus, rezultă următorul algoritm:

1) se alege un vector oarecare x (în general condiția $a_1 \neq 0$ se îndeplinește de la sine);

2) se calculează puteri succesive $A^p \cdot x$ pentru $p = 1, 2, 3, \ldots$ și normele $\left\| A^p \cdot x \right\|$;

3) cea mai mare valoare proprie a matricei A este cu aproximație, $\lambda_1 = \frac{\left\| A^{p+1} x \right\|}{\left\| A^p x \right\|}$ iar un versor propriu corespunzător este $u_1 = \frac{A^p x}{\left\| A^p x \right\|}$ (p fiind ales suficient de mare).

4) o dată determinați u_1, λ_1, se consideră $x^{(1)} = x - a_1 u_1$ unde $a_1 = <x, u_1>$. Aşadar, $x^{(1)} = a_2 u_2 + ... + a_n u_n$. Raționînd ca mai sus, rezultă

$$\lambda_2 = \frac{\left\|A^{p+1}x^{(1)}\right\|}{\left\|A^p x^{(1)}\right\|},\ u_2 = \frac{A^p x^{(1)}}{\left\|A^p x^{(1)}\right\|} \text{ cu } p >> 1 \text{ etc.}$$

OBSERVAȚIE. Pentru calculul celei mai mici valori proprii a lui A, se recomandă calculul valorii proprii celei mai mari pentru A^{-1}, deoarece

$$\lambda_{min}(A) = \frac{1}{\lambda_{max}(A^{-1})}.$$

Capitolul III ELEMENTE DE MATEMATICĂ DISCRETĂ

§ 1. Grafuri, circuite logice, automate

1.1. Noţiunea de graf; exemple

Noţiunea matematică de graf generalizează intuiţia noastră referitoare la diverse tipuri de reţele de transport, circuite electrice sau microelectronice. În ultimul timp s-a constatat că studiul structurilor ierarhice, descrierea structurilor sintactice sau semantice în lanţurile corecte de cuvinte, organigramele etc. folosesc de asemenea limbajul grafurilor.

DEFINIŢIA 1.1. Se numeşte **graf orientat** G o pereche de mulţimi (V, A), împreună cu o pereche de aplicaţii (i, t) unde V este mulţimea **vîrfurilor,** A este mulţimea **arcelor,** $i: A \to V$ este aplicaţia de **luare a iniţialului** şi $t: A \to V$ aplicaţia de **luare a terminalului.** Se mai scrie $G = (V, A, i, t)$.

Pentru orice arc $a \in A$, vîrful $i(a)$ se numeşte **iniţialul** lui a, iar $t(a)$ se numeşte **terminalul** lui a.

Două vîrfuri v_1, v_2 se zic **unite direct prin arcul** $\alpha \in A$ dacă $v_1 = i(\alpha)$ şi $v_2 = t(\alpha)$; figura III.1.

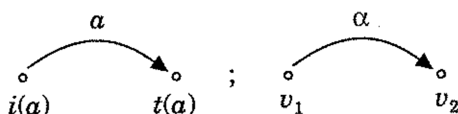


Figura III.1.

Un graf poate fi vizualizat considerînd vîrfurile ca puncte în plan şi arcele ca arce de curbă unind unele din vîrfurile respective. Invers, multe configuraţii discrete se încadrează în definiţia 1.1 şi pot fi prezentate în limbaj de grafuri.

EXEMPLE. 1) Fie $V = \{x, y, z\}$, $A = \{a, b, c, d\}$, $i : A \to V$; $i(a) = x$, $i(b) = z$, $i(c) = z$, $i(d) = z$ şi $t : A \to V$; $t(a) = x$, $t(b) = y$, $t(c) = x$, $t(d) = x$. Acest graf poate fi reprezentat ca figura III.2.

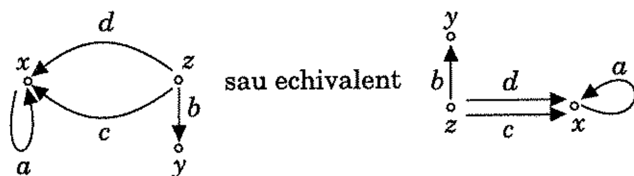


Figura III.2

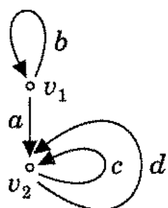


Figura III.3.

2) Configurația din figura III.3 este asociată grafului $G = (V, A, i, t)$ unde $V = \{v_1, v_2\}$, $A = \{a, b, c, d\}$ și $i : A \to V; a \to v_1,\ b \to v_1,\ c \to v_2,\ d \to v_2,\ t : A \to V;\ a \to v_2, b \to v_1, c \to v_2, d \to v_2$.

3) Se spune că un graf orientat $G = (V, A, i, t)$ este **etichetat** dacă din orice vîrf $v \in V$, ies un număr finit de arce ordonate $a_v^1, \ldots, a_v^{r(v)}$ deci: $\left\{a_1^v, \ldots, a_v^{r(v)}\right\} = \left\{a \in A \middle| i(a) = v\right\}$.

Vîrfurile din care nu ies arce se numesc **terminale** ale grafului (sau **frunze**).

Dacă v este un terminal scriem $v \in T$ sau $r(v) = 0$. Să notăm Σ_1 mulțimea etichetelor de operații (cap.I, 1.2) și cu Σ_2 mulțimea etichetelor de predicate (simboluri pentru condiții). Fie $z_1, \ldots, z_p$ elemente care nu aparțin lui $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ și $T_1 = \{z_1, \ldots, z_p\}$. Graful G se numește **schemă logică cu** p **terminale** dacă pentru orice $v \in V$ avem $r(v) \leq 2$ și este definită o aplicație φ: $V \to \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup T_1$, astfel încît:

1) $T = \{v \in V \mid \varphi(v) \in T_1\}$ și $\varphi \mid T : T \to T_1$ este bijectivă;

2) $\varphi(v) \in \Sigma_1$ dacă $r(v) = 1$ și $\varphi(v) \in \Sigma_2$ dacă $r(v) = 2$.

Dacă $G = (V, A, i, t)$ și $G' = (V', A', i', t')$ sînt două grafuri orientate, se numește **morfism de grafuri de la G la G'** o pereche de aplicații $f: V \to V'$, $g : A \to A'$, astfel încît ori de cîte ori $a \in A$ și v_1, v_2 din V sînt unite prin arcul a, să rezulte că $f(v_1)$ și $f(v_2)$ sînt unite (în G') prin arcul $g(a)$. Dacă f și g sînt în plus bijective, se spune că grafurile G și G' sînt **izomorfe**.

DEFINIȚIA 1.2. Fie $G = (V, A, i, t)$ un graf și $n \geq 1$ un întreg. Se numește **drum avînd capetele** $u, v \in V$ **și lungimea** n orice șir finit de arce $d = a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încît $u = i(a_1)$, $t(a_1) = i(a_2), \ldots, t(a_{n-1}) = i(a_n)$ și $t(a_n) = v$.

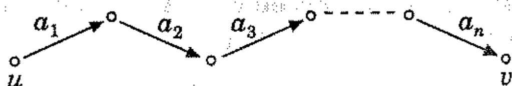


Figura III.4.

Așadar, d este un cuvînt de lungime n în alfabetul A. Se mai spune că drumul d **unește** vîrfurile u, v. Dacă $u = v$, se spune că drumul este **închis**.

Un drum închis de lungime 1 se numește **buclă**.

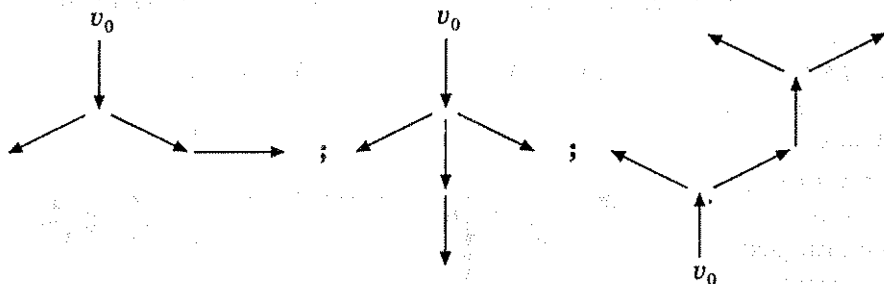


Figura III.5.

Graful orientat G se numeşte **arbore** dacă există un vîrf $v_0 \in V$, numit **rădăcină**, astfel încît pentru orice alt vîrf $v \in V$ există şi este unic un drum care uneşte v_0 şi v. În figura III.5 sînt indicate exemple de arbori.

Fie $G = (V, A, i, t)$ un graf orientat. Se numeşte **graf parţial** al lui G un graf avînd aceeaşi mulţime de vîrfuri ca şi G şi se reţin o parte $A_1 \subset A$ din arcele lui G, iar aplicaţiile i, t se restrîng la A_1. Un **subgraf** al lui G se obţine din G renunţînd la o parte din vîrfuri şi păstrînd arcele între vîrfurile rămase. De exemplu, dacă G este reţeaua rutieră a ţării noastre, un subgraf al lui G este constituit de exemplu de reţeaua rutieră a judeţului Olt şi un graf parţial al lui G se obţine reţinînd de exemplu numai drumurile europene.

Graful G se numeşte **cu legături simple** dacă mulţimea V a vîrfurilor este finită, cu o etichetare fixată $V = \{v_1, ..., v_n\}$ şi orice pereche de vîrfuri pot fi unite prin cel mult un arc. În acest caz, se poate considera o matrice binară $A_G = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ numită **matricea asociată lui** G unde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă vîrful } v_i \text{ este unit cu } v_j \\ 0 & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

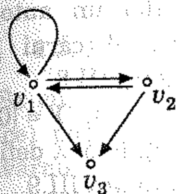


Figura III.6.

De exemplu, pentru graful din figura III.6 matricea asociată este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2. Noţiunea de automat

DEFINIŢIA 1.3. Se numeşte **automat simplu** (sau **maşină abstractă**) un triplet de mulţimi nevide (X, Y, S), împreună cu două aplicaţii $\delta : X \times S \to S$, $\lambda : X \times S \to Y$. Se mai notează $M = (X, Y, S, \delta, \lambda)$. Mulţimea X (respectiv Y) se numeşte mulţimea **intrărilor** (respectiv a **ieşirilor**), iar S este mulţimea **stărilor** automatului M; δ se numeşte **funcţia de tranziţie a stărilor,** iar λ este **funcţia de ieşire.**

Automatul M se numeşte **finit** dacă mulţimea S a stărilor este finită. Dacă $X = Y = \mathbb{B}$, automatul se numeşte **binar**. Pentru orice pereche $(x, s) \in X \times S$ se poate spune că M este în starea s şi "primeşte" intrarea x; în această situaţie $\delta(x, s)$ este un element din S numit starea în care trece automatul, iar $\lambda(x, s)$ este un element din Y numit ieşirea emisă de automat, dacă el s-a aflat în starea s şi a primit intrarea x.

Dacă $M = (X, Y, S, \delta, \lambda)$ şi $M' = (X, Y, S', \delta', \lambda')$ sînt două automate (avînd aceleaşi intrări şi ieşiri), se numeşte **morfism** de la M la M' orice aplicaţie $u: S \to S'$ astfel încît $\forall\ (x, s) \in X \times S$, $u(\delta(x, s)) = \delta'(x, u(s))$ şi

$$\lambda(x, s) = \lambda'(x, u(s)).$$

Dacă există un morfism de la M la M', se mai spune că M **simulează pe** M'.

Oricărui automat $M = (X, Y, S, \delta, \lambda)$ i se poate asocia un graf avînd S ca mulțime a vîrfurilor și în plus, pentru orice $(x, s) \in X \times S$, vîrfurile s și $s_1 = \delta(x, s)$ sînt unite printr-un arc; pe acest arc se scrie x/y, unde $y = \lambda(x, s)$.

EXEMPLE. 1) Considerăm un automat binar cu trei stări a, b, c. Așadar, $X = Y = \mathbb{B}$, $S = \{a, b, c\}$. În acest caz, $X \times S = \{(0, a), (0, b), (0, c), (1, a), (1, b), (1, c)\}$. Presupunem că $\delta(0, a) = a$, $\delta(0, b) = b$, $\delta(0, c) = a$, $\delta(1, a) = b$, $\delta(1, b) = c$, $\delta(1, c) = c$ și $\lambda(0, a) = 1$, $\lambda(0, b) = 0$, $\lambda(0, c) = 0$, $\lambda(1, a) = 1$, $\lambda(1, b) = 1$, $\lambda(1, c) = 0$.

(δ)

S \ X	0	1
a	a	b
b	b	c
c	a	c

;

(λ)

S \ X	0	1
a	1	1
b	0	1
c	0	0

Figura III.7.

Această definire "pe elemente" a funcțiilor δ, λ poate fi sintetizată în tabelele din figura III.7.

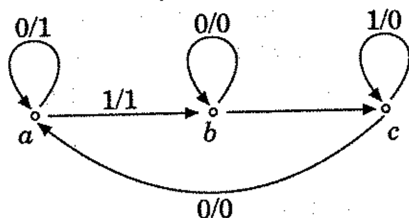


Figura III.8.

Se obține astfel un automat $M = (X, Y, S, \delta, \lambda)$, al cărui graf este indicat în figura III.8

2) Fie $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{0, 1\}$, $S = \{s_1, s_2\}$ și funcțiile δ, λ definite prin tabelele din figura III.9.

Așadar, dacă automatul se află de exemplu în starea s_1 și primește intrarea b, atunci el rămîne în starea s_1 și emite 0. Graful asociat este indicat în figura III.10.

(δ)

S \ X	a	b	c
s_1	s_1	s_1	s_2
s_2	s_2	s_1	s_1

;

(λ)

S \ X	a	b	c
s_1	1	0	1
s_2	0	1	1

Figura III.9.

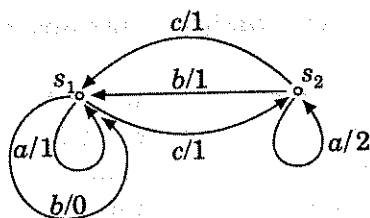


Figura III.10

Se poate introduce elementul – timp deci o dinamică a automatului, considerînd mulțimea numerelor naturale ca mulțime de momente (cu tacte discrete 0, 1, 2, ..., n, $n + 1$, ...). Anume pentru orice automat $M = (X, Y, S, \delta, \lambda)$ se definesc funcțiile $\delta_1 : \mathbb{N} \times X \times S \to \mathbb{N} \times S$, $(t, x, s) \to (t + 1, \delta(x, s))$ și

$$\lambda_1 : \mathbb{N} \times X \times S \to \mathbb{N} \times Y,\ (t, x, s) \to (t, \lambda(x, s)).$$

Interpretarea este următoarea: dacă automatul M se află în starea s și primește intrarea x la momentul t, atunci el emite la același moment t ieșirea $\lambda(x, s)$ și trece la momentul $t + 1$ în starea $\delta(x, s)$. Așadar, prin convenție, ieșirea este simultană cu intrarea, iar trecerea la starea următoare se realizează un tact mai tîrziu.

Se poate extinde modul de lucru al automatului, introducînd la intrare succesiuni de litere (cuvinte din X^*), citite de la stînga la dreapta, literă cu literă.

Dacă $M = (X, Y, S, \delta, \lambda)$ este un automat finit, atunci pentru orice stare $s \in S$ se poate considera **funcția de comportare a lui** M **începînd din** s ca fiind aplicația

$$\gamma_s : X^* \to Y,$$

care asociază oricărui cuvînt $w \in X^*$, ultima literă a cuvîntului de ieşire corespunzător $\lambda^*(w, s)$. Automatul se numeşte **redus** dacă pentru orice stări distincte $s \neq s'$ avem $\gamma_s \neq \gamma_{s'}$. Pentru un automat redus nu există stări distincte cu aceeaşi funcție de comportare deci toate stările sînt semnificative.

În lucrările de teoria automatelor se dă răspuns problemei ca pentru orice automat să se construiască un automat redus asociat (obținut prin restrîngerea mulțimii de stări), făcînd aceleaşi oficii, precum şi altor probleme de analiză, sinteză şi construcție a automatelor.

1.3. Funcții booleene (G. Boole, 1815–1864)

Se cunosc modalitățile de formare de noi propoziții (numite şi formule logice) pornind de la o mulțime E de propoziții elementare (presupuse adevărate sau false), cu ajutorul conectorilor logici. Mai formalizat, să considerăm alfabetul $E \cup \{\rceil, \vee, (\ ,\ )\}$ obținut adăugînd la E semnele logice de negație şi disjuncție, precum şi parantezele deschisă şi închisă şi să notăm cu C mulțimea cuvintelor în acest alfabet. O **propoziție** (sau **formulă logică**) **peste** E este orice cuvînt A din C pentru care există un şir finit $A_1, A_2, \ldots, A_n = A$ de cuvinte din C astfel încît pentru orice i, $1 \le i \le n$, să fie satisfăcută una din următoarele trei condiții: 1^0. $A_i \in E$; 2^0. există $j < i$ astfel încît $A_i = \rceil(A_j) \equiv (\rceil A_j) \equiv \rceil A_j$; 3^0. există $j, k < i$ astfel încît $A_i = (A_j \vee A_k)$.

Vom nota cu $\pi(E)$ mulțimea tuturor propozițiilor peste E. Evident, $E \subset \pi(E)$.

EXEMPLE. 1) $(a \vee (\rceil a))$, $\rceil(a \vee b)$, $(a \vee (b \vee c))$ pentru $a, b, c \in E$ sînt formule logice, dar $a \rceil b$, $(a \vee b$ nu sînt corect formate.

2) Se definesc $(a \wedge b) = \rceil(\rceil a \vee \rceil b)$ şi $(a \Rightarrow b) = ((\rceil a) \vee b)$.

OBSERVAȚIE. Dacă $\Omega = \{F, \Rightarrow\}$ este o signatură unde F este o etichetă de operație nulară ("luarea falsului") iar $\Rightarrow$ este o etichetă de operație binară ("implicația"), mulțimea $\pi(E)$ se identifică prin Ω – algebra generată de E.

Pentru orice $p, q \in \pi(E)$ se definesc

$\bar{p} = \rceil p = (p \Rightarrow F)$; $p \vee q = (\bar{p} \Rightarrow q)$; $p \wedge q = \rceil(\bar{p} \vee \bar{q})$ şi $(p \equiv q) = ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$.

DEFINIȚIA 1.4. Se numeşte **funcție booleană** de n variabile booleene ($n \ge 1$) orice funcție $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$.

EXEMPLE. 1) $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, $f(x) = \rceil x = \bar{x}$ este o funcție booleeană de o variabilă (**"inversorul"**). Se pot considera de asemenea funcțiile constante $0 : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$, $x \to 0$ şi $1 : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$, $x \to 1$.

2) **Disjunctorul** este funcția $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$, $f(x, y) = x \vee y$, iar **conjunctorul** $g : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$, $g(x, y) = x \wedge y$.

3) Orice propoziție $p \in \pi(E)$ definește o funcție booleană în care variabilele sînt asimilate cu propozițiile elementare componente. Lema următoare arată că și afirmația inversă este adevărată.

LEMA 1.1. Fie $f(x_1, ..., x_n)$, $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ o funcție booleană. Atunci pentru orice $x_1, ..., x_n \in \mathbb{B}$ avem:

a) $f(x_1, ..., x_n) = (f(1, 1, ..., 1) \wedge x_1 \wedge ... \wedge x_n) \vee (f(1, ..., 1, 0) \wedge x_1 \wedge ... \wedge$
$\wedge x_{n-1} \wedge \bar{x}_n) \vee ... \vee (f(0, 0, ..., 0) \wedge \bar{x}_1 \wedge ... \wedge \bar{x}_n)$;

(deci de cîte ori apare 0 pe un loc k apare și negația pe variabila x_k).

b) $f(x_1, ..., x_n) = (f(0, ..., 0) \vee x_1 \vee ... \vee x_n) \wedge (f(0, ..., 0, 1) \vee x_1 \vee ... \vee$
$\vee x_{n-1} \vee \bar{x}_n) \wedge ... \wedge (f(1, ..., 1) \vee \bar{x}_1 \vee ... \vee \bar{x}_n)$ (de cîte ori apare 1 pe un loc k apare și negația pe variabila x_k).

DEMONSTRAȚIE. a) Fixăm $x_1, ..., x_n \in \mathbb{B}$ și să presupunem că $x_{i_1} = 0,\ x_{i_2} = 0, \dots, x_{i_p} = 0$ unde $i_1 < i_2 < ... < i_p$ (celelalte valori fiind egale cu 1).

Așadar pentru $1 \le k \le n$, $k \ne i_1, ..., k \ne i_p$ avem $x_k = 1$ deci $\bar{x}_k = 0$ și cum $1 \wedge a = a$, $0 \wedge a = 0$ pentru orice $a \in \mathbb{B}$, rezultă că toate parantezele din membrul drept al relației din enunț sînt nule, cu excepția lui

$$f(1, \dots, 1, \overset{i_1}{0}, \dots, \overset{i_2}{0}, 1, \dots, \overset{i_p}{0}, 1, \dots, 1) \wedge x_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{x}_{i_2} \wedge \dots \wedge \bar{x}_{i_p} \wedge \dots \wedge x_n.$$

Aceasta din urmă este egală evident cu

$$f(1, \dots, 1, \overset{i_1}{0}, \dots, \overset{i_2}{0}, 1, \dots, \overset{i_p}{0}, 1, \dots, 1) \wedge 1 \wedge \dots \wedge 1 = f(x_1, \dots, x_n).$$

Relația b) se demonstrează similar.

OBSERVAȚIE. O reformulare a egalității a) este următoarea: **orice funcție booleană $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ este funcția booleană asociată formulei logice**

$$(f(1, \dots, 1) \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_n) \vee (f(1, \dots, 1, 0) \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-1} \wedge \bar{x}_n) \vee \dots \vee$$
$$\vee (f(0, \dots, 0) \wedge \bar{x}_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_n).$$

Așadar, orice funcție booleană de variabilele $x_1, ..., x_n$ este exprimabilă printr-un număr finit de semne logice $\rceil$, $\wedge$, $\vee$ cu ajutorul lui $x_1, ..., x_n$.

TEOREMA 1.2. (reducerea funcțiilor booleene la forma canonică).

Fie $f(x_1, ..., x_n)$, $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ o funcție booleană.

a) Dacă $f \ne 0$ și $P_1, P_2, ..., P_p$ **sînt punctele din $\mathbb{B}^n$ unde f ia valoarea** 1, **atunci** $f(x_1, ..., x_n) = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee ... \vee \varphi_p$, **unde** $\varphi_j = y_{j1} \wedge y_{j2} \wedge ... \wedge y_{jn}$, $1 \le j \le p$, **iar**

$$y_{js} = \begin{cases} x_s & \text{dacă } s - \text{coordonata punctului } P_j \text{ este } 1 \\ \bar{x}_s & \text{dacă } s - \text{coordonata punctului } P_j \text{ este } 0 \end{cases}$$

pentru $1 \le s \le n$ (**forma canonică normal disjunctivă a lui** f).

b) **Dacă** $f \ne 1$ **și** $Q_1, Q_2, ..., Q_p$ **sînt punctele din $\mathbb{B}^n$ unde f ia valoarea** 0, **atunci** $f(x_1, ..., x_n) = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge ... \wedge \psi_q$, **unde** $\psi_k = z_{k1} \vee z_{k2} \vee ... \vee z_{kn}$ $(1 \le k \le q)$,

$$\textbf{iar } z_{kt} = \begin{cases} x_t & \text{dacă } t - \text{coordonata punctului } Q_k \text{ este } 1 \\ \bar{x}_t & \text{dacă } t - \text{coordonata punctului } Q_k \text{ este } 0, \end{cases}$$

pentru $1 \le t \le n$ (**forma canonică normal conjunctivă a lui** f).

DEMONSTRAȚIE. a) Se aplică lema 1.1, a) observînd că dacă f ia valoarea 0 într-un punct, atunci dispare termenul corespunzător din membrul drept al relației. Așadar, rămîn doar termenii care corespund valorilor lui f în punctele $P_1, P_2, ..., P_p$ și este suficient să notăm parantezele respective cu $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p$.

b) se demonstrează similar, folosind lema 1.1., b).

Funcțiile φ_j se numesc **minitermeni conjunctivi,** iar ψ_k **minitermeni disjunctivi** pentru f.

EXEMPLU. Indicăm forma normal disjunctivă pentru funcția booleană $f: \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$, definită prin $f(0, 0) = 1, f(0, 1) = 0, f(1, 0) = 1, f(1, 1) = 1$. În acest caz, $P_1(0, 0), P_2(1, 0), P_3(1, 1)$ deci $p = 3$ și

$$\varphi_1 = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2,\ \ \varphi_2 = x_1 \wedge \bar{x}_2,\ \ \varphi_3 = x_1 \wedge x_2.$$

Așadar,

$$f(x_1, x_2) = (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_2) = ((\overline{x_1} \vee x_1) \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_2) =$$
$$= (1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_2) = \overline{x_2} \vee (x_1 \wedge x_2) = x_1 \vee \overline{x_2}.$$

1.4. Latice și circuite logice

DEFINIȚIA 1.5. Se numește **latice** orice mulțime ordonată $(L, \le)$ în care pentru orice două elemente $a, b \in L$ există un cel mai mare minorant, $a \wedge b = \inf \{a, b\}$ și cel mai mic majorant, $a \vee b = \sup \{a, b\}$.

EXEMPLE. 1) Pentru orice mulțime E, mulțimea $L = \mathrm{P}(E)$ a tuturor părților lui E este o latice relativ la relația de incluziune ($\subset$), deoarece pentru orice $A, B \subset E$, există $\inf \{A, B\} = A \cap B$ și $\sup \{A, B\} = A \cup B$.

2) Fie **E** mulțimea tuturor evenimentelor din cadrul unei experiențe. Dacă $A, B \in \mathbf{E}$, se spune că A implică ($\Rightarrow$) B dacă producerea lui A atrage după sine producerea lui B. Atunci **E** este o mulțime ordonată relativ la relația de implicație $\Rightarrow$ și în plus, $\forall A, B \in \mathbf{E}$ există $\inf \{A, B\}$ = evenimentul–producere simultană a lui A și B; $\sup \{A, B\}$ = evenimentul–producere a cel puțin unuia din evenimentele A și B.

Așadar, **E** este în mod natural o latice.

3) Fie E o mulțime oarecare și L mulțimea tuturor funcțiilor $f : E \to [0, 1]$; introducem pe L relația de ordine $(f \le g) \leftrightarrow \forall x \in E, f(x) \le g(x)$. Pentru orice $f, g \in L$ există funcțiile $u, v : E \to [0, 1]$, $u = \inf \{f, g\}$ și $v = \sup \{f, g\}$, definite prin $u(x) = \min (f(x), g(x))$, $v(x) = \max (f(x), g(x))$. Așadar, L este o latice, numită laticea mulțimilor **vagi**.

4) Mulțimea $\pi(E)$ a propozițiilor peste E (def. 1.3), cu ordinea dată de implicație, este o latice relativ la conjuncția $\wedge$ și disjuncția $\vee$.

TEOREMA 1.3. Fie $(L, \le)$ **o latice oarecare. Atunci pentru orice** $a, b, c \in L$ **avem**

1°. $a \wedge a = a$, $a \vee a = a$ (**idempotență**);

2°. $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$ (**comutativitate**);
3°. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (**asociativitate**);
4°. $a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$ (**absorbție**);
5°. $a \leq b \leftrightarrow a \wedge b = a \leftrightarrow a \vee b = b$.

DEMONSTRAȚIE. 1°. Avem de arătat că $a = \inf\{a, a\}$ și $a = \sup\{a, a\}$, ceea ce rezultă direct din definiția lui "inf" și "sup".

2°. Fie $c = a \wedge b$; atunci $c = \inf\{a, b\} = \inf\{b, a\} = b \wedge a$.

3°, 4° se probează similar.

5°. Fie $a \leq b$; atunci $\inf\{a, b\} = a$ deoarece $a \leq a$, $a \leq b$ și dacă $c \leq a$, $c \leq b$, atunci $a \geq c$, adică a este cel mai mare minorant pentru a, b. Dacă $a \wedge b = a$, rezultă direct că $a \leq b$. În mod similar, dacă $a \leq b$, atunci $\sup\{a, b\} = b$ deci $b = a \vee b$, iar dacă $b = a \vee b$, rezultă $b = \sup\{a, b\}$ deci $a \leq b$.

O latice $(L, \leq)$ se numește **distributivă** dacă $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ și $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, pentru orice $a, b, c \in L$. Laticea $(L, \leq)$ se numește **modulară** dacă din faptul că $a, b \in L$ și $a \geq b$, rezultă că $a \wedge (b \vee c) = b \vee (a \wedge c)$.

Laticele din exemplele date anterior sînt distributive și modulare.

Este evident că orice latice distributivă este modulară [într-adevăr, dacă $a \geq b$, atunci $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee (a \wedge c)$, deoarece $a \wedge b = b$, conform teoremei 1.3, 5°]. Afirmația inversă nu este adevărată, așa cum arată exemplul următor.

EXEMPLU. Orice latice $(L, \leq)$ definește un graf orientat (V, A, i, t) în care vîrfurile sînt elementele lui L adică $V = L$ și două vîrfuri $x, y \in L$ sînt unite printr-un arc dacă și numai dacă $y \leq x$, adică $A = \{(x, y) \in L \times L \mid y \leq x\}$, $i : A \to V$, $(x, y) \to x$ și $t : A \to V$, $(x, y) \to y$. Pentru anumite grafuri este adevărată și afirmația inversă; astfel, graful

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & a & \searrow & \\ b \vee c = a \vee c = a \vee b = u & \to & b & \to & v = a \wedge b = a \wedge c = b \wedge c \\ & \searrow & c & \nearrow & \end{array}$$

definește o latice finită $L = \{a, b, c, u, v\}$. Se verifică ușor că L este o latice modulară. Dar $a \wedge (b \vee c) = a$, iar $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = v \vee v = v = a \wedge b$ deci L nu este o latice distributivă.

DEFINIȚIA 1.6. Fie $(L, \leq, \wedge, \vee, 0, 1)$ o latice distributivă care admite un cel mai mic element $0 \in L$ și un cel mai mare element $1 \in L$. O astfel de latice se numește **latice booleană** (sau **algebră Boole**) dacă pentru orice $a \in L$ există și este unic un element $\bar{a} \in L$ astfel încît $a \wedge \bar{a} = 0$ și $a \vee \bar{a} = 1$; $\bar{a}$ se numește **complementul** lui a. Un rezultat remarcabil, datorat lui M. STONE (n. 1903), afirmă că orice latice booleană este izomorfă cu o latice de mulțimi, ceea ce arată rolul de model jucat de laticea părților unei mulțimi. Laticele din exemplele 1, 2, 4 de mai sus sînt booleene. Dar laticea mulțimilor vagi nu! (funcția constantă 1/2 nu are complement).

Circuite logice

Circuitele logice **elementare** sînt: inversorul $x \to \bar{x}$, conjunctorul $(x, y) \to x \wedge y$ şi disjunctorul $(x, y) \to x \vee y$, precum constantele 0 şi 1. Un **circuit logic** este un graf orientat unde în vîrfuri sînt circuite elementare, avînd un singur terminal iar arcele sînt conductori. Mulţimea circuitelor logice este o latice booleană: anume dacă C_1, C_2 sînt două circuite logice, $C_1 \vee C_2$ corespunde legării în serie, $C_1 \wedge C_2$ în legării paralel, $\overline{C_1}$ este inversatul lui C_1, iar relaţia de ordine este definită astfel:

$$C_1 \leq C_2 \leftrightarrow C_1 \wedge \overline{C_2} = 0.$$

Circuitul NAND (not and) realizează funcţia booleană a lui Sheffer

$$\varphi : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B},\ \varphi(x,y) = \overline{x \wedge y}$$

Vom vedea că el are proprietatea remarcabilă că orice circuit logic se poate construi folosind numai NAND-uri [Într-adevăr, este suficient să observăm că

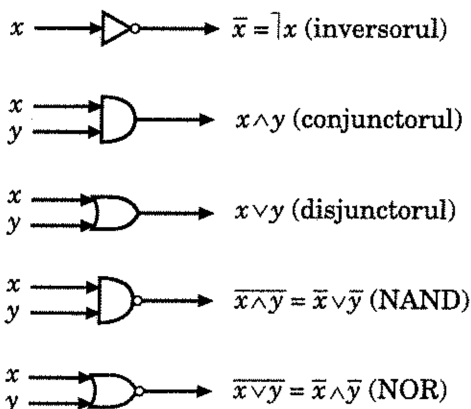


Figura III.11.

$$\bar{x} = \varphi(x, x),\ x \wedge y = \overline{\overline{x \wedge y}} = \overline{\varphi(x, y)} = \varphi(\varphi(x, y), \varphi(x, y)) \text{ şi}$$

$$x \vee y = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} = \overline{\varphi(x, x) \wedge \varphi(y, y)} = \varphi(\varphi(x, x), \varphi(y, y))$$

deci inversorii, conjunctorii şi disjunctorii se realizează numai cu circuite NAND]. Acelaşi lucru se poate spune despre circuitul NOR (not or), care realizează funcţia lui Pierce $\psi : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$, $\psi(x, y) = \overline{x \vee y}$.

Oricărui circuit logic i se poate asocia în mod bine determinat o funcţie booleană numită şi formula logică de structură; reciproc, oricărei funcţii booleene (sau oricărei formule logice) îi corespunde un circuit logic. Două circuite logice au aceeaşi funcţionalitate dacă şi numai dacă au formule de structură echivalente (cu aceeaşi tabelă de adevăr). Teorema 1.2 arată că orice funcţie booleană este o disjuncţie de minitermeni conjunctivi deci orice circuit logic se realizează numai cu inversori, disjunctori sau conjunctori. De aici rezultă în particular că orice circuit logic se poate realiza numai cu NAND-uri (sau numai cu NOR-uri).

O problemă importantă, tratată în cursurile de specialitate, este cea a construirii de circuite logice operaţionale, cu anumite funcţionalităţi, ca şi cea a reducerii la circuite standard ("cablarea logicii").

§ 2. Calculabilitate

2.1. Noțiunea de calcul

Analiza conceptului de calcul este de mare însemnătate teoretică și practică, legată de realitatea fizică a computerului modern. Într-o primă accepțiune, un calcul înseamnă un algoritm împreună cu un set de date inițiale. În limbajul uzual, un algoritm este o procedură efectivă, definind un șir de stări (rezultate intermediare) avînd ca stare inițială setul de date de intrare și ca stare finală rezultatul urmărit; procedura este deterministă (fiecare transformare de stare fiind definită fără ambiguitate) și conduce la rezultat după un număr finit de tacți. Aplicarea unui algoritm revine la explicitarea instrucțiunilor privind operații succesive asupra datelor inițiale.

Fie S o mulțime nevidă ale cărei elemente le numim **stări.** Un **calcul în** S este un șir finit de stări $s_0, s_1, \ldots, s_m$; două calcule $c = \{s_0, \ldots, s_m\}$, $c_1 = \{t_0, \ldots, t_n\}$ în S se zic **compozabile** dacă $s_m = t_0$ și în acest caz, se poate defini calculul compus $c * c_1 = \{s_0, \ldots, s_m, t_1, \ldots, t_n\}$.

Se poate defini un graf $G = (S, A, i, t)$, în care elementele lui S sînt vîrfuri, iar calculele în S sînt arce. Aplicațiile i, t sînt definite în mod natural: pentru orice calcul $s = \{s_0, \ldots, s_m\}$, punem $i(s) = s_0$, $t(s) = s_m$. Orice drum în graful G este un calcul compus.

În acest context, este utilă introducerea unui concept de **algoritm nedeterminist.** Anume, să presupunem că S este o mulțime finită nevidă (de stări), că $I \subset S$ este o mulțime fixată de stări inițiale și $T \subset S$ o mulțime de stări terminale. Presupunem că P este o mulțime de predicate unare pe S (numite **condiții**) și R este o mulțime de relații binare pe S (numite **transformări de stare**). Deoarece S este finită, mulțimile I, T, P, R sînt de asemenea finite. Orice condiție $p \in P$ este o funcție $p : S \to \mathbb{B}$ (dacă $p(s) = 1$ condiția este îndeplinită, iar dacă $p(s) = 0$, nu). Orice transformare de stare $\rho \in R$ este o submulțime $\rho \subset S \times S$ și în cazul cînd $(s_1, s_2) \in \rho$ se mai spune că s_1 este transformată în s_2 (caracterul nedeterminist este legat de faptul că ρ nu este neapărat o relație funcțională). O dată fixate S, I, T, P, R ca mai sus, spunem că este definit un **algoritm** $\mathscr{A}$ (nedeterminist) dacă poate fi evidențiată o aplicație $\tau : P \to R$ care asociază oricărei condiții $p \in P$, o transformare de stare unică $\tau(p)$. Descriem acum modul cum "lucrează" algoritmul $\mathscr{A}$. Dacă $s_0 \in I$ este o stare inițială, apar două cazuri:

I. pentru orice condiție $p \in P$ avem $p(s_0) = 0$; în acest caz, se consideră că $s_0 \in T$ deci rezultatul este tot s_0 și algoritmul se oprește;

II. există $p \in P$, nu neapărat unic, astfel încît $p(s_0) = 1$; se alege o astfel de condiție p și fie $\rho = \tau(p)$ transformarea de stare asociată lui p. Apar două subcazuri:

II$_1$. nu există $s_1 \in S$ astfel încît $(s_0, s_1) \in \rho$ și atunci se consideră că $s_0 \in T$, iar algoritmul se oprește;

II₂. există $s_1 \in S$ astfel încît $s_0 \rho\ s_1$ şi pentru s_1 se reia procedeul aplicat anterior lui s_0 presupus că se încheie încheie într-o stare $s_k \in T$.

Se obţine astfel un şir de stări $s_0, s_1, s_2, \ldots$ deci un calcul realizat de algoritmul $\mathscr{A}$, începînd din starea s_0.

2.2. Arbori operatorii

Oricărei expresii aritmetice, algebrice, formule logice etc. i se poate asocia un arbore şi aceasta este una din ideile de bază în automatizarea calculului.

De exemplu, expresiilor $(a + b) \cdot c$, $(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge r)$ li se asociază respectiv arborii din figura III.12.

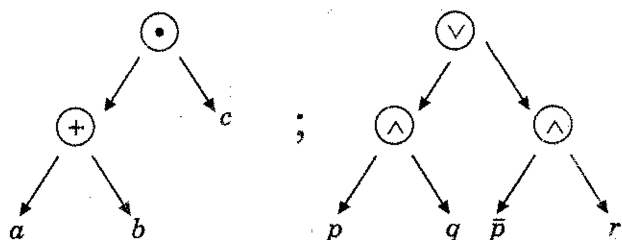


Figura III.12.

Numim **arbore–standard** S un arbore avînd ca vîrfuri şiruri finite de numere naturale, de forma $w = n_1 n_2 \ldots n_k$; se presupune că rădăcina este $\wedge$ şi că de îndată ce $wn = n_1 n_2 \ldots n_k n$ este vîrf în S, rezultă că $w, w0, w1, \ldots, w(n-1)$ sînt de asemenea vîrfuri.

Dacă wn este un vîrf, se spune că el este un **succesor** al lui w; dacă $w(n-1)$ este un vîrf şi wn nu este, atunci w are n succesori şi anume $w0, w1, \ldots, w(n-1)$. Un vîrf w se numeşte **terminal** dacă nu are succesori (adică $w0$ nu este un vîrf). De exemplu, $\{\wedge, 3, 7, 32, 31, 30, 73, 72, 71, 70\}$ este mulţimea vîrfurilor unui arbore – standard cu 7 terminale.

Să presupunem că (Ω, ν) este o signatură şi Q este o Ω – algebră. Un arbore – standard S se zice **operatoriu** dacă orice vîrf w are o etichetă $e_w \in \Omega \cup Q$ şi are atîţia succesori cît indicele de aritate $\nu(e_w)$; în particular, pe terminale sînt dispuse elemente din Q.

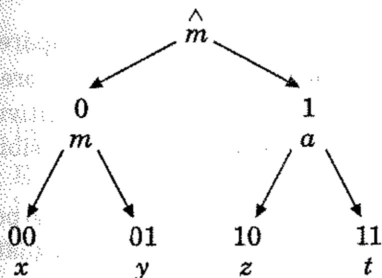


Figura III.13.

EXEMPLU. Fie a, m etichetele adunării şi înmulţirii binare, $\Omega = \{a, m\}$ şi $Q = \mathbb{Z}$. Arborele din fig. III.13 este operatoriu şi are terminalele etichetate cu $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$. "Citirea" acestui arbore (care poate fi automatizată) conduce la rezultatul $xy(z + t)$.

OBSERVAŢIE. În ultimul timp s-a realizat un studiu aprofundat al funcţiilor **aritmetice** $f : A \to B$ (unde $A \subset \mathbb{N}^m$, $B \subset \mathbb{N}^n$), ale căror valori pot fi calculate prin algoritmi. Intuitiv o astfel de funcţie este calculabilă dacă există un program care pentru orice

$x \in \mathbb{N}^m$ determină elementul $f(x)$ dacă $x \in A$ şi tipăreşte un simbol exterior mulţimilor $\mathbb{N}^n$, $n \geq 0$, în cazul cînd $x \notin A$. Acest concept de funcţie calculabilă foloseşte termeni ce nu pot fi definiţi în limbaj de teoria mulţimilor, independent de ideea de program. S. Kleene, K. Gödel, A. Robinson au mari contribuţii la studiul calculabilităţii prin introducerea noţiunii de funcţie parţial recursivă, analiza proceselor algoritmice, ca şi prin fundamentarea analizei non-standard.

Aceste consideraţii vor fi dezvoltate la cursurile de specialitate.

§ 3. Cîmpuri discrete de probabilitate

Probarea adevărului a constituit dintotdeauna o activitate a omului, în această lume plină de incertitudini în care încercăm totuşi să fixăm şi unele jaloane. Situaţiile de incertitudine ne provoacă reacţii de îngrijorare (sau plăcere) şi nu întîmplător, au apărut atîtea jocuri care exprimă într-un anumit fel fascinaţia necunoscutului. Calculul probabilităţilor a apărut în secolul al XVII-lea ca o modelare matematică a şansei, ca o ştiinţă a jocului de noroc, dar s-a transformat astăzi într-o teorie matematică riguroasă cu aplicaţii deosebit de importante în fizică, tehnică, în viaţă.

3.1. Cîmpuri discrete de evenimente. Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare

Fiecare din noi cunoaşte numeroase experienţe repetabile, avînd ca rezultat apariţia sau nu a anumitor evenimente. Nu definim termenii de experienţă sau eveniment aleator, considerîndu-i ca primari.

Să considerăm o experienţă pe care o notăm cu $\mathscr{E}$. Ca rezultate posibile ale acestei experienţe se pot obţine diverse evenimente $A_1, A_2, A_3, B, \dots$.

EXEMPLE. 1) Să considerăm experienţa $\mathscr{E}$ = "prezentarea la un examen a unei grupe de studenţi". Iată cîteva evenimente posibile: A_1 = "toţi studenţii sînt integralişti", A_2 = "cel puţin 5 studenţi iau nota 10", A_3 = "un student a dat biletul" etc.

2) Fie $\mathscr{E}$ = "urmărirea evoluţiei unui dispozitiv automat". Pot apărea diverse evenimente: A = "dispozitivul funcţionează cel mult 5 ore", B = "dispozitivul funcţionează cel puţin 30 de minute", C = "dispozitivul funcţionează un timp nelimitat" (bineînţeles C este evenimentul imposibil) etc.

În orice experienţă se pune în evidenţă colecţia evenimentelor care pot apărea. Printre acestea se adaugă evenimente imposibile (identificate toate cu unul singur, notat $\varnothing$) şi evenimente sigure (notate cu X). Dacă A şi B sînt evenimente, se pot considera alte evenimente; de exemplu: A **sau** B (notat $A \cup B$), A **şi** B (notat $A \cap B$), evenimentul **contrar** lui A (notat $\overline{A}$ sau A'). Se spune că A **implică** B (şi se scrie $A \subset B$) dacă din faptul că A se produce,

rezultă că şi B se produce (astfel, orice eveniment A implică evenimentul sigur X). Două evenimente A, B se zic **egale** dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$. Se poate uşor arăta că mulţimea evenimentelor (relativ la o experienţă fixată) formează o latice booleană deci calculul cu evenimente revine esenţialmente la mînuirea unor operaţii cu mulţimi.

DEFINIŢIA 3.1. Prin **cîmp discret de evenimente** se înţelege o mulţime finită sau numărabilă X, împreună cu o funcţie $P : \mathscr{P}(X) \to [0, 1]$ definită pe mulţimea părţilor lui X. Submulţimile $A \subset X$ se numesc **evenimente** şi pentru orice eveniment A numărul $P(A) \in [0, 1]$ este numit **probabilitatea lui** A. În plus se presupun îndeplinite următoarele condiţii:

1) $P(X) = 1$ şi $P(\varnothing) = 0$;

2) Pentru orice eveniment $A \subset X$, avem $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$, seria fiind presupusă convergentă. Evenimentele $\{\omega\}$ corespund la mulţimi formate dintr-un singur element şi se numesc **evenimente elementare**. Probabilitatea unui eveniment $A \subset X$ modelează conceptul de "frecvenţă" a apariţiei lui A: dacă experienţa în care poate apărea A se repetă de n ori, iar A apare de k ori, atunci $P(A) \simeq \frac{k}{n}$.

Direct din definiţie rezultă că dacă $A \cap B = \varnothing$ (se spune că A şi B sînt **incompatibile**), atunci

$$(1) \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Dacă $B \subset A$, atunci $A = B \cup (A \setminus B)$ şi $B \cap (A \setminus B) = \varnothing$ deci

$$P(A) = P(B) + P(A \setminus B) \text{ deci}$$

$$(2) \qquad P(B) \le P(A) \text{ şi } P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$$

[$A \setminus B$ este evenimentul care constă în faptul că A are loc şi B **nu**].

Dacă A, B sînt evenimente oarecare relativ la acelaşi cîmp, atunci are loc formula

$$(3) \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Într-adevăr, $A \cup B = B \cup (A \setminus (A \cap B))$ deci

$$P(A \cup B) \overset{cf(1)}{=} P(B) + P(A \setminus (A \cap B)) \overset{cf(2)}{=} P(B) + P(A) - P(A \cap B).$$

Remarcăm de asemenea că pentru orice eveniment $A \subset X$ avem

$$(4) \qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Într-adevăr, $P(\overline{A}) = P(X \setminus A) \overset{cf(2)}{=} P(X) - P(A) = 1 - P(A)$.

EXEMPLE de cîmpuri discrete de evenimente.

În experienţa de aruncare cu banul, presupus perfect, $X = \{0, 1\}$ (corespunzînd stemei şi banului), fiecare din evenimentele elementare avînd probabilitatea $\frac{1}{2}$. În aruncarea cu zarul (presupus corect!), X are 6 elemente, fiecare cu probabilitatea $\frac{1}{6}$. La ruletă, X are n elemente $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ cu probabilităţile $p_1, \ldots, p_n$ (putem gîndi $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ ca sectoare ale unui disc

circular – roată de ruletă, aria lui Δ_k fiind produsul lui p_k cu aria întregului disc). În cazul loteriei, X poate fi ales ca mulţimea tuturor tragerilor de n bilete din N numerotate ($N > n$), toate avînd aceeaşi probabilitate. Dacă în plus contează ordinea între cele n bilete, această probabilitate este $\frac{(N-n)!}{N!}$, deoarece atunci X are $N! / (N-n)!$ elemente. Dacă ordinea nu contează, X are

$$C_N^n = \frac{N!}{(N-n)!n!}$$

elemente şi probabilitatea fiecărui eveniment elementar este $1/C_N^n$.

Dacă A, B sînt două evenimente şi dacă $P(B) \neq 0$, atunci **probabilitatea lui A după ce B s-a produs** (sau probabilitatea lui A, **condiţionată** de B) este prin definiţie, numărul

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Evenimentele A şi B se zic **independente** dacă $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$; dacă $P(B) \neq \varnothing$ rezultă atunci că $P(A \mid B) = P(A)$, adică probabilitatea lui A este aceeaşi, indiferent dacă B s-a produs sau nu.

Dacă (X, P) este un cîmp discret de evenimente şi $H_1, \ldots, H_n \subset X$ sînt evenimente, incompatibile două cîte două, astfel încît $H_1 \cup \ldots \cup H_n$ să fie evenimentul sigur, atunci pentru orice eveniment $A \subset X$ are loc următoarea formulă utilă:

$$(5) \qquad P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(A \mid H_j),$$

numită **formula probabilităţii totale**. [Demonstraţia este imediată:

$$A = A \cap X = A \cap (\bigcup_{j=1}^{n} H_j) = \bigcup_{j=1}^{n} (A \cap H_j) \quad \text{deci}$$

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A \cap H_j) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P(A|H_j)].$$

Definiţia 3.2. Dacă (X, P) este un cîmp discret de probabilitate, orice funcţie $\xi(\omega)$, $\xi : X \to \mathbb{R}$ se numeşte **variabilă aleatoare discretă**. Deoarece X este mulţime finită sau numărabilă, $X = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$; notînd $a_k = \xi(\omega_k)$ şi $p_k = P\{\xi = a_k\}$, se poate considera matricea

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{pmatrix}$$

în care pe linia I-a sînt reprezentate valorile lui ξ iar pe linia a II-a, probabilităţile cu care sînt luate aceste valori. Evident, $0 \leq p_k \leq 1$ şi $\sum_{k \geq 1} p_k = 1$.

Această matrice se numeşte **matricea de repartiţie a lui ξ**.

Evident, mulţimea variabilelor aleatoare este un spaţiu vectorial real $\mathcal{V}(X)$, relativ la $\xi + \eta$, $a\xi$ ($a \in \mathbb{R}$).

Se spune că o variabilă aleatoare $\xi \in \mathcal{V}(X)$ **admite medie şi dispersie** dacă seriile $\sum_{k\geq 1} a_k p_k$ şi $\sum_{k\geq 1} a_k^2 p_k$ sînt absolut convergente. Se definesc

(6) $$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p_k = \sum_{\omega\in X} \xi(\omega)P(\omega) \text{ (\textbf{media lui } } \xi);$$

(7) $$D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 p_k - (M\xi)^2 = M(\xi^2) - (M\xi)^2 \text{ (\textbf{dispersia lui } } \xi).$$

Numărul real şi pozitiv $\sigma = \sqrt{D\xi}$ se numeşte **abaterea medie pătratică** a lui ξ.

Două variabile aleatoare $\xi, \eta : X \to \mathbb{R}$ definite pe un acelaşi cîmp de probabilitate discret (X, P) se numesc **independente** dacă pentru orice intervale I, J pe dreapta reală, evenimentele $\{\xi \in I\}$ şi $\{\eta \in J\}$ sînt independente. Am notat $\{\xi \in I\} = \{\omega \in X \mid \xi(\omega) \in I\}$ etc.

Vom nota cu $L^2(X, P)$ mulţimea tuturor variabilelor aleatoare pe cîmpul de probabilitate (X, P) care au medie şi dispersie.

TEOREMA 3.1. Fie $\xi, \eta \in L^2(X, P)$.

a) **Avem** $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$, $M(a\xi) = aM\xi$ **şi** $D(a\xi) = a^2 D\xi$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$;

b) **Dacă** ξ, η **sînt independente, atunci** $M(\xi\eta) = (M\xi)(M\eta)$ **şi** $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$.

DEMONSTRAŢIE. a) Avem

$$M(\xi + \eta) = \sum_{\omega\in X} (\xi + \eta)(\omega)\cdot P(\omega) = \sum_{\omega \in X} (\xi(\omega) + \eta(\omega))P(\omega) =$$

$$= \sum_{\omega\in X} \xi(\omega)P(\omega) + \sum_{\omega\in X} \eta(\omega)P(\omega) = M\xi + M\eta;$$

apoi $M(a\xi) = \sum_{\omega\in X} (a\xi)(\omega)P(\omega) = \sum_{\omega\in X} a\cdot\xi(\omega)P(\omega) = a\sum_{\omega\in X}\xi(\omega)P(\omega) = aM\xi.$

De asemenea

$$D(a\xi) = M(a\xi)^2 - (M(a\xi))^2 = M(a^2\xi^2) - (aM\xi)^2 = a^2 M\xi^2 - a^2(M\xi)^2 = a^2\cdot D\xi.$$

b) $M(\xi\eta) = \sum_{\omega\in X} (\xi\eta)(\omega)P(\omega) = \sum_{\omega\in X} \xi(\omega)\cdot\eta(\omega)P(\omega) = \sum_{a_i, b_j} \Big(\sum_{\omega\in X}^{*} \xi(\omega)\cdot\eta(\omega)P(\omega)\Big).$

Suma $\sum^{*}$ se face după acele evenimente ω pentru care $\xi(\omega) = a_i$ şi $\eta(\omega) = b_j$. Atunci

$$M(\xi\eta) = \sum_{a_i, b_j} \Big(\sum_{\omega}^{*} a_i b_j P(\omega)\Big) = \sum_{a_i, b_j} a_i b_j \sum_{\omega}^{*} P(\omega).$$

Dar

$$\sum_{\omega}^{*} P(\omega) = P(\xi = a_i, \eta = b_j) = P(\xi = a_i)\cdot P(\eta = b_j)$$

(aici intervine ipoteza relativ la independenţa lui ξ şi η). Aşadar,

$$M(\xi\eta) = \sum_{a_i, b_j} a_i b_j P(\xi = a_i)\cdot P(\eta = b_j) = \sum_i a_i P(\xi = a_i)\cdot \sum_j b_j P\big(\eta = b_j\big) = \big(M\xi\big)\big(M\eta\big).$$

Să observăm acum că $\forall\, \xi \in L^2(X, P)$ avem $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$, deoarece notînd $M\xi = m$, avem

$$M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi - m)^2 = M(\xi^2 - 2m\xi + m^2) \overset{cf(a)}{=} M(\xi^2) - 2mM\xi + m^2 = M(\xi^2) - m^2 = D\xi.$$

Atunci

$$D(\xi + \eta) = M(\xi + \eta - M(\xi + \eta))^2 = M((\xi - M\xi) + (\eta - M\eta))^2 =$$
$$= M(\xi - M\xi)^2 + M(\eta - M\eta)^2 + 2M(\xi - M\xi) \cdot (\eta - M\eta) = D\xi + D\eta + 2\operatorname{cov}(\xi, \eta),$$

unde am notat $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M((\xi - M\xi) \cdot (\eta - M\eta))$ (număr numit **covarianța** variabilelor aleatoare ξ și η).

Notînd $M\xi = k_1$, $M\eta = k_2$, avem

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M((\xi - k_1)(\eta - k_2)) = M(\xi\eta - k_1\eta - k_2\xi + k_1k_2) \overset{cf(a)}{=}$$
$$\overset{cf(a)}{=} M(\xi\eta) - k_1M\eta - k_2M\xi + k_1k_2 = M(\xi\eta) - k_1k_2 = M(\xi\eta) - (M\xi)(M\eta) = 0,$$

deoarece ξ și η sînt independente. Așadar, $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$ și teorema este demonstrată.

Reținem totodată că $\forall\, \xi, \eta \in L^2(X, P)$, $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M(\xi\eta) - (M\xi)(M\eta)$ și că $\forall\, \xi \in L^2(X, P)$, $\operatorname{cov}(\xi, \xi) = D\xi$.

În cazul cînd $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$, se spune că ξ și η sînt **necorelate**. Evident, orice variabile aleatoare independente sînt necorelate (dar nu și reciproc).

Mulțimea $L^2(X, P)$ este în mod natural un spațiu prehilbertian (definiția 1.1, cap. 2), relativ la produsul scalar $<\xi, \eta> = M(\xi \cdot \eta)$. Faptul că produsul $\xi \cdot \eta$ are medie rezultă din inegalitatea

$$\xi \cdot \eta \le \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}.$$

Să notăm cu N mulțimea variabilelor aleatoare din $L^2(X, P)$ avînd media nulă. Pentru orice $\xi \in L^2(X, P)$ avem $\xi = M\xi + (\xi - M\xi)$ și evident $\xi - M\xi \in N$ și $M\xi \in \mathbb{R}$. Are loc descompunerea ca sumă directă $L^2(X, P) = N \oplus \mathbb{R}$ și adeseori în raționamente ne putem reduce la cazul unor variabile aleatoare cu media nulă.

TEOREMA 3.2. (inegalitatea lui P. L. Cebîșev, 1821–1894). Fie (X, P) un cîmp de probabilitate discret. Pentru orice variabilă aleatoare $\xi \in L^2(X, P)$ și pentru orice $\delta > 0$ avem

$$(8) \qquad P(|\xi - M\xi| \ge \delta) \le \frac{1}{\delta^2} D\xi$$

și

$$(8') \qquad P(|\xi - M\xi| < \delta) \ge 1 - \frac{1}{\delta^2} D\xi.$$

DEMONSTRAȚIE. Avem $P(|\xi - M\xi| \ge \delta) = P\{\omega \mid \exists i$ astfel ca $\xi(\omega) = a_i$ și

$$|a_i - M\xi| \ge \delta\} = \sum_i{}^{*} P(\xi = a_i),$$

unde suma $\sum_i^{*}$ este făcută după acei indici i pentru care $|a_i - M\xi| \ge \delta$.

Atunci

$$D\xi = \sum_i (a_i - M\xi)^2 \cdot P(\xi = a_i) \geq \sum_i^* (a_i - M\xi)^2 \cdot P(\xi = a_i) \geq \delta^2 \cdot \sum_i^* P(\xi = a_i).$$

Aşadar, $D\xi \geq \delta^2 \cdot P(|\xi - M\xi| \geq \delta)$. Cea de-a doua inegalitate rezultă prin trecere la evenimentul contrar.

OBSERVAŢII. 1) Inegalitatea Cebîşev arată calitativ că abateri mari $|\xi - M\xi|$ de la medie sînt puţin probabile, atunci cînd dispersia este mică.

2) Dacă $D\xi = 0$ atunci $P(\xi = M\xi) = 1$. Variabila aleatoare $\xi - M\xi$ are media 0, iar variabila $\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}$ are media 0 şi dispersia 1.

Cele mai importante rezultate de teoria probabilităţilor se referă la şiruri de evenimente sau variabile aleatoare. Dacă (X, P) este un cîmp discret de probabilitate, un şir $(\xi_n)_{n\geq 1}$ de variabile aleatoare se zice **convergent în probabilitate către zero** (se scrie $\xi_n \xrightarrow{\text{prob.}} 0$) dacă

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} P(|\xi_n| \geq \varepsilon) = 0.$$

Se scrie $\xi_n \xrightarrow{\text{prob.}} \xi$ dacă $\xi_n - \xi \xrightarrow{\text{prob.}} 0$. Ca o aplicaţie a inegalităţii Cebîşev se poate demonstra următorul:

COROLAR (legea lui J. Bernoulli (1654–1705) a numerelor mari). Fie $(\xi_n)_{n\geq 1}$ un şir de variabile aleatoare din $L^2(X, P)$. Presupunem că ele sînt independente două cîte două, au aceeaşi medie m şi toate dispersiile lor sînt majorate de aceeaşi constantă. Atunci

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{\text{prob.}} m.$$

DEMONSTRAŢIE. Deci $M\xi_k = m$ şi există o constantă $A \geq 0$ astfel încît $D\xi_k \leq A$, pentru orice $k \geq 1$. Să notăm

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}.$$

Atunci conform teoremei 3.1, avem $M\eta_n = \frac{1}{n}(M\xi_1 + \ldots + M\xi_n) = \frac{mn}{n} = m$ şi $0 \leq D\eta_n = \frac{1}{n^2}(D\xi_1 + \ldots + D\xi_n) \leq \frac{A \cdot n}{n^2} = \frac{A}{n}$ deci $\lim_{n\to\infty} D\eta_n = 0$.

Conform inegalităţii Cebîşev, avem pentru orice $\varepsilon > 0$,

$0 \leq P(|\eta_n - M\eta_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} D\eta_n$ deci $\lim_{n\to\infty} P(|\eta_n - M\eta_n| \geq \varepsilon) = 0$ adică

$$\eta_n \xrightarrow{\text{prob.}} m.$$

Legea numerelor mari arată că, pentru $n \to \infty$, este din ce în ce mai puţin probabil ca mediile aritmetice $\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}$, să se abată de la media teoretică.

Termenul "numere mari" se referă la faptul că se face media aritmetică a suficient de multe variabile aleatoare ($n \to \infty$).

3.2. Legi discrete de repartiție

Fie (X, P) un cîmp discret de probabilitate și $\xi : X \to \mathbb{N}$ o variabilă aleatoare cu valori numere naturale, avînd matricea de repartiție

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix} \text{ unde } p_n \geq 0 \text{ și } \sum_{n \geq 0} p_n = 1.$$

DEFINIȚIA 3.3. Se spune că ξ **este repartizată Poisson (S. D. Poisson, 1781–1840), cu parametrul** λ**(**$\lambda > 0$ **fixat)** dacă pentru orice întreg $n \geq 0$ avem

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

În acest caz,

$$M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

Se verifică ușor că $D\xi = \lambda$ deci o variabilă aleatoare repartizată Poisson aparține spațiului $L^2(X, P)$.

DEFINIȚIA 3.4. Fixăm un număr natural n și un număr $p \in [0, 1]$; notăm $q = 1 - p$. O variabilă aleatoare $\xi : X \to \mathbb{N}$ avînd doar cele $n + 1$ valori $0, 1, \dots, n$ se zice **repartizată binomial cu parametrul** p dacă matricea ei de repartiție este $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$, unde $p_k = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.

În acest caz,

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} k p_k = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Considerînd dezvoltarea binomială

$$(px + q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (px)^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} x^k,$$

se observă că derivînd în raport cu x și făcînd $x = 1$ se obține

$$np = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k p^k q^{n-k}$$

deci $M\xi = np$. Printr-un raționament similar se obține $D\xi = npq$.

EXEMPLE. 1) Să presupunem că numărul de bruiaje naturale la o stație telefonică este o variabilă aleatoare ξ repartizată Poisson. Presupunem apoi că numărul mediu de bruiaje (într-un anumit interval de timp) este 10 (zece).

Atunci $M\xi = 10$ deci $\lambda = 10$. Atunci probabilitatea de a avea cel mult 3 bruiaje în cadrul unei convorbiri realizate în intervalul considerat de timp va fi $P(\xi \leq 3) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 =$

$$e^{-\lambda} + \frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda} = e^{-10}\left(1 + 10 + \frac{100}{2!} + \frac{1000}{3!}\right) \simeq 0{,}01.$$

2) Se numesc **experiențe Bernoulli** acele experiențe care se pot repeta independent unele de altele, avînd doar două rezultate posibile (de exemplu,

succes-insucces), cu probabilitatea de succes nemodificată de la o experiență la alta.

Pentru o singură experiență Bernoulli, cîmpul de probabilitate este $(\mathbb{B}, P)$ unde $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, 0 corespunde insuccesului, iar 1 succesului. Notăm $P(1) = p$ (probabilitatea de succes) deci $P(0) = 1 - p = q$.

Repetînd de n ori o experiență Bernoulli sau echivalent, efectuînd n experiențe Bernoulli independente, cîmpul de probabilitate va fi $(\mathbb{B}^n, P)$ și evenimentele elementare $\omega \in \mathbb{B}^n$ vor fi șirurile de n biți $\omega = (a_1 a_2 ... a_n)$ cu $a_i = 0$ sau 1.

Să notăm cu $s(\omega)$ numărul de succese din ω (adică numărul de componente egale cu 1). Atunci deoarece $P(1) = p$, $P(0) = q$ și în ω apar $s(\omega)$ componente egale cu 1 și $n - s(\omega)$ componente egale cu zero, rezultă că probabilitatea lui ω este $P(\omega) = p^{s(\omega)} \cdot q^{n-s(\omega)}$. Arătăm că variabila aleatoare $s =$ "succes", $s : \mathbb{B}^n \to \{0, 1, ..., n\}$, $\omega \to s(\omega)$ este repartizată binomial cu parametrul p.

Într-adevăr, pentru orice

$$0 \le k \le n, P(s = k) = P(\omega \mid s(\omega) = k) = \sum_{\omega, s(\omega)=k} P(\omega) = \sum_{\omega, s(\omega)=k} p^k \cdot q^{n-k}.$$

Dar există C_n^k evenimente elementare $\omega \in X$ astfel încît $s(\omega) = k$ (adică șiruri de n biți ce conțin de k ori pe 1). Atunci

$$P(s = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

și ca atare variabila aleatoare s este repartizată binomial cu parametrul p.

3.3. Lanțuri Markov

Să presupunem că urmărim un anumit sistem la momente discrete de timp notate 0, 1, 2, ..., m,... și că el se poate afla într-una din stările notate 1, 2, ..., n. Fie $S = \{1, 2, ..., n\}$. Convenim să notăm cu $X(k)$ starea sistemului la momentul k și presupunem că evoluția sistemului (tranziția de stări) se face cu anumite probabilități. Presupunem cunoscute, pentru orice k și pentru orice stări $s_0, ..., s_k \in S$, probabilitățile $P(X(0) = s_0, ..., X(k) = s_k)$, ca și probabilitățile condiționate

$$(*) \qquad P(X(k+1) = s_{k+1} \mid X(k) = s_k, ..., X(0) = s_0)$$

(deci probabilitatea ca sistemul să fie la momentul k+1 în starea s_{k+1}, de îndată ce la momentul k a fost în starea s_k, la momentul $k - 1$ în starea s_{k-1}, ..., iar la momentul 0 în starea s_0). Se poate întîmpla ca (*) să fie egală cu $P(X(k + 1) = s_{k+1})$, pentru orice k și orice stări $s_0, ..., s_{k+1}$, ceea ce ar însemna că sistemul nu are memorie. Dar A. A. MARKOV (1856–1922) a propus studiul unei dependențe mai generale, pentru sisteme "cu memorie scurtă", în care probabilitățile (*) sînt egale cu

$$P(X(k + 1) = s_{k+1} \mid X(k) = s_k),$$

adică starea sistemului la momentul viitor $k + 1$ depinde de stările trecute 0, 1, ..., k doar prin prezent (starea la momentul k). În continuare prezentăm cîteva rezultatele preliminarii relativ la aceste dependențe.

DEFINIȚIA 3.5. Un vector $(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ se numeşte **vector de probabilitate** dacă are toate componentele $p_i \geq 0$ şi $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. O matrice $P = (p_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ se numeşte **matrice stochastică** dacă fiecare linie a lui P este un vector de probabilitate.

EXEMPLE. 1) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$ este o matrice stochastică.

2) Dacă $P, P' \in M_n(\mathbb{R})$ sînt matrice stochastice, atunci produsul $P \cdot P'$ şi orice putere P^k, $k \geq 0$ au aceeaşi proprietate.

3) Dacă $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ este o matrice stochastică, atunci pentru orice valoare proprie $\lambda \in \sigma(P^T)$ avem $|\lambda| \leq 1$. [Într-adevăr, dacă $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$ este un vector propriu corespunzător, atunci $P^T \cdot u = \lambda u$ deci pentru orice $1 \leq i \leq n$, $\sum_{j=1}^{n} p_{ji} u_j = \lambda u_i$. Rezultă

$$|\lambda| \sum_i |u_i| = \sum_i |\lambda u_i| = \sum_i |\sum_j p_{ji} u_j| \leq \sum_i \sum_j p_{ji} |u_j| = \sum_j |u_j| \sum_i p_{ji} = \sum_j |u_j|;$$

aşadar, $|\lambda| \sum_i |u_i| \leq \sum_i |u_i|$, adică $|\lambda| \leq 1$, deoarece $u \neq 0$].

DEFINIȚIA 3.6. Fixăm o mulțime finită $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, un vector de probabilitate $p = (p_1, \ldots, p_n)$ şi o matrice stochastică $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Elementele lui S se numesc **stări,** elementele lui p se numesc **probabilități inițiale,** iar cele ale lui P – **probabilități de trecere** (sau **tranziție**). Se numeşte **lanț Markov omogen** asociat tripletului (S, p, P), orice şir de variabile aleatoare cu valori în S, $X(0), X(1), \ldots, X(k), \ldots$ cu proprietățile:

1) $P(X(0) = 1) = p_1, \ldots, P(X(0) = n) = p_n$;

2) pentru orice $k \geq 0$ întreg şi pentru orice stări $s_0, \ldots, s_{k+1} \in S$, avem $P(X(k+1) = s_{k+1} \mid X(k) = s_k, \ldots, X(0) = s_0) = P(X(k+1) = s_{k+1} \mid X(k) = s_k) = p_{s_k, s_{k+1}}$

Oricărui lanț Markov i se poate asocia un graf orientat, avînd stările ca vîrfuri şi tranzițiile de stări ca arce (etichetate cu probabilități de trecere).

Probabilitățile de trecere p_{ij} se referă la tranzițiile directe de stare. Se pot considera schimbări de stare în m paşi, $m \geq 2$. Anume, notînd cu p_{ij}^m probabilitatea de trecere din starea i în starea j în exact m paşi, avem

$$p_{ij}^m = P(X(k+m) = j \mid X(k) = i);$$

membrul secund nu depinde de k, deoarece este egal cu

$$\sum_{s_1, \ldots, s_{m-1}} P(X(k+m) = j,\ X(k+m-1) = s_{m-1}, \ldots, X(k+1) =$$

$$= s_1 \mid X(k) = i) = \sum_{s_1, \ldots, s_{m-1}} p_{is_1} \cdot p_{s_1 s_2} \cdots p_{s_{m-1} j}.$$

Evident, $p_{ij}^1 = p_{ij}$ şi vom pune $p_{ij}^0 = \delta_{ij}$ (simbolul Kronecker). Atunci

$$p_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}p_{kj}$$

deci matricea $(p_{ij}^2)_{1\le i,j\le n}$ este tocmai P^2; mai general $P^m = (p_{ij}^m)_{1\le i,j\le n}$ pentru orice întreg $m \ge 0$. Relația matriceală $P^{r+s} = P^r \cdot P^s$ se explicitează astfel

$$p_{ij}^{r+s} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}^r p_{kj}^s\ ,\ 1 \le i,j \le n;\ r,s \ge 1,$$

obținîndu-se **relațiile Chapman–Kolmogorov** (S. Chapman, 1888–1970; A. N. Kolmogorov, 1903–1986).

EXEMPLE. 1) Probabilitățile ca un sistem modelat de un lanț Markov să fie în anumite stări la diverse momente discrete, nu neapărat succesive, pot fi calculate cu ajutorul probabilităților p_{ij}^m. De exemplu,

$$P(X(12) = j\ |X(5) = i) = p_{ij}^7 \text{ și}$$

$$P(X(12) = d, X(6) = c, X(3) = b\ |X(1) = a) = p_{ab}^2 \cdot p_{bc}^3 \cdot p_{cd}^6$$

2) Să presupunem că în două urne se găsesc în total $2N$ bile (notate $1, 2, \ldots, 2N$) și că la fiecare moment se alege la întîmplare un întreg între 1 și $2N$ iar bila cu numărul respectiv este mutată din urna în care se află, în cealaltă. Convenim să spunem că sistemul celor două urne se află, în starea i, $0 \le i \le 2N$ dacă prima urnă conține i bile și a doua $2N - i$ bile. Atunci

$$p_{ii} = 0,\ 0 \le i \le 2N;\ p_{i,i-1} = \frac{i}{2N} \text{ (dacă } 1 \le i \le 2N)$$

$$\text{și } p_{i,i+1} = \frac{2N-i}{2N} \text{ (dacă } 0 \le i \le 2N-1).$$

Celelalte probabilități de trecere sînt nule. Acesta este **modelul lui P. Ehrenfest** (1880–1933) pentru schimbul de căldură. Se obține astfel un lanț Markov în care $S = \{0, 1, \ldots, 2N\}$, luăm $p = \left(\frac{1}{2N+1}, \ldots, \frac{1}{2N+1}\right)$ și matricea probabilităților de trecere $P \in M_{2N+1}(\mathbb{R})$,

$$P = \frac{1}{2N}\begin{pmatrix} 0 & 2N & & & & & \\ 1 & 0 & 2N-1 & & & \mathbf{0} & \\ & 2 & 0 & 2N-2 & & & \\ & & 3 & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & & 2N & 0 \end{pmatrix}$$

Lanțurile Markov sînt utilizate în modelarea unor sisteme fizice sau biologice, în studiul automatelor probabiliste, al firelor de așteptare sau al proceselor de învățare; [C9]. O contribuție remarcabilă în dezvoltarea teoriei lanțurilor Markov au avut-o matematicienii români Gh. Mihoc (1906–1981) și O. Onicescu (1892–1982).

PARTEA A II-A

Capitolul IV GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ

§ 1. Spații geometrice

1.1. Obiecte geometrice esențiale

Geometria s-a impus ca un ansamblu coerent de abstracțiuni ale relațiilor materiale, sintetizînd multe proprietăți obținute prin observație directă și verificate prin experiment. Devenită știință rațională încă la grecii din antichitate, geometria a descris pînă la Riemann și Lobacevski un univers incolor, inodor, fără forțe, omogen (toate punctele jucînd același rol) și izotrop (fără direcții privilegiate). Fizica modernă a pus problema înțelegerii de fond a conceptului de spațiu, propunînd și asimilînd modele geometrice tot mai complexe. Geometria nefiind totuși un capitol de fizică, este necesar un studiu riguros, pe baze intuitive dar și prin raționamente deductiv imateriale, al configurațiilor geometrice, în pas cu progresele algebrei și analizei. Mult timp, prin geometrie s-a înțeles geometria lui Euclid în plan și în spațiu și este comod să urmărim evoluția conceptelor geometrice folosind exemplul acestei vechi și foarte particulare discipline matematice.

Principalele obiecte geometrice au fost **figurile plane** – segmente, drepte, unghiuri, cercuri, curbe și **figurile în spațiu** – plane, semispații, curbe strîmbe, suprafețe, etc. Generalizarea firească constă în considerarea unui **spațiu ambiant** V și a pune în evidență anumite submulțimi ale lui V numite **figuri.** Pasul imediat în geometria lui Euclid a constat în măsurarea lungimilor, unghiurilor și în clarificarea relațiilor (de exemplu, de congruență, de comparare etc.) între elementele liniare sau unghiulare ale diverselor figuri. Au trecut două milenii pînă s-a lămurit că la baza măsurătorilor se află un obiect matematic special, anume **grupul mișcărilor** planului (sau spațiului) și că toate noțiunile metrice pot fi definite în termenii acestui grup.

De exemplu, în cazul cînd V este planul lui Euclid, distanța dintre puncte este unica funcție continuă $d : V \times V \to \mathbb{R}$ invariantă la mișcările lui V, care sînt tocmai roto-translațiile. Felix Klein (1849–1925) a arătat în 1872 prin celebrul program de la Erlangen, că geometria nu este unică și că a face

geometrie înseamnă a fixa un spațiu V împreună cu un grup de transformări (funcții bijective $V \to V$) și a studia proprietățile invariante la acest grup.

Două secole mai înainte, Descartes descoperise metoda coordonatelor, fundamentînd geometria analitică în plan și în spațiu și unind pentru totdeauna algebra și geometria. Din unghiul modern de vedere, coordonatele sînt funcții $V \to \mathbb{R}$ (eventual definite pe submulțimi ale lui V). A fixa un punct al lui V revine la a da valori concrete pentru funcțiile-coordonate, după cum mulțimile de puncte (figurile) sînt descrise prin relații între coordonate (numite **ecuații**). Dar V poate avea și alte structuri, nu numai de spațiu vectorial, fiind de exemplu un spațiu topologic, o varietate etc.

Posibilitatea interpretărilor geometrice ale unor probleme bi sau tridimensionale (adică depinzînd de două sau trei coordonate independente) a fost și este încă masiv exploatată. În ultimul timp au apărut și probleme inginerești relativ la un număr arbitrar de variabile – parametri de stare, grade de libertate etc. ceea ce a impus extinderea limbajului geometric, fapt care devenise oricum un scop irezistibil pentru matematicieni, începînd din secolul trecut.

Descendentele directe ale geometriei lui Euclid au fost geometriile avînd ca spații ambiante spații vectoriale și ca figuri, subspațiile vectoriale sau varietățile liniare.

Presupunem că V este un spațiu vectorial peste un corp comutativ K, de dimensiune finită, $\dim_K V = n$. Fixăm o aplicație biliniară $g : V \times V \to K$. Se spune că perechea (V, g) definește o **geometrie ortogonală** (respectiv **simplectică**) dacă $\forall\, x, y \in V$, $g(x, y) = g(y, x)$ (respectiv $g(x, y) = -g(y, x)$).

Dacă $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ este o bază oarecare a lui V și $G = (g(e_i, e_j))_{1 \le i, j \le n}$ este matricea aplicației g relativ la $\mathcal{B}$, în cazul geometriei ortogonale (respectiv simplectice) matricea G este simetrică (respectiv antisimetrică). În capitolul 2 am studiat un caz particular de geometrie ortogonală, anume geometria spațiilor euclidiene (V, g) unde $g : V \times V \to \mathbb{R}$ era un produs scalar (cap. 2, definiția 1.1). Aceasta era la rîndul ei o generalizare a geometriei lui Euclid și o bună parte a capitolului 2 a stat sub semnul acestei generalizări.

Geometria s-a dezvoltat de asemenea în legătură cu înțelegerea tipurilor de interacții din universul fizic, prin elaborarea conceptului de varietate, generalizînd deopotrivă curbele și suprafețele. Curbele au apărut prin modelarea traiectoriilor, iar suprafețele ca frontiere ale corpurilor. Dar apar în mod natural curbe în $\mathbb{R}^n$; de exemplu dacă parametrii de stare ai unui sistem fizic au la fiecare moment t valorile reale $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, atunci punctul $(x_1, \ldots, x_n)$ din $\mathbb{R}^n$ parcurge o curbă. Mai general, dacă parametrii de stare nu sînt independenți, atunci restricțiile respective pun în evidență anumite submulțimi ale lui $\mathbb{R}^n$ numite varietăți. H. Poincaré a arătat primul că geometria și analiza matematică, unificate în cadrul geometriei diferențiale, trebuie dezvoltate pe varietăți, deoarece numai în acest mod cîmpurile de

vectori, cîmpurile de tensori, traiectoriile, controlul optimal neliniar, sistemele dinamice etc. îşi găsesc cadrul firesc de prezentare.

Iată că geometria, cu ramurile ei actuale – geometria algebrică (studiul mulțimilor de zerouri comune ale polinoamelor), geometria diferențială (studiul curbelor, suprafețelor, varietăților, cîmpurilor de vectori etc.) şi geometria analitică (studiul varietăților analitice reale sau complexe), a devenit un edificiu impresionant pentru cunoaştere şi totodată un domeniu de mare interes pentru fizician şi inginer.

1.2. Spațiile $\mathbb{R}^n$ şi $\mathscr{V}_n$

Fixăm un întreg $n \geq 1$. Spațiul aritmetic $\mathbb{R}^n$ se consideră cu structura de spațiu metric şi elementele lui se numesc **puncte** (cu această structură el se mai numeşte spațiu **afin** n – dimensional). Înzestrată cu structura de spațiu vectorial real, mulțimea $\mathbb{R}^n$ se notează cu $\mathscr{V}_n$ şi elementele ei se numesc **vectori** n **– dimensionali.** Dacă $\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ este baza canonică a lui $\mathscr{V}_n$, atunci orice $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}_n$ se scrie unic $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i$ cu $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ coordonatele (componentele) lui $\boldsymbol{x}$. Aplicațiile $\text{pr}_i : \mathscr{V}_n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \to x_i$ se numesc **funcțiile de coordonate** $(1 \leq i \leq n)$.

Aplicația $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathscr{V}_n$, $x = (x_1, ..., x_n) \to \boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i$ este bijectivă şi identifică punctul x cu **vectorul său de poziție** $\boldsymbol{x} = \varphi(x)$, sau cu matricea $X = (x_1, ..., x_n)^T$ a coordonatelor lui $\boldsymbol{x}$.

Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$, vectorul $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ se mai notează cu $\boldsymbol{xy}$. Deci $\boldsymbol{Ox} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{O} = \boldsymbol{x} = \varphi(x)$, unde O este elementul zero din $\mathbb{R}^n$.

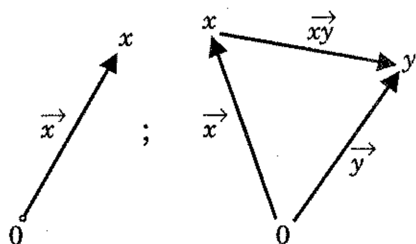


Figura IV.1

Se mai spune că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$, vectorul $\boldsymbol{xy} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ "uneşte" punctele x, y. Evident, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}_n$ există şi este unic $y \in \mathbb{R}^n$ astfel încît $\boldsymbol{xy} = \boldsymbol{v}$.

Este utilă următoarea convenție de scriere: dacă $a, b \in \mathbb{R}^n$ şi $\boldsymbol{v} \in \mathscr{V}_n$, atunci vom scrie $b = a + \boldsymbol{v} \leftrightarrow \boldsymbol{ab} = \boldsymbol{v}$ (adică $\boldsymbol{v}$ uneşte a şi b).

Dacă $\rho = \{c; \boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_n\}$ este un reper în $\mathbb{R}^n$, coordonatele unui punct $x \in \mathbb{R}^n$ relativ la ρ sînt componentele vectorului $\boldsymbol{cx}$ relativ la baza $\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_n$.

Cele spuse mai sus constituie generalizarea unor fapte binecunoscute în cazul 3–dimensional, unde am stabilit legătura între spațiul aritmetic $\mathbb{R}^3$, spațiul vectorilor $\mathscr{V}_3$ şi spațiul fizic S, legătură care necesită fixarea unui reper $Oxyz$ (versorii căruia formau o bază a lui $\mathscr{V}_3$). Geometria afină studiază legătura între puncte (elementele lui S), vectori (elementele lui $\mathscr{V}_3$) şi

translații asociate vectorilor (oricărui vector v i se asociază translația $S \to S$, $x \to$ acel unic y astfel încît $xy = v$). În cele spuse mai sus privind spațiile $\mathbb{R}^n$ și $\mathcal{V}_n$ am adoptat tot punctul de vedere afin. Dacă se apelează la structuri suplimentare (de exemplu, produsul scalar) se capătă posibilitatea descrierii și altor proprietăți ale obiectelor, ajungîndu-se la alte tipuri de geometrii.

Fixăm un punct $a \in \mathbb{R}^n$. Pentru orice $v \in \mathcal{V}_n$ se spune că perechea (a, v) reprezintă vectorul v aplicat în a; mulțimea $T_a(\mathbb{R}^n) = \{a\} \times \mathcal{V}_n$ a acestor vectori, notată uneori și $\mathcal{V}_n(a)$ se numește **spațiul tangent la $\mathbb{R}^n$ în punctul** a. Punînd $(a,v) + (a,w) = (a, v+w)$; $\lambda(a,v) = (a,\lambda v)$, pentru orice $v, w \in \mathcal{V}_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, se obține o structură de spațiu vectorial real pe $T_a(\mathbb{R}^n) = \mathcal{V}_n(a)$.

Bineînțeles, avem izomorfismele $\mathbb{R}$ – liniare

$$\mathcal{V}_n(a) \to \mathcal{V}_n, (a, v) \to v \text{ și } \mathcal{V}_n(a) \to \mathcal{V}_n(b), (a, v) \to (b, v).$$

Reamintim că dacă în spațiul vectorial $\mathcal{V}_n$ este fixat un produs scalar, atunci se spune că spațiul afin $\mathbb{R}^n$ este **euclidian**; în fiecare spațiu $\mathcal{V}_n(a)$ este atunci în mod automat definit cîte un produs scalar, punînd

$$<(a, v), (a, w)> = <v, w>,$$

pentru orice $v, w \in \mathcal{V}_n$. Exemplul cel mai important îl constituie produsul scalar euclidian $<x, y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ definit pentru orice $x, y \in \mathcal{V}_n$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$; el este notat și $x \cdot y$. Reamintim că norma euclidiană (lungimea) vectorului $x \in \mathcal{V}_n$, este

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}, \text{ notată și } \|x\|,$$

că distanța euclidiană între punctele $x, y \in \mathbb{R}^n$ este $d(x, y) = |xy|$ și că unghiul a doi vectori nenuli x, y este acel număr $\theta \in [0, \pi]$ astfel încît

$$\cos\theta = \frac{x \cdot y}{|x| \cdot |y|};$$

se mai scrie $(x, y) = \theta$. Geometria bazată în plus și pe disponibilitățile produsului scalar, permițînd extinderea tuturor rezultatelor din geometria elementară, se mai numește **geometrie euclidiană**. Se mai impune un mic comentariu. Calificativul "euclidian" este legat de postulatul lui Euclid ("în planul afin, printr-un punct care nu aparține unei drepte se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă"). Acest enunț nu este de origine experimentală ci una intuitivă și foarte tîrziu, Lobacevski și Bolyai au demonstrat independența lui de celelalte axiome ale lui Euclid. În vorbirea curentă, "euclidian" înseamnă ceva în conformitate cu postulatul lui Euclid, dar sensul dat de matematica modernă este mult mai restrictiv. Geometria euclidiană folosește toate proprietățile afine la care se adaugă cele care decurg din existența unui produs scalar – ortogonalitate, teorema lui Pitagora etc. În fond un produs scalar este asociat cu o formă pătratică pozitiv definită. Vom vedea că dacă

fixăm o formă pătratică nedefinită, vom obține o geometrie pseudo-euclidiană. Iar Riemann a avut ideea elaborării unor geometrii care doar local sînt euclidiene, de o mare însemnătate pentru fizică și astronomie.

1.3. Spații pseudoeuclidiene

Să fixăm acum o aplicație biliniară simetrică

$$h : \mathscr{V}_n \times \mathscr{V}_n \to \mathbb{R} \text{ și fie } q : \mathscr{V}_n \to \mathbb{R},\ q(\boldsymbol{x}) = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$$

forma pătratică asociată. Daca A este matricea lui h relativ la o bază $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ a lui $\mathscr{V}_n$, deci $A = (\alpha_{ij})_{1\le i,j\le n}$, unde $\alpha_{ij} = h(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)$, atunci pentru orice vectori $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j\boldsymbol{a}_j$ din $\mathscr{V}_n$ avem

$$h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{1\le i,\, j\le n}\alpha_{ij}x_iy_j = X^TAY \text{ și } q(x) = \sum_{1\le i,\, j\le n}\alpha_{ij}x_ix_j = X^TAX.$$

Să presupunem acum că forma pătratică q este nedegenerată, cu signatura (r, s), unde $r \ge 1$, $s \ge 1$, $r + s = n$. Atunci știm că există o bază $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ în $\mathscr{V}_n$ relativ la care matricea lui h este de forma

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots_{\,s} & & & 0 & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots_{\,r} & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Pentru orice $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{V}_n$ definim

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \text{ și } |\boldsymbol{x}|^2 = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = q(\boldsymbol{x}).$$

Așadar,

$$\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j = h(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } i = j \le s \\ 1 & \text{dacă } i = j \ge s+1 \\ 0 & \text{dacă } i \ne j \end{cases}$$

și

$$|\boldsymbol{a}_i|^2 = \boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_i = \begin{cases} -1 & \text{dacă } i = j \le s \\ 1 & \text{dacă } i = j \ge s+1 \end{cases}$$

(Forma pătratică q nefiind pozitiv definită, numărul $|\boldsymbol{x}|^2$ ia și valori negative).

Pentru orice $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j\boldsymbol{a}_j$ din $\mathscr{V}_n$ avem

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{1\le i,\, j\le n} h(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)x_iy_j = -x_1y_1 - \ldots - x_sy_s + x_{s+1}y_{s+1} + \ldots + x_ny_n$$

și

$$|\boldsymbol{x}|^2 = -(x_1)^2 - \ldots - (x_s)^2 + (x_{s+1})^2 + \ldots + (x_n)^2.$$

Aplicația

$$\mathcal{V}_n \times \mathcal{V}_n \to \mathbb{R}, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

este biliniară, simetrică, dar nu este un produs scalar deoarece nu este îndeplinită condiția de pozitivitate (PS4, def. 1.1 din capitolul 2). De exemplu, pentru vectorul nenul $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j$ $(i \le s, j \ge s+1)$, avem

$$|\boldsymbol{u}|^2 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j) \cdot (\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j) = |\boldsymbol{a}_i|^2 + 2\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{a}_i + |\boldsymbol{a}_j|^2 = -1 + 2 \cdot 0 + 1 = 0$$

deci $|\boldsymbol{u}| = 0$. Vectorii $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s$ se zic **versorii imaginari** iar $\boldsymbol{a}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ **versorii reali** ai bazei , iar vectorii din $\mathcal{V}_n$ cu "norma" nulă se zic **izotropi.**

DEFINIȚIA **1.1.** Se numește **spațiu pseudo–euclidian de tip** (s, r) cu $r \ge 1$, $s \ge 1$, $r + s = n$, spațiul afin $\mathbb{R}^n$, în care se fixează o aplicație biliniară simetrică $h : \mathcal{V}_n \times \mathcal{V}_n \to \mathbb{R}$ cu signatura (r, s).

Pentru a sublinia faptul că este fixată o nouă structură, vom nota cu $\mathbb{R}^n_{s,r}$ spațiul pseudo–euclidian de tip (s, r). Ca mulțime de puncte acesta este $\mathbb{R}^n$, dar avem în plus un produs pseudo–scalar $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, verificînd PS1–PS3, o pseudo–normă definită prin $|\boldsymbol{x}|^2 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$ ($|\boldsymbol{x}|$ poate lua și valori complexe) și pseudo–distanță $d(x, y) = |\boldsymbol{xy}|$ (care poate lua valori complexe și poate fi nulă fără ca $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$).

Un exemplu important îl constituie cazul $n = 4$, $r = 3$, $s = 1$ deci cazul spațiului pseudo–euclidian $\mathbb{R}^4_{1,3}$, numit **spațiul Minkowski–Poincaré** (H. Minkowski, 1864–1909; H. Poincaré, 1854–1912). Acesta constituie modelul geometric ("spațiul ambiant") al teoriei speciale a relativității.

Să numim **eveniment elementar** orice proces fizic caracterizat printr-un set de numere (t, x, y, z) unde (x, y, z) sînt coordonatele poziției evenimentului, iar t este momentul cînd are loc evenimentul. De exemplu, emisia unui foton sau ciocnirea a două particule. Notînd $x_1 = c \cdot t$, $x_2 = x$, $x_3 = y$, $x_4 = z$ (c fiind viteza luminii în vid), mulțimea evenimentelor elementare se identifică cu spațiul Minkowski–Poincaré $\mathbb{R}^4_{1,3}$. Fixăm un punct $a \in \mathbb{R}^4_{1,3}$ (deci un eveniment elementar pe care îl numim ad-hoc **prezent**). Mulțimea

$$C_a = \{x \in \mathbb{R}^4_{1,3} \mid d^2(a, x) \le 0\}$$

se numește **conul viitorului** (cu vîrful în a). De exemplu, dacă $a = (0, 0, 0, 0)$ adică prezentul este fixat în origine și la momentul $t = 0$, atunci

$$C_0 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid -(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 \le 0\}.$$

Originea semnifică "acum și aici" pentru un anumit observator. Două evenimente elementare $e = (t, x, y, z)$, $e' = (t', x', y', z')$ se numesc **fizic conectabile** dacă distanța euclidiană dintre ele permite un transfer de informație între ele cu viteza cel mult viteza luminii, adică

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \le c \cdot |t - t'|.$$

Acesta revine la $-c^2(t - t')^2 + (x - x') + (y - y')^2 + (z - z')^2 \le 0$.

Identificînd e cu punctul $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4_{1,3}$ (punînd $x_1 = ct$, $x_2 = x$, $x_3 = y$, $x_4 = z$) și e' cu $x' = (x_1', x_2', x_3', x_4') \in R$ $(x_1' = ct', x_2' = y', x_3' = y', x_4' = z')$,

condiţia anterioară se scrie $d^2(e, e') \leq 0$. Aşadar, conul viitorului C_e (cu vîrful în e) reprezintă mulţimea evenimentelor fizic conectabile cu e.

Vom considera un caz mai particular, anume $n = 2$, $r = 1$, $s = 1$, al planului pseudo–euclidian $\mathbb{R}^2_{1,1}$, unde vom putea finaliza unele calcule şi interpretări fizice.

Este deci fixată o aplicaţie biliniară simetrică $h : \mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_2 \to \mathbb{R}$ cu signatura (1,1) şi există o bază $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ relativ la care matricea lui h este

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aşadar, $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 = -1$, $\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 = 1$, $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = 0$.

Orice vector $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}_2$ se scrie unic $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2$ şi $|\boldsymbol{x}|^2 = -(x_1)^2 + (x_2)^2$.

Deoarece pseudo–distanţa dintre două puncte $x, y \in \mathbb{R}^2_{1,1}$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ este $d^2(x, y) = |\boldsymbol{xy}|^2 = -(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$, proprietăţile metrice ale planului pseudo–euclidian diferă de cele ale planului euclidian uzual. De exemplu, cercul pseudo–euclidian cu centrul în origine şi rază 1 este

$$\{u \in \mathbb{R}^2_{1,1} \mid d^2(u, 0) = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x^2 + y^2 = 1\}$$

şi privit în planul euclidian, este o hiperbolă.

Orice eveniment elementar $e = (t, x)$ constă din abscisa poziţiei x şi momentul t la care este măsurată (asociat de exemplu cu o particulă care se deplasează rectiliniu); evenimentul e se asimilează cu punctul $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{1,1}$, punînd $x_1 = ct$, $x_2 = x$. În acest caz, conul viitorului (cu vîrful în e) este

$$C_e = \{e' \mid d^2(e, e') \leq 0\}$$

şi reprezintă mulţimea evenimentelor fizic conectabile cu e. Aşadar,

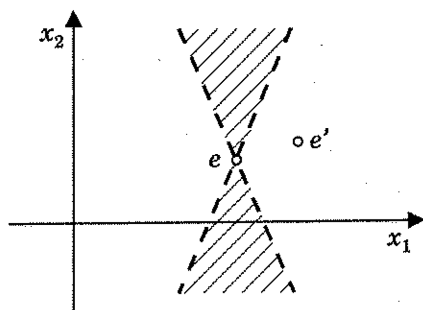


Figura IV.2.

$$C_e = \{(x_1', x_2') \mid -(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 \leq 0\} = \{(x_1', x_2') \mid |x_2' - x_2| \leq |x_1' - x_1|\}$$

şi în planul euclidian are următoarea reprezentare:

1.4. Interpretări fizice

O aplicaţie $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se numeşte **afină** dacă există o aplicaţie liniară $f : \mathcal{V}_n \to \mathcal{V}_n$ astfel încît $F(x + \boldsymbol{v}) = F(x) + f(\boldsymbol{v})$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}_n$.

Aceasta este echivalent cu faptul că $(\forall)\, x \in \mathbb{R}^n$, aplicaţia $\mathcal{V}_n(x) \to \mathcal{V}_n(F(x))$, $(x, \boldsymbol{v}) \to (F(x), f(\boldsymbol{v}))$ este $\mathbb{R}$ – liniară.

Este evident că aplicaţia f este unic determinată de F şi se numeşte **partea omogenă** a lui F. Dacă $\{\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ este baza canonică în $\mathcal{V}_n$, atunci

$$(\forall)\ \boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{e}_1 + ... + x_n\boldsymbol{e}_n,$$

avem

$$F(\boldsymbol{v}) = F(0) + f(\boldsymbol{v}) = F(0) + \sum_{j=1}^{n} x_j f(\boldsymbol{e}_j).$$

Notînd

$F(0) = (c_1, ..., c_n)$ şi $f(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_i$ şi punînd $F(\boldsymbol{v}) = (y_1, ..., y_n)$ rezultă

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + c_i, \ 1 \le i \le n.$$

Totodată

$$f(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n}(y_i - c_i)\boldsymbol{e}_i.$$

Dacă $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este afină, avînd partea omogenă un izomorfism şi dacă $\{b; \boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n\}$ este un reper, atunci $\{F(b); f(\boldsymbol{a}_1), ..., f(\boldsymbol{a}_n)\}$ este de asemenea un reper. Evident, cf. teoremei 2.7, cap. 2, o aplicaţie afină este o mişcare în spaţiul euclidian $\mathbb{R}^n$ dacă şi numai dacă ea transformă un reper ortonormal într-un reper ortonormal.

(O aplicaţie afină $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se numeşte **mişcare în** $\mathbb{R}^n$ dacă partea ei omogenă f este un operator ortogonal, adică matricea $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ este ortogonală, $A \cdot A^T = I_n$. Dacă în plus $\det A = +1$, mişcarea se numeşte **proprie**).

Definiţiile anterioare se extind şi la cazul spaţiilor pseudo–euclidiene.

Astfel, o aplicaţie afină $F : \mathbb{R}^n_{s,r} \to \mathbb{R}^n_{s,r}$ se numeşte **mişcare** (pseudo–euclidiană) dacă partea ei omogenă f conservă produsele scalare, adică $f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ pentru orice $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{V}^n_{s,r}$.

Considerăm cazul $n = 2$, $r = 1$, $s = 1$ al planului pseudo–euclidian şi determinăm mai întîi mişcările $F : \mathbb{R}^2_{1,1} \to \mathbb{R}^2_{1,1}$ care conservă originea adică $F(0) = 0$. Notăm cu $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ baza lui $\mathbb{R}^2_{1,1}$ considerată anterior şi cu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matricea lui f în baza $\mathscr{B}$.

Aşadar, $f(\boldsymbol{a}_1) = a\boldsymbol{a}_1 + c\boldsymbol{a}_2, f(\boldsymbol{a}_2) = b\boldsymbol{a}_1 + d\boldsymbol{a}_2$.

Faptul că F este o mişcare revine la aceea că au loc relaţiile

$f(\boldsymbol{a}_1) \cdot f(\boldsymbol{a}_1) = \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 = -1$, $f(\boldsymbol{a}_1) \cdot f(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = 0$ şi $f(\boldsymbol{a}_2) \cdot f(\boldsymbol{a}_2) = \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 = +1$ deci

$$\begin{aligned}(a\boldsymbol{a}_1 + c\boldsymbol{a}_2) \cdot (a\boldsymbol{a}_1 + c\boldsymbol{a}_2) &= -1 \\ (a\boldsymbol{a}_1 + c\boldsymbol{a}_2) \cdot (b\boldsymbol{a}_1 + d\boldsymbol{a}_2) &= \ \ 0 \\ (b\boldsymbol{a}_1 + d\boldsymbol{a}_2) \cdot (b\boldsymbol{a}_1 + d\boldsymbol{a}_2) &= +1.\end{aligned}$$

De aici rezultă sistemul

$$\begin{cases} -a^2 + c^2 = -1 \\ -ab + cd = 0 \\ -b^2 + d^2 = 1. \end{cases}$$

Evident, $a \neq 0$, $d \neq 0$ și $\frac{c}{a} = \frac{b}{d}$. Să notăm cu k valoarea comună a acestor rapoarte deci $c = ka$, $b = kd$. Atunci $-a^2 + k^2 \cdot a^2 = -1$, $-k^2 \cdot d^2 + d^2 = 1$, de unde $k^2 < 1$ și

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{1-k^2}},\ d = \pm\frac{1}{\sqrt{1-k^2}},\ c = ka,\ b = kd.$$

Avem deci patru matrice A care corespund unor mișcări, $F(X) = A \cdot X$ ale planului pseudo-euclidian $\mathbb{R}^2_{1,1}$. Fixăm una din ele, anume

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru orice punct $x \in \mathbb{R}^2_{1,1}$, $x = (x_1, x_2)$, se obține după această mișcare punctul $y \in \mathbb{R}^2_{1,1}$, $y = (y_1, y_2)$ astfel încît

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ deci } \begin{cases} y_1 = \dfrac{x_1 + kx_2}{\sqrt{1-k^2}} \\ y_2 = \dfrac{kx_1 + x_2}{\sqrt{1-k^2}}. \end{cases}$$

Să punem $x_1 = c \cdot t'$, $x_2 = x'$; $y_1 = ct$, $y_2 = x$. Cu aceste notații, relațiile anterioare devin

$$t = \frac{t' + \frac{k}{c}x'}{\sqrt{1-k^2}};\ x = \frac{kct' + x'}{\sqrt{1-k^2}} \qquad (1)$$

și prin inversare,

$$t' = \frac{t - \frac{k}{c}x}{\sqrt{1-k^2}};\ x' = \frac{-kct + x}{\sqrt{1-k^2}} \qquad (2)$$

Să considerăm două repere $\rho = \{0; t, x\}$, $\rho' = \{m; t', x'\}$ astfel încît originea lui ρ' să fie asimilată cu un mobil m aflat în repaos (relativ la ρ') deci $x' = 0$;

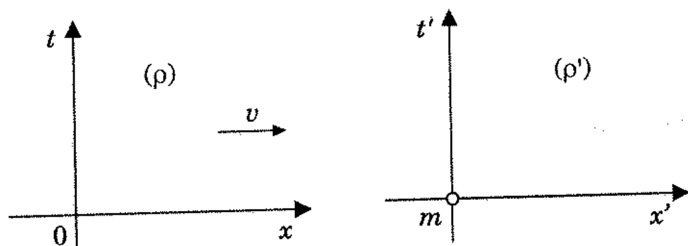


Figura VI.3.

conform (2), rezultă $kct = x$. Dar $v = \frac{x}{t}$ reprezintă tocmai viteza lui m în raport cu reperul ρ și cum m este în repaos relativ la ρ', atunci v reprezintă tocmai viteza lui ρ' în raport cu ρ; din relațiile precedente, rezultă $k = \frac{v}{c}$, ceea ce arată semnificația fizică a parametrului k. Formulele (2), (1) devin

$$t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ x=\frac{vt'+x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ x'=\frac{-vt+x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (3)$$

și regăsim formulele transformării Lorentz (H. A. LORENTZ, 1853–1928) directe și inverse

$$\mathbb{R}^2 \underset{L^{-1}}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^2,\ (x,t)\to(x',t').$$

Dacă $v << c$, atunci $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \simeq 1$ și regăsim formulele transformării GALILEI (1564–1642) $t' \simeq t,\ x' \simeq x - vt$.

Reamintim cîteva consecințe fizice ale considerațiilor precedente.

a) **Încetinirea timpului.** Să presupunem că în reperul ρ (fixat), un orologiu înregistrează trecerea timpului de la valoarea t_1 la valoarea t_2. Să notăm cu t_1', t_2' valorile corespunzătoare lui t_1, t_2 într–unul și același punct de abscisă x' din reperul ρ'. Atunci

$$t_1=\frac{t_1'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ t_2=\frac{t_2'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \text{ deci } t_2-t_1=\frac{t_2'-t_1'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};$$

așadar, $t_2'-t_1' < t_2-t_1$ deci "ceasurile care se deplasează merg mai încet decît cele presupuse fixate". De exemplu, pentru un cosmonaut ce are $v=\frac{1}{30}c$, durata de pe Pămînt se micșorează în cosmos de $\sqrt{899}/30$ ori.

b) **Relativitatea simultaneității.** Să presupunem că evenimentele e_1, e_2 relativ la ρ au loc în același moment t, în punctele de abscise x_1, x_2. Atunci considerate în reperul ρ' ele se vor produce la momentele

$$t_1'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ t_2'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Deoarece

$$t_2'-t_1'=\frac{\frac{v}{c^2}(x_1-x_2)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

rezultă că $t_2' \neq t_1'$ deci evenimentele e_1, e_2 nu mai sînt simultane relativ la reperul ρ'.

Remarcăm că nici succesiunea nu este aceeași (adică $t_1 < t_2$ nu implică neapărat că $t_1' < t_2'$, aceasta depinzînd și de poziții). Cauzalitatea nu este însă afectată.

c) **Contracţia lungimilor.** Să considerăm relativ la reperul ρ o bară de lungime l, ale cărei extremităţi au abscisele x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$. Fie $l = x_2 - x_1$ lungimea barei (relativ la ρ). Să presupunem acum că măsurăm coordonatele absciselor x_1', x_2' ale extremităţilor barei relativ la ρ', la un acelaşi moment t'.

Atunci

$$x_1 = \frac{vt' + x_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x_2 = \frac{vt' + x_2'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

şi notînd $l' = x_2' - x_1'$ lungimea barei relativ la ρ', rezultă

$$l = x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{l'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(deci $l' < l$, adică "lungimea barei relativ la un reper care se deplasează este mai mică decît lungimea aceleiaşi bare într-un reper relativ la care ea este în repaos").

d) **Compunerea einsteiniană (A. EINSTEIN, 1879–1955) a vitezelor.**

Fie $u = \frac{dx}{dt}$ (respectiv $u' = \frac{dx'}{dt'}$) viteza în punctul curent în reperul ρ (resp. ρ'). Avem

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} / \frac{dt'}{dt} = \frac{d}{dt}(x') / \frac{d}{dt}(t') \overset{\text{cf.}(3)}{=}$$

$$\overset{\text{cf.}(3)}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{-vt + x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) / \frac{d}{dt}\left(\frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{-v + \frac{dx}{dt}}{1 - \frac{v}{c^2} \cdot \frac{dx}{dt}} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}.$$

Aşadar,

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}, \text{ de unde, } u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}.$$

Dacă $u << c$ şi $v << c$, atunci $u' \approx u - v$. Să observăm de asemenea, că dacă $u = c$. Atunci $u' = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = c$ şi reciproc, dacă $u' = c$, atunci $u = c$; ca atare, "transformarea Lorentz este compatibilă cu constanţa vitezei luminii". În cadrul compunerii newtoniene a vitezelor, ar fi trebuit considerate viteze de tipul $c \pm u$ (ceea ce conducea la viteze mai mari decît viteza luminii).

e) **Creşterea masei unui corp care se deplasează.** Fie m_0 masa de repaos a unui corp (adică într-un reper relativ la care corpul este în repaos).

Din fizică se ştie că în raport cu un reper faţă de care se deplasează cu viteza v, acelaşi corp va avea masa $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ (deci $m > m_0$), Energia cinetică a corpului este

$$E = mc^2 - m_0c^2 = m_oc^2\left[-1+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\right] = \frac{m_0v^2}{2}+\frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2}+\dots.$$

Dacă $v << c$, atunci $E \simeq \frac{m_0v^2}{2}$ (cazul newtonian). Dacă $c - v \simeq 30$, atunci

$m = \frac{m_0c}{\sqrt{(c-v)(c+v)}} \simeq \frac{m_0c}{\sqrt{2c(c-v)}} \simeq 2000 \cdot m_0$ deci masa crește de 2000 ori.

§ 2. Curbe

2.1. Noțiunea de curbă; moduri de reprezentare

Noțiunea de curbă s-a degajat din reprezentările oamenilor asupra traiectoriilor urmate de diverse obiecte materiale (asimilate cu traiectoriile centrelor de greutate). De asemenea modelarea ideii de "linie curbă", studiul sistemelor dinamice și alte argumente geometrice au impus studiul sistematic al conceptului de curbă.

Definiția 2.1. Se numește **drum parametrizat** în $\mathbb{R}^3$ de clasă C^k ($k \geq 1$ întreg convenabil) o aplicație

$$r : I \to \mathbb{R}^3, t \to r(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

(numită **parametrizare**) definită pe un interval I și astfel încît funcțiile $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ să fie de k ori derivabile pe I cu derivate continue. Un astfel de drum se notează pe scurt $(I, r = r(t))$ și se mai spune că are **ecuațiile parametrice**

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad ,t \in I \\ z = z(t) \end{cases}$$

Mulțimea $r(I) = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in I\}$ se numește **suportul** (sau **urma**) drumului r. Drumul r se numește **nesingular** dacă

$$x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2 + + z'(t_0)^2 \neq 0 \text{ pentru orice } t_0 \in I.$$

Vectorul $\boldsymbol{r}'(t_0) = x'(t_0)\boldsymbol{e}_1 + y'(t_0)\boldsymbol{e}_2 + z'(t_0)\boldsymbol{e}_3$ se numește **vectorul viteză** la drumul $(I, r = r(t))$ în punctul $t_0 \in I$. Un punct $t_0 \in I$ este nesingular $\leftrightarrow \boldsymbol{r}'(t_0) \neq \boldsymbol{0}$ (Am notat cu $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ în loc de $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ baza canonică a lui $\mathcal{V}_3$).

Exemple. 1) Fie $\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}_3$, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, $I = \mathbb{R}$ și $a \in \mathbb{R}$. Drumul parametrizat de clasă C^∞ (nesingular) $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \to a + t\boldsymbol{v}$ se numește **dreapta** trecînd prin a, avînd $\boldsymbol{v}$ ca vector director. Dacă $a = (a_1, a_2, a_3)$ și $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3$, atunci ecuațiile parametrice ale dreptei sînt $x = a_1 + tv_1$, $y = a_2 + tv_2$, $z = a_3 + tv_3$; $t \in \mathbb{R}$ (dacă $t \in [t_1, t_2]$ atunci se obține un segment al dreptei iar dacă $t \geq 0$, o semidreaptă cu originea în a).

Drumul $r_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \to a + t^5\boldsymbol{v}$ are ca suport aceeași dreaptă ca mai sus, dar el este distinct de drumul anterior (de exemplu este singular în punctul $t_0 = 0$). Iată că două drumuri diferite pot avea același suport.

2) Fie a, b şi $R > 0$ constante reale; drumul $r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $r(t) = (a + R\cos t, b + R\sin t, 0)$ este nesingular şi suportul lui este cercul $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, $z = 0$ (situat în planul xOy) parcurs pozitiv o singură dată (fig. IV.4).

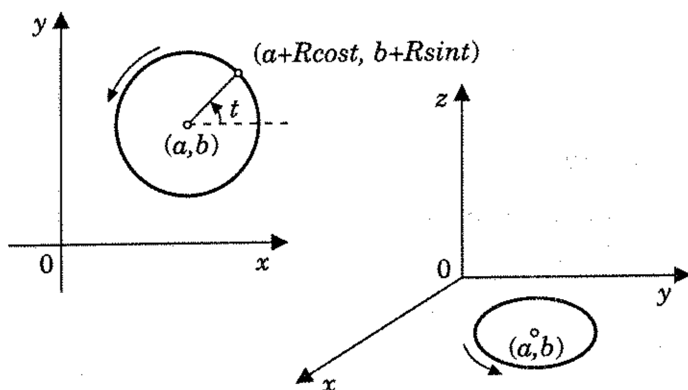


Figura IV.4.

3) Drumul
$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,
$t \to (a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$ unde a, b sînt constante pozitive este de asemenea nesingular; suportul lui se numeşte **elice cilindrică.**

Distanța de la punctul $r(t)$ la axa Oz este $\sqrt{a^2\cos^2 + a^2\sin^2 t} = a$ deci suportul este situat pe cilindrul circular drept cu raza a, de axă Oz (fig. IV.5).

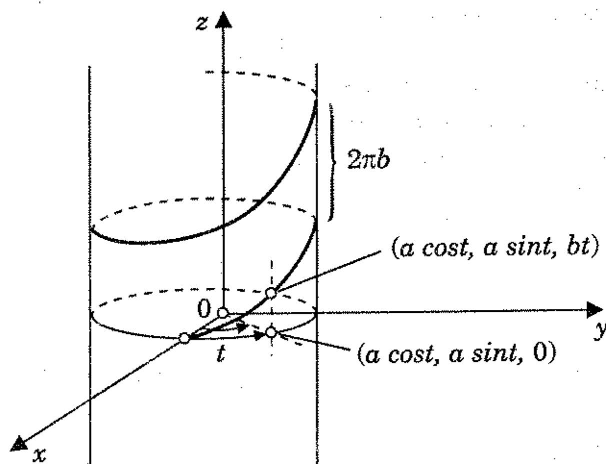


Figura IV.5.

Din exemplele anterioare rezultă că suporturile drumurilor parametrizate modelează ideea intuitivă de curbă, de linie. De altfel în mecanică un drum parametrizat ca mai sus se interpretează ca o lege de mişcare a unui mobil, anume, la orice moment $t \in I$, mobilul se află în punctul $r(t)$, are viteza $r'(t)$, iar suportul drumului este traiectoria mobilului.

DEFINIȚIA 2.2. Fie $(I, r = r(t))$ şi $(J, r_1 = r_1(u))$ două drumuri parametrizate de clasă $C^k (k \geq 1)$. O funcție

$$\lambda : I \to J,\ t \to u = \lambda(t)$$

care este bijectivă, derivabilă pe I de k ori cu $\lambda'(t) \neq 0$ pentru orice $t \in I$ şi astfel încît $r = r_1 \circ \lambda$ [adică $r(t) = r_1(\lambda(t))$, $(\forall)\, t \in I$] se numeşte **schimbare de parametru**. Dacă există o astfel de funcție, se spune că drumurile respective sînt **echivalente** şi că punctele t, $u = \lambda(t)$ **se corespund**.

Două drumuri echivalente au acelaşi suport, pentru că

$$r(I) = (r_1 \circ \lambda)(I) = r_1(\lambda(I)) = r_1(J).$$

Reciproca este falsă, aşa cum arată exemplul drumurilor $(\mathbb{R}, r = a + t\boldsymbol{v})$, $(\mathbb{R}, r_1 = a + t^5\boldsymbol{v})$. Remarcăm de asemenea că pe două drumuri parametrizate echivalente, vectorii–viteză în puncte care se corespund sînt diferiți (deşi coliniari); anume

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}_1'(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t).$$

Un drum parametrizat $(I, \rho = \rho(s))$ se zice cu **parametrizare naturală** dacă $(\forall)\, s \in I$, $|\rho'(s)| = 1$; în acest caz, vectorul–viteză are lungimea 1 în fiecare punct. Parametrul s se mai numeşte natural.

DEFINIȚIA 2.3. Fie un drum parametrizat $(I, r = r(t))$ de clasă C^1. Pentru orice $t_1, t_2 \in I$, numărul real şi pozitiv

$$L_{t_1,t_2} = \left| \int_{t_1}^{t_2} \|\boldsymbol{r}'(t)\| \mathrm{d}t \right|$$

se numeşte **lungimea drumului** între t_1 şi t_2.

EXEMPLE. 1) În cazul unei drepte $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \to a + t\boldsymbol{v}$ ca mai sus, avem

$$L_{t_1,t_2} = \left| \int_{t_1}^{t_2} \|\boldsymbol{v}\| \mathrm{d}t \right| = |t_2 - t_1| \cdot \|\boldsymbol{v}\|,$$

ceea ce corespunde intuiției. Pentru un cerc

$$r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \to (R \cos t,\ R \sin t,\ 0),$$

avem $\boldsymbol{r}'(t) = -R \sin t\, \boldsymbol{e}_1 + R \cos t\, \boldsymbol{e}_2$, $\|\boldsymbol{r}'(t)\| = R$ şi $L_{t_1,t_2} = R \cdot |t_2 - t_1|$

Regăsim astfel formula care dă lungimea arcului de cerc (raza înmulțită cu unghiul la centru măsurat în radiani).

2) Două drumuri echivalente (definiția 2.2) au aceeaşi lungime între punc-te care se corespund; într-adevăr, cu notațiile transparente, avem

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} \|\boldsymbol{r}'(t)\| \mathrm{d}t \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \|\boldsymbol{r}'(\lambda(t))\| \cdot |\lambda'(t)|\, \mathrm{d}t \right| = \left| \int_{u_1}^{u_2} \|\boldsymbol{r}'(u)\| \mathrm{d}u \right|.$$

3) Dacă $(I, \rho = \rho(s))$ este un drum cu parametrizare naturală, atunci

$$L_{s_1,s_2} = \left| \int_{s_1}^{s_2} \|\rho'(s)\| \mathrm{d}s \right| = \left| \int_{s_1}^{s_2} 1 \cdot \mathrm{d}s \right| = |s_2 - s_1|;$$

în particular, dacă $0 \in I$ şi $s > 0$, atunci $L_{0,s} = s$, deci parametrul natural s este tocmai lungimea arcului de la 0 la s.

Arătăm că orice drum parametrizat $(I, r = r(t))$ de clasă C^1 şi nesingular este echivalent cu un drum cu parametrizare naturală. Într-adevăr, fixăm $t_0 \in I$ şi definim funcția $\lambda : I \to \mathbb{R}$, $\lambda(t) = \int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{r}'(t)\| \mathrm{d}t$; funcția λ este derivabilă şi

strict crescătoare, deoarece $\lambda'(t) = \|r'(t)\|$, $(\forall)\, t \in I$; deci $J = \lambda(I)$ este un interval şi putem considera drumul $(J,\ \rho = r(\lambda^{-1}(s)))$. Funcția λ este evident o schimbare de parametru; în plus

$$\rho'(s) = r'(\lambda^{-1}(s)) \cdot (\lambda^{-1})'(s) = r'(\lambda^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{\lambda'(\lambda^{-1}(s))}$$

şi cum $\|r'(t)\| = \lambda'(t)$, rezultă $\|\rho'(s)\| = 1$, $(\forall)\, s \in I$.

Observaţie. Regulile uzuale de derivare a funcțiilor scalare pot fi extinse cu uşurință la cazul vectorial. Astfel, dacă $f : I \to \mathbb{R}$ şi $v, w : I \to \mathcal{V}_3$ sînt funcții de clasă C^1 pe un interval I, atunci $(\forall)\, t \in I$,

$$(f(t)\cdot v(t))' = f'(t)v(t) + f(t)v'(t);\ \ (v(t)\cdot w(t))' = v'(t)\cdot w(t) + v(t)\cdot w'(t)$$

şi

$$(v(t) \times w(t))' = v'(t) \times w(t) + v(t) \times w'(t).$$

Definiția 2.4. O submulțime $C \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte **curbă** dacă pentru orice punct $a \in C$ este îndeplinită următoarea condiție:

– există un drum parametrizat de clasă C^1 nesingular $(I,\ r = r(t))$ definit pe intervalul deschis I şi o mulțime deschisă $V \subset \mathbb{R}^3$ conținînd a, astfel încît $r(I) = V \cap C$ şi aplicația $I \to r(I)$ să fie bijectivă, cu inversa continuă (deci un homeomorfism).

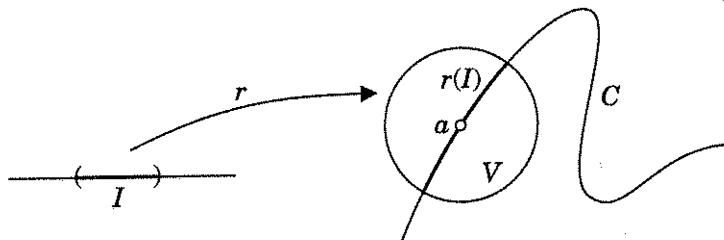


Figura IV.6.

Pe scurt, C este local suportul unui drum parametrizat; $(I,\ r = r(t))$ se mai numeşte o **parametrizare locală** a curbei C în vecinătatea lui a.

O curbă C se numeşte **simplă** dacă există o parametrizare locală ca mai sus astfel încît $r(I) = C$.

Exemplu. O dreaptă $D \subset \mathbb{R}^3$ avînd ecuațiile

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

este o curbă simplă, deoarece putem alege parametrizarea

$$I = \mathbb{R},\ r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \to a + tv \text{ şi evident } D = r(I).$$

Teorema 2.1. a) Fie C o curbă în $\mathbb{R}^3$. Dacă $a \in C$ şi V este un deschis în $\mathbb{R}^3$ conținînd a, atunci orice două parametrizări locale $(I,\ r = r(t))$, $(J,\ r = r_1(u))$ astfel încît $r(I) = r_1(J) = C \cap V$ sînt echivalente.

b) Dacă $(I, r = r(t))$ este un drum parametrizat nesingular (în fiecare punct), atunci $(\forall)\, t_0 \in I$ există o vecinătate $W \subset I$ a lui t_0 astfel încît $C = r(W)$ să fie o curbă simplă.

DEMONSTRAȚIE. a) Fie $\lambda = r_1^{-1} \circ r$ deci $\lambda : I \xrightarrow{r} r(I) = r_1(J) \xrightarrow{r_1^{-1}} J$.

Arătăm că λ este o schimbare de parametru. Evident, λ este bijectivă și $r = r_1 \circ \lambda$. Rămîne să arătăm că funcțiile λ și λ^{-1} sînt derivabile. Fie $(\forall)\, t_0 \in I$ și $u_0 = \lambda(t_0)$. Deoarece drumul $(J, r = r_1(u))$ este nesingular, rezultă $\boldsymbol{r}'_1(u_0) \neq 0$ și de exemplu $x'(u_0) \neq 0$. Notînd $x(u_0) = x_0$, conform teoremei aplicației inverse, există vecinătăți $U_0 \subset J$ și X_0 ale punctelor u_0 și x_0 și o funcție bijectivă $f : X_0 \to U_0$ cu f, f^{-1} derivabile și $x = x(u) \leftrightarrow u = f(x)$. Atunci $r_1(f(X_0)) = r_1(U_0)$ este intersecția lui C cu o vecinătate a punctului $(x(u_0), y(u_0), z(u_0))$. Deoarece $r_1(u) = (\overbrace{x(u)}^{x}, \overbrace{y(u)}^{y}, \overbrace{z(u)}^{z})$, $(\forall)\, u \in J$, rezultă $(\forall)\, x \in X_0$, $r_1(f(x)) = (x, y, z)$ deci $r_1^{-1}(x, y, z) = f(x)$.

Așadar, în vecinătatea $r^{-1}(r_1(f(X_0)))$ a lui t_0, funcția $\lambda(t) = r_1^{-1}(r(t)) = f(x(t))$ este derivabilă (compunere cu funcții derivabile). Am arătat deci că λ este derivabilă în vecinătatea lui t_0, deci este derivabilă pe I; similar, λ^{-1} va fi derivabilă pe J.

b) Fie $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$. Deoarece $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq 0$ avem de exemplu $x'(t_0) \neq 0$ și conform teoremei aplicației inverse, $t = f(x)$, cu f derivabilă într-o vecinătate V a lui $x_0 = x(t_0)$ și $f(x_0) = t_0$. Fie $W = f(V)$ deci $f : V \to W$ este bijectivă și f, f^{-1} sînt derivabile. Arătăm că $r(W)$ este o curbă simplă. Din definiția 2.4 este suficient să demonstrăm că aplicația $r : W \to r(W)$ și inversa ei sînt continue. Dar $r = (r\,|V) \circ f^{-1}$ (compunere de bijecții continue $W \xrightarrow{f^{-1}} V$, $t \longrightarrow x(t)$; $V \xrightarrow{r/V} r(W)$), $x(t) \longrightarrow ((x(t), y(t), z(t))$, iar $r^{-1} = f \circ \mathrm{pr}_1|_{r(W)}$ este de asemenea continuă.

OBSERVAȚIE. Punctul a) al teoremei 2.1 arată că orice două parametrizări locale ale aceleiași curbe, avînd același suport, sînt echivalente. Definiția 2.4 arată că orice curbă este local suportul unui drum parametrizat nesingular și ca atare, o astfel de parametrizare este unic determinată pînă la o schimbare de parametru. La punctul b) al teoremei este stabilită legătura inversă.

Indicăm acum cîteva modalități concrete de a defini curbe.

I. Curbe plane. O curbă C se numește **plană** dacă există un plan $P \subset \mathbb{R}^3$ astfel încît $C \subset P$. Să presupunem că alegem un reper ortogonal $Oxyz$ astfel încît planul P să coincidă cu xOy. O astfel de curbă plană poate fi dată: parametric, explicit, implicit, sau în coordonate polare.

a) Reprezentarea parametrică. Orice punct al curbei are o vecinătate în care curba este suport al unui drum parametrizat $(I, r = r(t))$; $r(t) = (x(t), y(t), 0)$. Ca un exemplu, ne propunem să reprezentăm grafic alura curbei planei dată parametric.

$$C : x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ y = \frac{1}{t},\ t \in (0,+\infty)$$

Intersecțiile cu axele: $x = 0 \Rightarrow t = 1$ şi $y = 1$; curba nu intersectează axa Ox. Deoarece $t > 0$, rezultă că $y > 0$. Studiem variația funcțiilor $x(t)$, $y(t)$; avem $x'(t) = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}$, $y'(t) = -\frac{1}{t^2}$ şi tabloul de variație este

t	0					$+\infty$
$x'(t)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x(t)$	1	↘	↘	↘	↘	-1
$y'(t)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$y(t)$	$+\infty$	↘	↘	↘	↘	0

Asimptote verticale (x finit, $y \to \pm\infty$): $x = 1$;

Asimptote orizontale ($x \to \pm\infty$, y finit): nu există:

Asimptote oblice $x \to \pm\infty$, $y = mx + n$ cu $m = \lim \frac{y}{x}$, $n = \lim(y - mx)$: nu există.

Graficul este indicat în figura IV.7.

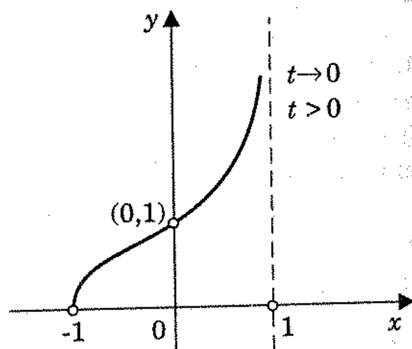


Figura IV.7.

Ca un alt exemplu, să stabilim ecuațiile parametrice ale cicloidei. Să considerăm un cerc de rază R care se rostogoleşte fără alunecare pe semiaxa Ox pozitivă, începînd din poziția inițială C_0. În poziția inițială, "spița verticală" este $\omega_0 O$. După o rostogolire care îl aduce în poziția C_t, "spița" respectivă ocupă poziția $\omega' M$ (unde $\widehat{A\omega' M} = t$) şi $OA = \widehat{AM} = Rt$.

Atunci coordonatele lui M vor fi

$$x = OA - R\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = Rt - R\sin t$$

$$y = \omega' A + R\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = R - R\cos t.$$

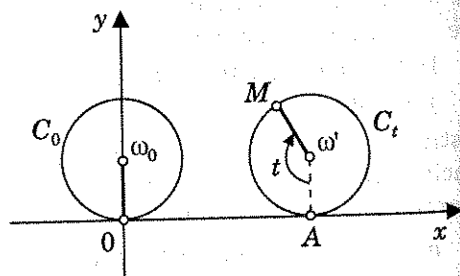


Figura IV.8.

Mulțimea tuturor punctelor M ("capete de spițe") este o curbă plană care se numeşte **cicloidă.** Ecuațiile ei parametrice sînt

$$x = R(t - \sin t);\ y = R(1 - \cos t),\ t \ge 0.$$

Procedînd ca mai sus, rezultă tabloul de variație

t	0		π		2π		3π		$\dots$	$+\infty$
x'	$+$		$+$		0		$+$		$+$	
x	0	$\nearrow$	$R\pi$	$\nearrow$	$2R\pi$	$\nearrow$	$3R\pi$	$\nearrow$	$\dots$	∞
y'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\dots$	
y	0	$\nearrow$	$2R$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$2R$	$\searrow$	$\dots$	

și alura curbei este dată în figura IV.9.

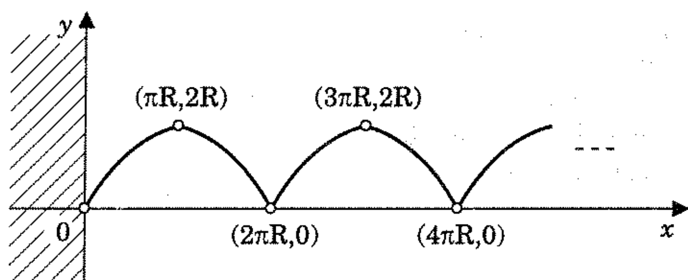


Figura IV.9.

b) Reprezentarea explicită. Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe un interval. Graficul ei $G = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ este o curbă simplă, cu parametrizarea $x = t$, $y = f(t)$; $t \in I$. Aceste curbe au fost studiate în liceu.

c) Reprezentarea implicită. Fie $U \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă și $F : U \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 pe U. Mulțimea $C = \{(x, y) \in U \mid F(x, y) = 0\}$ nu este în general o curbă. Dar dacă într-un punct $(x_0, y_0) \in C$ avem

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \neq 0 \text{ sau } \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \neq 0.$$

De exemplu, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \neq 0$ atunci conform teoremei funcțiilor implicite, există o vecinătate $W \subset U$ a lui (x_0, y_0) și o funcție de clasă C^1, $y = \varphi(x)$ pe un interval deschis I care conține x_0 astfel încît $C \cap W = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$. Deci mulțimea C este o curbă de ecuație carteziană $F(x, y) = 0$, dacă

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \neq 0 \text{ în toate punctele lui } C.$$

Elipsa de semiaxe a, b are (relativ la reperul axelor de simetrie) ecuația carteziană $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; hiperbola de semiaxe a, b are ecuația $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, iar parabola cu axa Ox și focarul $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ are ecuația

$$y^2 - 2px = 0.$$

d) Reprezentarea în coordonate polare

Să presupunem că avem o funcție derivabilă pozitivă $f : [\theta_0, \theta_1] \to \mathbb{R}$. Mulțimea punctelor din plan avînd coordonatele polare $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$ și

$\rho = f(\theta)$ este (local) o curbă plană avînd parametrizarea $x = f(\theta)\cos\theta$, $y = f(\theta)\sin\theta$; $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$. Se mai spune că avem o curbă de ecuație $\rho = f(\theta)$ în coordonate polare. De exemplu pentru curba $\rho = k\theta$ ($k > 0$ constantă) să observăm că $\rho'(\theta) = k > 0$, deci ρ creşte indefinit cu θ;

θ	0		2π		4π		...	$+\infty$
ρ'	+		+		+		+	+
ρ	0	↗	$2\pi k$	↗	$4\pi k$	↗	...	∞

Graficul este de forma indicată în figura IV.10.

În mod similar, curba $\rho = a \sin 3\theta$ ($a > 0$) este definită pentru acei θ pentru care $\sin 3\theta \geq 0$ deci

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$$
(mod 2π).

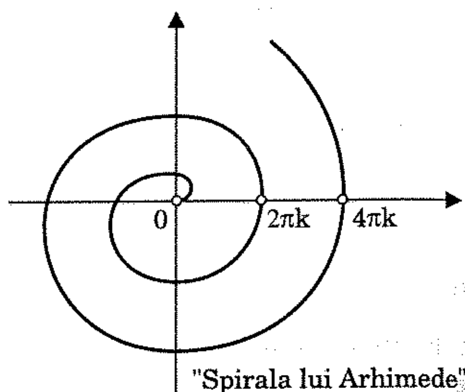


Figura IV.10.

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π	...
ρ'	+		0		−		+		0		−		+		0		−			
ρ	0	&	a	❍	0		0	&	a	❍	0		0	&	a	❍	0			

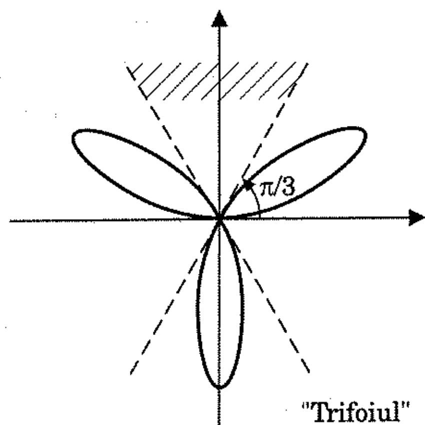


Figura IV.11.

Graficul va fi de forma indicată în figura IV.11.

II. Curbe în spațiu.

a) Reprezentarea parametrică.

Local orice curbă este suportul unui drum parametrizat nesingular (conform definiției 2.4).

b) Reprezentarea implicită. Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ un deschis şi $F, G : U \to \mathbb{R}$ două funcții de clasă $C^1(U)$. Considerăm mulțimea

$$C = \{(x, y, z) \in U \mid F(x, y, z) = 0, \; G(x, y, z) = 0\}.$$

În general, aceasta nu este o curbă. Dacă $a = (x_0, y_0, z_0) \in C$ este un punct astfel încît matricea jacobiană

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}$$

are rangul 2 în punctul a, atunci există o vecinătate W a lui a astfel încît $C \cap W$ să fie o curbă; într-adevăr, presupunînd de exemplu că

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y}(a) & \frac{\partial F}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(a) & \frac{\partial G}{\partial z}(a) \end{vmatrix} \neq 0,$$

teorema funcțiilor implicite arată că există o vecinătate W a lui a și funcții derivabile $y = f(x)$, $z = g(x)$ definite într-o vecinătate V a lui x_0 astfel încît

$$C \cap W = \{(x, f(x), g(x)) \mid x \in V\}.$$

Dacă rangul matricei jacobiene anterioare a funcțiilor F, G în raport cu x, y, z este 2 în orice punct $a \in C$, atunci rezultă că mulțimea C este o curbă (se mai spune că aceasta este obținută ca intersecție a două suprafețe).

2.2. Tangentă, plan osculator, curbură

O problemă fundamentală în geometrie este aceea de a defini indicatori numerici care să distingă o configurație geometrică de alta.

Reamintim că dacă $(I, r = r(t))$ este un drum parametrizat de clasă C^1, atunci $(\forall)\ t_0 \in I$, vectorul $\boldsymbol{r}'(t_0)$ se numește **vectorul viteză** în t_0. Mărimea lui, adică $v = |\boldsymbol{r}'(t_0)|$, se numește "**viteza**" în lungul drumului în t_0. Notînd cu $s(t)$ lungimea arcului pe curbă, am văzut că $s'(t) = |\boldsymbol{r}'(t)| = v(t)$, $(\forall)\ t \in I$. Dacă t_0 este un punct nesingular (adică $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq \boldsymbol{0}$), atunci dreapta care trece prin punctul $r(t_0)$ și are vectorul director $\boldsymbol{r}'(t_0)$ se numește **dreapta tangentă** în t_0 la drumul parametrizat considerat.

Ecuațiile ei sînt în mod evident:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Vectorul viteză în t_0 este

$$\boldsymbol{r}'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_0 + h) - \boldsymbol{r}(t_0)}{h}$$

și din această formulă, rezultă că $\boldsymbol{r}'(t_0)$ este tangent în punctul $r(t_0)$ la curba suport al drumului (figura IV.12).

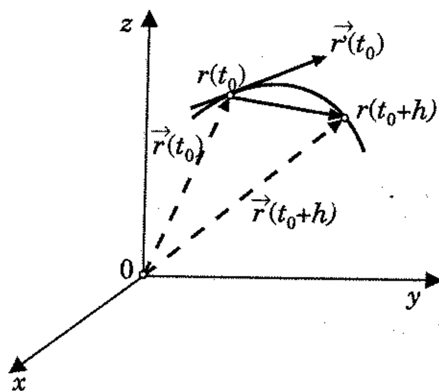


Figura IV.12.

Două drumuri parametrizate echivalente au vectorii tangenți în puncte care se corespund – coliniari deci

dreptele tangente coincid. Conform teoremei 2.1. a), rezultă că noțiunea de dreaptă tangentă în fiecare punct este bine definită pentru curbe oarecare (alegînd o parametrizare locală).

EXEMPLE. 1) Fie C o curbă plană definită prin ecuația carteziană $f(x, y) = 0$, cu f de clasă C^1 pe un deschis U din $\mathbb{R}^2$ și $(\forall)\ a \in C$,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2(a) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2(a) \neq 0.$$

Să presupunem că $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) \neq 0$. Atunci în vecinătatea lui $a = (x_0, y_0)$, curba C este graficul unei funcții $y = y(x)$, definită pe o vecinătate a lui x_0. Ecuația dreptei tangente în a la curba C va fi

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Dar $f(x, y(x)) = 0$, în vecinătatea lui x_0, deci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot y'(x_0) = 0;\ \text{rezultă}\ y'(x_0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(a) / \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

și ecuația tangentei respective devine

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - y_0) = 0.$$

Remarcăm totodată că vectorul

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\boldsymbol{e}_2 = \text{grad}_a f$$

este perpendicular pe tangentă, deoarece un vector director al tangentei este

$$\boldsymbol{e}_1 + y'(x_0)\boldsymbol{e}_2.$$

2) Fie drumul $r(t) = (t, t^2, t^3),\ t \in (0, +\infty)$. Dreapta tangentă în punctul $t_0 > 0$ are ecuațiile

$$\frac{x - t_0}{1} = \frac{y - t_0^2}{2t_0} = \frac{z - t_0^3}{3t_0^2}.$$

DEFINIȚIA 2.5. Un drum parametrizat $(I, r = r(t))$ de clasă C^2 se numește **biregulat în punctul** $t_0 \in I$ dacă vectorii $\boldsymbol{r}'(t_0)$ și $\boldsymbol{r}''(t_0)$ nu sînt coliniari, adică

$$\boldsymbol{r}'(t_0) \times \boldsymbol{r}''(t_0) \neq \boldsymbol{0}.$$

În acest caz, planul care trece prin punctul $r(t_0)$ și este perpendicular pe vectorul $\boldsymbol{r}'(t_0) \times \boldsymbol{r}''(t_0)$ se numește **planul osculator** în t_0, la drumul considerat.

Să considerăm două drumuri biregulate echivalente

$$(I, r = r(t)),\ (J, r_1 = r_1(u)).$$

Atunci există o schimbare de parametru $\lambda : I \to J$ bijectivă, astfel ca λ și λ^{-1} să fie de două ori derivabile și $r = r_1 \circ \lambda$. Atunci $(\forall)\ t \in I$,

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}_1'(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)\ \text{și}\ \boldsymbol{r}''(t) = \boldsymbol{r}_1''(\lambda(t)) \cdot (\lambda'(t))^2 + \boldsymbol{r}_1'(\lambda(t)) \cdot \lambda''(t)$$

și se observă că planele determinate de $\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}''$ și respectiv $\boldsymbol{r}_1', \boldsymbol{r}_1''$ sînt aceleași.

Așadar, planele osculatoare la drumuri biregulate echivalente, în puncte

care se corespund, coincid. Conform teoremei 2.1. a) rezultă că noțiunea de plan osculator are un sens bine determinat și pentru curbe.

Trecem acum la definiția noțiunii de curbură. Sînt necesare cîteva pregătiri.

Fie $(I, r = r(t))$ un drum parametrizat de clasă C^2, nesingular. Fixăm $t_0 \in I$ și notăm

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{r}'(t)\| \mathrm{d}t.$$

Atunci

$$s'(t) = \|\boldsymbol{r}'(t)\|,$$

$(\forall)\, t \in I$, deci funcția $\lambda : I \to \mathbb{R}$, $t \to s(t)$ este continuă și strict crescătoare.

Atunci $J = s(I)$ este un interval și funcția $\lambda : I \to J$ este bijectivă, derivabilă, cu inversa λ^{-1} derivabilă. Am văzut că drumul $(J, \rho = r(\lambda^{-1}(s)))$ este echivalent cu cel inițial și are parametrizare naturală, deoarece $\|\rho'(s)\| = 1$, $(\forall)\, s \in J$; menționăm că $\rho'(s)$, $\rho''(s)$ sînt vectori.

Avem $\rho'(s) \cdot \rho'(s) = \|\rho'(s)\|^2 = 1$ și derivînd în raport cu s, $\rho''(s) \cdot \rho'(s) + \rho'(s) \cdot \rho(s) = 0$ deci $2\rho'(s) \cdot \rho''(s) = 0$, adică $\rho''(s) \perp \rho'(s)$ pentru orice $s \in J$. Remarcăm că vectorul $\rho''(s)$ este independent de parametrizarea naturală [căci dacă $(J_1, \rho_1 = \rho_1(\sigma))$ este o altă parametrizare naturală echivalentă cu $(I, r = r(t))$, atunci drumurile (J, ρ), (J_1, ρ_1) sînt echivalente și există o schimbare de parametru $\sigma = \mu(s)$ astfel încît $\rho = \rho_1 \circ \mu$. Deci $\rho'(s) = \rho_1'(\mu(s)) \cdot \mu'(s)$ și ca atare, $|\mu'(s)| = 1$. Rezultă $\mu'(s) = \pm 1$ și $\mu''(s) = 0$.

Așadar, $\rho''(s) = \rho_1''(\mu(s)) \cdot \underbrace{(\mu'(s))^2}_{1} + \rho_1'(\mu(s)) \cdot \underbrace{(\mu''(s))}_{0}$ și $\rho''(s) = \rho_1''(\mu(s))$].

DEFINIȚIA 2.6. Dacă $(I, r = r(t))$ este un drum parametrizat de clasă C^2 nesingular ca mai sus, atunci vectorul

$$\boldsymbol{k}(t) = \rho''(s(t))$$

se numește **vectorul – curbură în punctul** $t \in I$ la drumul considerat.

Mărimea acestui vector

$$k(t) = \|\boldsymbol{k}(t)\| = \|\rho''(s(t))\|$$

se numește **curbura** în t; $\dfrac{1}{k(t)}$ se numește **raza de curbură** în t.

Teorema următoare indică modul de calcul al acestor elemente în funcție numai de parametrul t. Deoarece drumurile echivalente au parametrizări naturale echivalente, atunci ele au același vector–curbură și aceeași curbură în puncte care se corespund. Așadar, noțiunile anterioare au sens pentru curbe în sensul definiției 2.4.

TEOREMA 2.2. Fie C o curbă, $a \in C$ și $(I, r = r(t))$ o parametrizare locală a lui C în vecinătatea lui a. Atunci vectorul–curbură în orice punct $t \in I$ este

$$(1) \quad \boldsymbol{k} = \frac{1}{v^2}\boldsymbol{r}'' - \frac{1}{v^4}(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}'')\boldsymbol{r}',$$

iar curbura este

$$(2)\qquad k = \frac{1}{v^3}\left\|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''\right\|,$$

unde $v = \left\|\boldsymbol{r}'\right\|$. **(derivatele sînt luate în raport cu** t).

DEMONSTRAŢIE. Cu notaţiile folosite anterior, deoarece $\rho = r \circ \lambda^{-1}$ rezultă $r = \rho \circ \lambda$, adică $r(t) = \rho(s(t))$, $(\forall)\, t \in I$. Atunci

$$\boldsymbol{r}'(t) = \rho'(s(t)) \cdot s'(t),\ \boldsymbol{r}''(t) = \rho''(s(t)) \cdot s'(t)^2 + \rho'(s(t)) \cdot s''(t),$$

şi cum $s'(t) = \left\|\boldsymbol{r}'(t)\right\| = v$ (mărimea vectorului viteză), rezultă

$$(3)\qquad \rho'(s(t)) = \frac{1}{v}\boldsymbol{r}'(t) \text{ şi } \rho''(s(t)) = \frac{1}{v^2}[\boldsymbol{r}''(t) - \rho'(s(t)) \cdot s''(t)].$$

Pe de altă parte, din relaţia $s'(t) = \left|\boldsymbol{r}'(t)\right|$ rezultă

$$s'(t)^2 = \boldsymbol{r}'(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t);$$

derivînd (în raport cu t), se obţine

$$2s' \cdot s'' = 2\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}''$$

deci

$$s'' = \frac{\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}''}{\left\|\boldsymbol{r}'\right\|} = \frac{1}{v}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'').$$

Aşadar, conform (3),

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}(t) = \rho''(s(t)) = \frac{\boldsymbol{r}''(t) - \rho'(s(t)) \cdot \frac{1}{v}(\boldsymbol{r}'(t) \cdot \boldsymbol{r}''(t))}{v^2}$$

şi cum

$$\rho'(s(t)) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{v},$$

se obţine formula (1) din enunţ.

Deoarece $\left\|\rho'(s)\right\| = 1$, rezultă

$$\rho'(s) \cdot \rho'(s) = 1 \text{ şi } \rho''(s) \perp \rho'(s),$$

deci

$$\left\|\rho''(s)\right\| = \left\|\rho'(s) \times \rho''(s)\right\|.$$

Cu această observaţie, rezultă

$$k = k(t) = \left\|\boldsymbol{k}(t)\right\| = \left\|\rho''(s(t))\right\| = \left\|\rho'(s(t)) \times \rho''(s(t))\right\| \overset{\text{cf}(3)}{=} \frac{1}{v^3}\left\|\rho'(t) \times \rho''(t)\right\|.$$

Din formula (2), ţinînd cont de definiţia 2.5, rezultă că o curbă admite plan osculator într-un punct dacă şi numai dacă are curbura nenulă în acel punct.

EXEMPLE. 1) Fie un cerc $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$; el are parametrizarea

$$x = a + R\cos t,\ y = b + R\sin t,\ t \in [0, 2\pi].$$

Avem

$$r(t) = (a + R\cos t,\ b + R\sin t)$$

deci

$$\boldsymbol{r}'(t) = -R\sin t\, \boldsymbol{e}_1 + R\cos t\, \boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{r}''(t) = -R\cos t\, \boldsymbol{e}_1 - R\sin t\, \boldsymbol{e}_2,$$
$$v = \left\|\boldsymbol{r}'\right\| = R \text{ şi } \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' = R^2\boldsymbol{e}_3.$$

Atunci curbura cercului în orice punct este, conform (2)

$$k = \frac{1}{R^3} \cdot \left\| R^2 e_3 \right\| = \frac{1}{R} \text{ (constantă).}$$

2) Pentru o dreaptă $D : r = a + tv$ vectorul-curbură este nul în orice punct şi curbura dreptei este nulă în orice punct.

3) Pentru o curbă plană cu ecuaţiile parametrice $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = 0$, avem

$$r = xe_1 + ye_2,\ v = \sqrt{x'^2 + y'^2} \text{ şi } r' \times r'' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \end{vmatrix} = (x'y'' - x''y')e_3$$

şi curbura în punctul curent este $k = \dfrac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$.

Dacă $y = f(x)$, $x \in I$ este un grafic (cu f de clasă C^2) şi îl parametrizăm prin $x = t$, $y = f(t)$, $t \in I$, atunci $x' = 1$, $y' = f'(t)$, $x'' = 0$, $y'' = f''(t)$ şi curbura în punctul x este

$$k = \frac{|y''(x)|}{\sqrt{(1 + y'(x)^2)^3}}.$$

Aceste exemple arată că noţiunea de curbură corespunde intuiţiei noastre: cercurile au curbura constantă, iar dreptele au curbură nulă. În general, curbura modelează viteza de rotaţie a dreptei-tangente. Mai precis, fie $(I, r = r(s))$ un drum parametrizat natural şi $\Delta\theta$ unghiul dintre versorii $r'(s)$, $r'(s + \Delta s)$.

Atunci

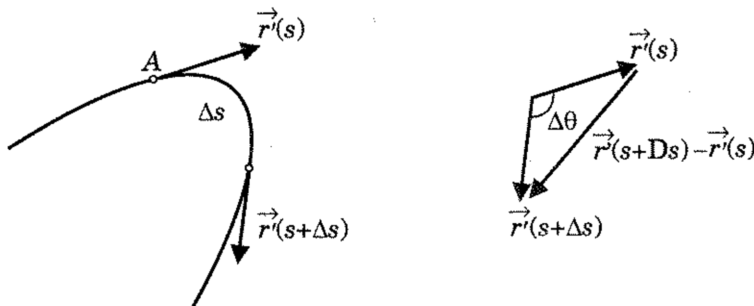


Figura IV.13.

$$\left\| r'(s + \Delta s) - r'(s) \right\|^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos \Delta\theta = 2(1 - \cos \Delta\theta) = 4\sin^2 \frac{\Delta\theta}{2},$$

deci $\left\| r'(s + \Delta s) - r'(s) \right\| = 2\left|\sin \dfrac{\Delta\theta}{2}\right|$.

Curbura în punctul A este

$$k = |r''(s)| = \left\| \lim_{\Delta s \to 0} \frac{r'(s + \Delta s) - r'(s)}{\Delta s} \right\| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{|\Delta s|} \left\| r'(s + \Delta s) - r'(s) \right\| =$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{|\Delta s|} \cdot 2\left|\sin\frac{\Delta\theta}{2}\right| = \left|\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|.$$

Aşadar, curbura exprimă modulul vitezei de variaţie a unghiului θ în raport cu arcul s. Se mai spune că pentru o curbă, curbura ei măsoară abaterea de la o dreaptă. Este inutil de adăugat că noţiunea de curbură este utilizată în mod curent în mecanică şi în teoria mecanismelor.

2.3. Ecuaţiile de mişcare a reperului lui Frenet al unei curbe

Fie $(I, r = r(t))$ un drum parametrizat de clasă C^2, presupus biregulat ($\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' \neq \boldsymbol{0}$ în orice punct din I). El rezultă nesingular ($\boldsymbol{r}' \neq \boldsymbol{0}$). Pentru orice punct $t \in I$ se pot defini următorii trei versori remarcabili, cu punctul de aplicaţie în $r(t)$:

$$\tau(t) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{v(t)} \text{ (**versorul – tangentă**)};$$

$$\nu(t) = \frac{\boldsymbol{k}(t)}{k(t)} \text{ (**versorul – curbură**)};$$

$$\beta(t) = \tau(t) \times \nu(t) \text{ (**versorul – binormală**)}.$$

DEFINIŢIA 2.7. Fixăm $t_0 \in I$. Se numeşte **reperul lui F. Frenet** (1816–1900) în t_0 la drumul considerat, reperul din $\mathbb{R}^3$

$$\{a; \tau, \nu, \beta\}$$

unde $a = r(t_0)$ şi τ, ν, β sînt versorii tangentă, curbură şi binormală în t_0 (cu punctul de aplicaţie în a); vezi figura IV.14.

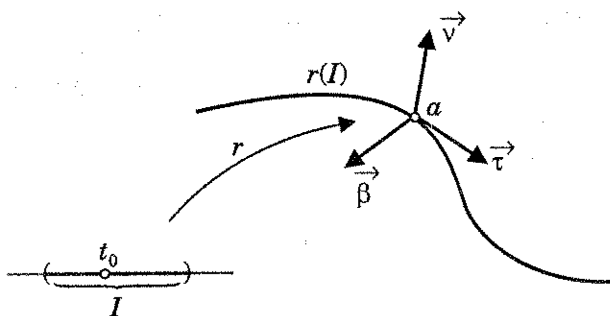


Figura IV.14.

Aşadar

$$\tau = \frac{1}{v}\boldsymbol{r}', \ \nu \overset{\text{cf(1)}}{=} \frac{v}{w}\boldsymbol{r}'' - \frac{\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}''}{vw}\boldsymbol{r}', \ \beta = \frac{1}{w}(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''), \text{ unde } v = |\boldsymbol{r}'|, w = |\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''|,$$

derivatele fiind calculate în t_0. Dacă parametrizarea drumului este naturală $r = r(s)$, atunci $v = 1$, $w = |\boldsymbol{r}''(s)|$ şi $\tau = \boldsymbol{r}'(s)$, $\nu = \dfrac{\boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|}$, $\beta = \dfrac{\boldsymbol{r}'(s) \times \boldsymbol{r}''(s)}{|\boldsymbol{r}''(s)|}$.

Dacă $(I, r = r(t))$, $(J, r_1 = r_1(u))$ sînt două drumuri biregulate echivalente, atunci există o schimbare de parametru $\lambda : I \to J$, $u = \lambda(t)$ astfel încît $r = r_1 \circ \lambda$.

Dacă $\lambda' > 0$ (respectiv $\lambda' < 0$), atunci reperele Frenet în puncte t, u care se corespund sînt aceleaşi (respectiv τ, β sînt înlocuiţi prin opuşii lor). [Într-adevăr, originile reperelor coincid deoarece $r(t) = r_1(\lambda(t)) = r_1(u)$ şi am văzut deja că vectorii-curbură coincid. Din relaţia $r'(t) = r_1'(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)$, rezultă că dacă $\lambda' > 0$, atunci şi versorii–tangentă coincid].

Introducînd noţiunea de orientare, se poate defini reperul Frenet pentru o curbă orientată oarecare.

DEFINIŢIA 2.8. Numim **reper Frenet al lui** C **în punctul** $a \in C$, reperul Frenet în t_0 al unei parametrizări locale $(I, r = r(t))$ a lui C în vecinătatea punctului $t_0 \in I$ pentru care $r(t_0) = a$.

Definiţia este independentă de parametrizarea aleasă. Axele reperului se numesc: **tangentă** $\{a; \tau\}$, **normală principală** $\{a, \nu\}$ şi **binormală** $\{a; \beta\}$ la curba C în punctul a. Planele reperului sînt: **planul osculator** $\{a; \tau, \nu\}$, **planul normal** $\{a; \nu, \beta\}$ şi **planul rectifiant** $\{a; \tau, \beta\}$.

EXEMPLU. Fie curba C avînd ecuaţiile parametrice $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$. Determinăm ecuaţiile axelor şi planelor reperului Frenet în punctul $t = \pi$.

Punctul corespunzător de pe curbă este $a = (-\pi, 0, \pi)$. Apoi,

$$r(t) = (t\cos t, t\sin t, t);\ \boldsymbol{r}'(t) = (\cos t - t\sin t)\boldsymbol{e}_1 + (\sin t + t\cos t)\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{r}''(t) = (-2\sin t - t\cos t)\boldsymbol{e}_1 + (2\cos t - t\sin t)\boldsymbol{e}_2$$

deci

$$\boldsymbol{r}'(\pi) = -\boldsymbol{e}_1 - \pi\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \text{ şi } \boldsymbol{r}''(\pi) = \pi\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2.$$

Apoi

$$\tau = \frac{\boldsymbol{r}'}{\|\boldsymbol{r}'\|} = \frac{-\boldsymbol{e}_1 - \pi\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3}{\sqrt{\pi^2+2}},\quad \beta = \frac{\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''}{\|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''\|} = \frac{2\boldsymbol{e}_1 + \pi\boldsymbol{e}_2 + (2+\pi^2)\boldsymbol{e}_3}{\sqrt{8+5\pi^2+\pi^4}},\ \nu = \beta\times\tau.$$

Restul este evident.

Stabilim acum formulele lui Frenet, care exprimă mişcarea, mai precis viteza de variaţie a versorilor reperului Frenet în raport cu parametrul.

Fie $(I, r = r(t))$ un drum parametrizat biregulat, de clasă C^3. Atunci versorii τ, ν, β ai reperului Frenet vor fi funcţii de t de clasă C^1 şi calculăm derivatele lor.

TEOREMA 2.3. Pentru orice $t \in I$, **au loc relaţiile:**

a) $\tau'(t) = v(t)\cdot k(t)\,\nu(t)$;

b) $\nu'(t) = -v(t)\cdot k(t)\,\tau(t) + v(t)\,\chi(t)\,\beta(t)$;

c) $\beta'(t) = -v(t)\cdot\chi(t)\,\nu(t)$.

unde $\chi(t)$ **este un scalar** (numit **torsiunea** în punctul t).

DEMONSTRAŢIE. Reamintim că $v(t) = \|\boldsymbol{v}(t)\|$ şi $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{r}'(t)$ este vectorul–viteză în punctul t.

a) Deoarece $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = v^2$, rezultă că $2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}' = 2vv'$ deci $v' = \dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}'}{v}$. Apoi $\tau = \dfrac{\boldsymbol{r}'}{v}$ deci

$$\tau'(t) = \frac{\boldsymbol{r}''\cdot v - \boldsymbol{r}'\dfrac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}'}{v}}{v^2} = \frac{1}{v}\boldsymbol{r}'' - \frac{1}{v^3}\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}'').$$

Pe de altă parte, conform teoremei 2.2, (2),

$$v(t)\cdot k(t)\,\mathrm{v}(t)=$$

$$=\frac{1}{v^2}\|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''\|\mathrm{v}(t)=\frac{\|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''\|}{v^2}\left[\frac{v}{\|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''\|}\boldsymbol{r}''-\frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}''}{v\cdot\|\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''\|}\boldsymbol{r}'\right]=\frac{1}{v}\boldsymbol{r}''-\frac{1}{v^3}\boldsymbol{r}'(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r}'')$$

şi rezultă formula a).

Apoi din formula $\beta=\tau\times\mathrm{v}$, rezultă

$$\beta'=\tau'\times\mathrm{v}+\tau\times\mathrm{v}'=vk\,\mathrm{v}\times\mathrm{v}+\tau\times\mathrm{v}'=\tau\times\mathrm{v}'.$$

Aşadar, vectorul β' este perpendicular pe τ. Din relația $\beta\cdot\beta=1$ rezultă $\beta'\cdot\beta=0$ deci β' este perpendicular şi pe β. Ca atare, β' este coliniar cu $\beta\times\tau=\mathrm{v}$ deci există un scalar χ, depinzînd de t, astfel încît $\beta'=-v\chi\mathrm{v}$ şi rezultă formula c).

În fine, derivînd în raport cu t relația $\mathrm{v}=\beta\times\tau$, rezultă

$$\mathrm{v}'=\beta'\times\tau+\beta\times\tau'=-v\,\chi\,\mathrm{v}\times\tau+\beta\times vk\mathrm{v}=v(-k\tau+\chi\beta),\quad \text{deci b).}$$

COROLAR. Pentru un drum cu parametrizare naturală $(I, r=r(s))$, **avem** $v(s)=1$ **pentru orice** $s\in I$ **şi formulele** a), b), c) **devin**

$$\tau'(s)=k(s)\mathrm{v}(s);$$
$$\mathrm{v}'(s)=-k(s)\tau(s)+\chi(s)\beta(s);$$
$$\beta'(s)=-\chi(s)\mathrm{v}(s)$$

(acestea fiind numite **formulele lui Frenet**).

APLICAȚIE. Fie $C: r=r(s)$ un drum plan de clasă C^2, parametrizat natural. Se numeşte **evolventă** a lui C o curbă C^* astfel încît normalele (în orice punct M^* la C^*) să fie tangente (în M) la C; figura IV.15.

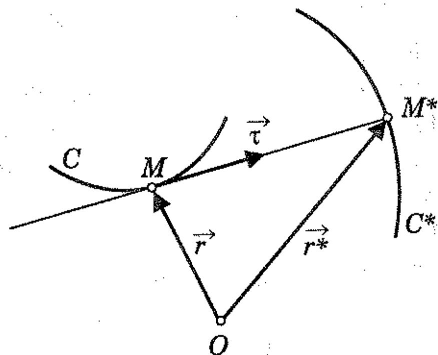


Figura IV.15.

Avem $\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(s)+\lambda(s)\tau$, deci

$$\frac{d\boldsymbol{r}^*}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}+\lambda'(s)\tau+\lambda(s)\tau'(s)=$$

$$=\tau+\lambda'(s)\tau+\lambda(s)k(s)\mathrm{v}(s).$$

Dar $\dfrac{d\boldsymbol{r}^*}{ds}\perp\tau$ deci $1+\lambda'(s)=0$ şi $\lambda(s)=-s+k$ (k = constant). Evolventele lui C au parametrizarea

$$\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}(s)+(k-s)\tau(s).$$

Stabilim acum modul de calcul al torsiunii. Mai întîi să observăm că două drumuri biregulate echivalente şi orientate la fel (schimbarea de parametru este strict crescătoare) au, în puncte care se corespund, aceeaşi torsiune [Într-adevăr, dacă $(I, r=r(t))$ şi $(J, r=r_1(u))$ sînt cele două drumuri, cu schimbarea de parametru $u=\lambda(t)$ şi dacă τ,v,β respectiv $\tau_1,\mathrm{v}_1,\beta_1$ sînt versorii reperelor Frenet în puncte care se corespund, atunci ştim că $\beta_1(u)=\beta(t)$; $\mathrm{v}_1(u)=\mathrm{v}(t)$.

Dar $r'(t) = r_1'(u)\lambda'(t)$ şi $\beta'(t) = \beta_1'(u)\lambda'(t)$. Conform formulei Frenet (teorema 2.3.c)), va rezulta $-v\chi\nu = -v_1\chi_1\nu_1\lambda'$ şi cum $v = v_1 \cdot \lambda'$, se obține $\chi(t) = \chi_1(u)$].

TEOREMA 2.4. Fie $(I, r = r(t))$ un drum parametrizat biregulat, de clasă C^3.

a) Torsiunea în punctul curent $t \in I$ este $\chi = \dfrac{\boldsymbol{r}' \cdot (\boldsymbol{r}'' \times \boldsymbol{r}''')}{\|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''\|^2}$.

b) Suportul drumului este conținut într-un plan dacă şi numai dacă $\chi(t) = 0$ pentru orice $t \in I$.

DEMONSTRAȚIE. a) Considerăm mai întîi cazul unui drum parametrizat natural $(J, \rho = \rho(s))$. În acest caz, avem egalități de vectori

$$\tau = \rho', \quad \nu = \frac{1}{k}\rho'', \quad \beta = \frac{1}{k}\rho' \times \rho''$$

(în orice punct $s \in J$). Din corolarul teoremei 2.3, rezultă $\beta'.\nu = -\chi$. Dar

$$\beta' = \left(\frac{1}{k}\right)' \cdot \rho' \times \rho'' + \frac{1}{k}\rho'' \times \rho'' + \frac{1}{k}\rho' \times \rho''' = \left(\frac{1}{k}\right)'\rho' \times \rho'' + \frac{1}{k}\rho' \times \rho'''$$

şi ca atare egalitățile de produse scalare

$$\chi = -\beta' \cdot \nu = -\beta' \cdot \frac{1}{k}\rho'' = \frac{1}{k^2}\rho' \cdot (\rho'' \times \rho''').$$

În cazul general, pentru un drum $(I, r = r(t))$ ca în enunț, alegem unul parametrizat natural, echivalent şi orientat la fel $(J, \rho = \rho(s))$, cu schimbarea de parametru $s = \lambda(t)$. Am văzut că

$$\chi(t) = \chi_1(s) = \frac{1}{k(s)^2}\rho' \cdot (\rho'' \times \rho''').$$

Dar

$$\boldsymbol{r}'(t) = \rho'(s) \cdot \lambda'(t), \quad \boldsymbol{r}'' = \rho'' \cdot \lambda'^2 + \rho' \cdot \lambda'',$$
$$\boldsymbol{r}''' = \rho''' \cdot \lambda'^3 + 3\rho'' \cdot \lambda' \cdot \lambda'' + \rho' \cdot \lambda'''$$

şi ca atare

$$\boldsymbol{r}' \cdot (\boldsymbol{r}'' \times \boldsymbol{r}''') = \lambda'^6 \cdot \rho' \cdot (\rho'' \times \rho''').$$

Deoarece $\boldsymbol{r}'(t) = \rho'(s) \cdot \lambda'(t)$ deci $|\boldsymbol{r}'(t)| = \lambda'(t)$, adică $\lambda' = v$, rezultă

$$\chi(t) = \frac{1}{k(s)^2 v^6}\boldsymbol{r}' \cdot (\boldsymbol{r}'' \times \boldsymbol{r}''').$$

În fine, deoarece $k(s) = \dfrac{1}{v^3}\|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''\|$ (conform teoremei 2.2., (2)), rezultă

$$\chi(t) = \frac{\boldsymbol{r}' \cdot (\boldsymbol{r}'' \times \boldsymbol{r}''')}{\|\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''\|^2}$$

b) Dacă $r(I)$ este situat într-un plan P, atunci vectorii $\boldsymbol{r}'$, $\boldsymbol{r}''$ sînt coplanari cu P (deoarece $\boldsymbol{r}'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)}{h}$ şi la fel pentru $\boldsymbol{r}''(t)$). Atunci $\boldsymbol{r}'(t) \times \boldsymbol{r}''(t) \perp P$, deci $\beta(t) \perp P$ pentru orice $t \in I$. Aşadar P va coincide cu planul osculator în orice punct deci $\beta(t) =$ constant. Prin urmare, $\beta' = \mathbf{0}$ şi conform formulei a treia a lui Frenet, $\chi = 0$.

Reciproc, dacă $\chi = 0$, atunci $\beta' = \mathbf{0}$, deci $\beta(t) = \boldsymbol{A}$, constant. Dar $\beta \parallel \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}''$ deci $\boldsymbol{r}' \perp \boldsymbol{A}$ adică $(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A})' = 0$. Aşadar, $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A} = \alpha$, constant. Atunci, notînd

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3,$$

rezultă că toate punctele (x, y, z) ale suportului curbei satisfac ecuația $a_1x + a_2y + a_3z = \alpha$ şi ca atare aparțin unui acelaşi plan.

EXEMPLU. Fie C o curbă şi A un punct fixat; pentru orice punct $M \in C$ notăm cu $d(M)$ distanța de la A la planul osculator în M şi cu $\chi(M)$ torsiunea curbei în $M \cdot C$ se numeşte **curbă Țițeica** (relativ la A) dacă raportul $\dfrac{\chi(M)}{d(M)^2}$ este constant (Gh. Țițeica, 1873–1939).

OBSERVAȚIE. Am studiat în detaliu curbele din spațiu. Teoria precedentă se poate dezvolta şi pentru cazul curbelor în $\mathbb{R}^n$ (sau în spații mai generale).

Acest studiu nu este doar un joc matematic ci există motivații adînci ale sale. De exemplu, dacă Σ este un sistem dinamic şi dacă la fiecare moment $t \in I$ el are parametri de stare $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, atunci aplicația $r : I \to \mathbb{R}^n$, $t \to (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ determină evoluția sistemului Σ pe intervalul de timp I. De asemenea prezintă interes studiul curbelor în spațiul pseudoeuclidian $\mathbb{R}^4_{1,3}$, incluzînd reperele Frenet. (De exemplu, particulele elementare se deplasează pe "curbe temporale").

§ 3. Suprafețe

3.1. Noțiunea de suprafață; moduri de reprezentare

Suprafețele au apărut în conştiința noastră ca frontiere ale unor corpuri materiale; de exemplu, suprafețele plane, cilindrice, sferice etc. ele fiind obiecte geometrice esențiale pentru cunoaştere. În analogie cu definiția 2.1, fixăm

DEFINIȚIA 3.1. Se numeşte **pînză parametrizată** în $\mathbb{R}^3$ de clasă C^1 o aplicație

$$r : U \to \mathbb{R}^3, (u, v) \to r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

definită într-un domeniu $U \subset \mathbb{R}^2$ (deschis conex) şi astfel încît $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq \mathbf{0}$ în orice punct din $U\left(\boldsymbol{r}_u = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \boldsymbol{r}_v = \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right)$

O astfel de pînză se mai notează pe scurt $(U, r = r(u, v))$ şi se mai spune că **are ecuațiile parametrice**

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases},(u, v) \in U.$$

Mulțimea $r(U) = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \mid (u,v) \in U\}$ se numeşte **urma** (sau **suportul**) pînzei r.

Două pînze (parametrizate) $(U, r), (V, r_1)$ cu U, V domenii din $\mathbb{R}^2$ se zic **echivalente** dacă există un difeomorfism $\lambda : U \to V$, numit **schimbare de parametri**, astfel încît $r = r_1 \circ \lambda$.

EXEMPLE. 1) Fie $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathcal{V}_3$ doi vectori necoliniari şi $a \in \mathbb{R}^3$ un punct. Se poate considera pînza parametrizată

$$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, r(u, v) = a + u\boldsymbol{p} + v\boldsymbol{q}.$$

Suportul ei este planul trecînd prin a şi paralel cu $\boldsymbol{p}$ şi $\boldsymbol{q}$.

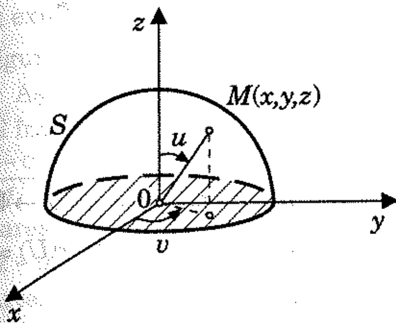


Figura IV.16.

2) Să considerăm emisfera unitate superioară S.

Pentru orice punct $M(x, y, z) \in S$, fie u = colatitudinea lui M şi v = longitudinea lui M. Aşadar, $0 < u < \frac{\pi}{2}$, $0 \le v < 2\pi$ şi $x = \sin u \cos v$, $y = \sin u \sin v$, $z = \cos u$. Considerăm domeniul $U = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi)$ din $\mathbb{R}^2$ şi aplicația

$$r : U \to \mathbb{R}^3,$$
$$(u, v) \to (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u).$$

Se obține astfel o pînză parametrizată şi suportul ei este emisfera S, cu excepția punctelor unde $v = 0$ ("meridianul zero"). În acest caz,

$\boldsymbol{r}_u = \cos u \cos v\boldsymbol{e}_1 + \cos u \sin v\boldsymbol{e}_2 - \sin u\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{r}_v = -\sin u \sin v\boldsymbol{e}_1 + \sin u \cos v\boldsymbol{e}_2$ şi

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \sin^2 u \cos v\boldsymbol{e}_1 + \sin^2 u \sin v\boldsymbol{e}_2 + \sin u \cos u\boldsymbol{e}_3.$$

În analogie cu definiția 2.4 dăm

DEFINIȚIA 3.2. O submulțime $S \subset \mathbb{R}^3$ se numeşte **suprafață** dacă pentru orice punct $a \in S$ este îndeplinită următoarea condiție:
(**) există o pînză parametrizată $(U, r = r(u, v))$ definită pe un domeniu $U \subset \mathbb{R}^2$ şi o mulțime deschisă $V \subset \mathbb{R}^3$ conținînd a, astfel încît $r(U) = V \cap S$ şi aplicația $U \to r(U)$ să fie bijectivă, cu inversa continuă (un homeomorfism).

Aşadar, S este local suportul unei pînze parametrizate; $(U, r = r(u, v))$ se numeşte o **parametrizare locală** a lui S în vecinătatea lui a (figura IV.17).

O suprafață S se zice **simplă** dacă există o parametrizare locală ca mai sus astfel încît $r(U) = S$. De exemplu, planul $(\mathbb{R}^2, r)$, $r = a + u\boldsymbol{p} + v\boldsymbol{q}$ este o suprafață simplă.

Indicăm cîteva clase de suprafețe şi modalități de reprezentare a suprafețelor.

a) **Reprezentarea explicită**

Fie $U \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu şi $f(x, y)$, $f : U \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1. Graficul lui f, adică mulțimea

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in U, z = f(x, y)\}$$

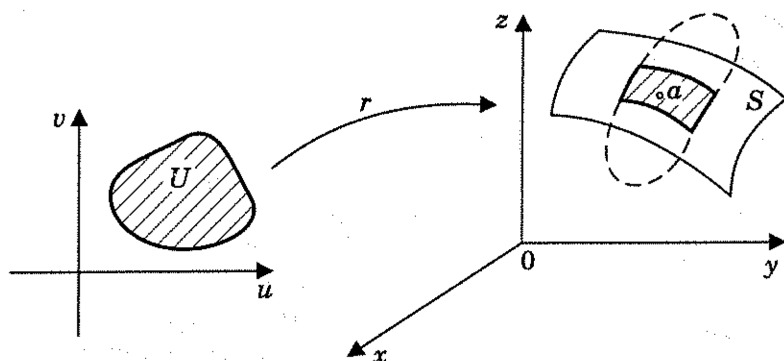


Figura IV.17.

este o suprafață simplă. Într-adevăr, considerăm parametrizarea $r : U \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \to (u, v, f(u, v))$ şi constatăm că $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = -\frac{\partial f}{\partial u}\boldsymbol{e}_1 - \frac{\partial f}{\partial v}\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \neq \boldsymbol{0}$, $r(U) = G$ şi aplicația $r : U \to G$ este bijectivă, cu inversa continuă.

Se mai spune că G este o suprafață dată **explicit,** prin ecuația $z = f(x, y)$ şi că G este proiectabilă pe planul xOy.

b) **Reprezentarea implicită**

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă şi $F(x, y, z)$, $F : D \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 astfel încît $\frac{\partial F}{\partial x}(a)^2 + \frac{\partial F}{\partial y}(a)^2 + \frac{\partial F}{\partial z}(a)^2 \neq 0$ pentru orice $a \in D$. Arătăm că mulțimea $S = \{(x, y, z) \in D \mid F(x, y, z) = 0\}$ este o suprafață în sensul definiției 3.2. Pentru aceasta să observăm că $(\forall)\, a = (x_0, y_0, z_0) \in S$ avem de exemplu $\frac{\partial F}{\partial z}(a) \neq 0$ şi conform teoremei funcțiilor implicite, există o vecinătate W a lui a în $\mathbb{R}^3$ astfel încît $S \cap W$ să fie graficul unei funcții $z = f(x, y)$. Se mai spune că suprafața S este definită **implicit** prin ecuația carteziană $F(x, y, z) = 0$.

De exemplu, sfera cu centrul în punctul $C(\alpha, \beta, \gamma)$ şi raza $R > 0$ are ecuația carteziană $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 - R^2 = 0$ şi este o suprafață compactă.

Reamintim de asemenea cuadricele pe ecuația redusă (raportată la reperul definit de axele de simetrie), care sînt de asemenea definite implicit: elipsoidul de semiaxe a, b, c $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) = 0$, hiperboloidul cu o pînză "culcat" pe Oz $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0\right)$, hiperboloidul cu două pînze $\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0\right)$, paraboloidul epileptic $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0\right)$, paraboloidul hiperbolic $\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0\right)$.

c) **Cilindri şi conuri**

Fie $(C):\begin{cases}f(x,y,z)=0\\ g(x,y,z)=0\end{cases}$ o curbă în spaţiu. **Cilindrul de directoare** (C) **şi vector director** $\boldsymbol{v}=l\boldsymbol{e}_1+m\boldsymbol{e}_2+n\boldsymbol{e}_3\neq \boldsymbol{O}$ este mulţimea K a punctelor $M\in\mathbb{R}^3$ cu proprietatea că există $P\in(C)$ astfel încît $MP\parallel \boldsymbol{v}$ (figura IV.18).

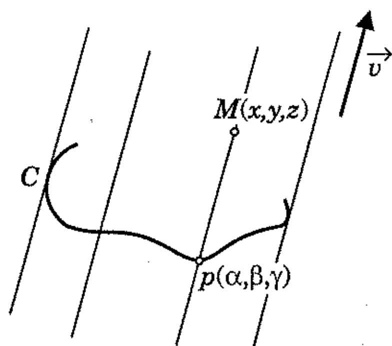


Figura IV.18.

Aşadar, $K=\{(x,y,z)\mid(\exists)\ \alpha,\beta,\gamma$ astfel încît $f(\alpha,\beta,\gamma)=0$, $g(\alpha,\beta,\gamma)=0$ şi $\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}\}$ şi notînd cu t valoarea comună a rapoartelor, $K=\{(x,y,z)\mid(\exists)\ t$ astfel încît $f(x-lt,y-mt,z-nt)=0$ şi $g(x-lt,y-mt,z-nt)=0\}$ şi în final K are ecuaţia carteziană $\varphi(x,y,z)=0$, obţinută prin eliminarea parametrului t.

EXEMPLE. 1) Fie $(C):\begin{cases}x^2+yz=0\\ 2x-z-1=0\end{cases}$. Determinăm ecuaţiile proiecţiei ortogonale (C') a curbei (C) pe planul xOy. Considerăm cilindrul de directoare (C) şi vector director $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{e}_3$. În acest caz

$$f(x,y,z)=x^2+yz,\ g(x,y,z)=2x-z-1;\ l=0,\ m=0,\ n=1$$

deci

$$f(x-lt,y-mt,z-nt)=x^2+y(z-t)\text{ şi}$$
$$g(x-lt,y-mt,z-nt)=2x-(z-t)-1.$$

Ecuaţia cilindrului respectiv se obţine eliminînd t între relaţiile

$$x^2+y(z-t)=0,\ 2x-z+t-1=0$$

şi se obţine $x^2+y(2x-1)=0$. Ecuaţiile curbei C' vor fi

$$\begin{cases}x^2+y(2x-1)=0\\ z=0\end{cases}$$

2) Cilindrul de directoare $(C):\begin{cases}F(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$, paralel cu Oz (deci cu vector director $\boldsymbol{e}_3$) are tocmai ecuaţia $F(x,y)=0$. De exemplu, $x^2+y^2=1$ este ecuaţia cilindrului circular drept de rază 1, cu axa Oz.

Conul de directoare $(C):\begin{cases}f(x,y,z)=0\\ g(x,y,z)=0\end{cases}$ şi **vîrf** $V(x_0,y_0,z_0)$ este mulţimea punctelor $M\in\mathbb{R}^3$ cu proprietatea că există $P\in(C)$ astfel încît punctele V, M, P să fie coliniare.

EXEMPLU. Stabilim ecuaţia conului K cu vîrful în origine şi directoare cercul $\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\ z=h\end{cases}$. Aşadar, $K=\{(x,y,z)\mid(\exists)\ \alpha,\beta,\gamma$ astfel încît $\alpha^2+\beta^2=R^2$,

$\gamma = h$ şi punctele $(0, 0, 0)$, (x, y, z), (α, β, γ) să fie coliniare$\}$=

$$= \{(x, y, z) \mid (\exists)\ \alpha, \beta, \gamma \text{ astfel încît } \alpha^2 + \beta^2 = R^2, \gamma = h \text{ şi } \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}\} =$$

$$= \{(x, y, z) \mid (\exists)\ \alpha, \beta \text{ astfel încît } \alpha^2 + \beta^2 = R^2, z\alpha = hx, z\beta = hy\} =$$

$$= \{(x, y, z) \mid \left(\frac{hx}{z}\right)^2 + \left(\frac{hy}{z}\right)^2 = R^2\}$$ şi ecuaţia lui K va fi $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{h^2} z^2$.

d) **Suprafeţe de rotaţie**

Fie $\Delta: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ o dreaptă fixă (numită **axă de rotaţie**).

Cercurile $\pi_{\lambda,\mu}$ cu centrul pe Δ, situate în plane perpendiculare pe Δ se numesc **paraleli** (relativ la Δ) şi au ecuaţii de forma

$$(\pi_{\lambda\mu}): \begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - \lambda^2 = 0 \\ lx + my + nz - \mu = 0 \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

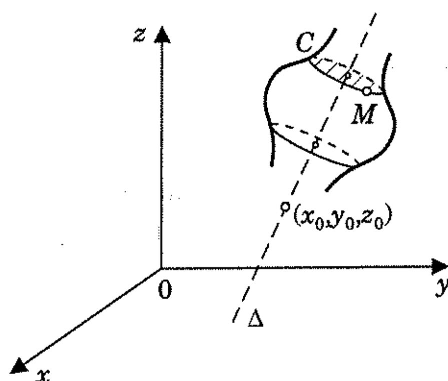


Figura IV.19.

Dacă $(C): \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$ este o curbă (numită **meridian**), **suprafaţa de rotaţie** obţinută prin rotirea lui (C) în jurul lui Δ este mulţimea punctelor $M \in \mathbb{R}^3$ cu proprietatea că paralelul care trece prin M se sprijină pe meridianul (C); figura IV.19.

EXEMPLU. Fie $C: \begin{cases} F(x,z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ o curbă în planul xOz care nu intersectează axa Oz şi S suprafaţa obţinută prin rotirea lui C în jurul lui Oz. Paralelii relativ la Oz sînt cercurile $\begin{cases} x^2 + y^2 - \lambda = 0 \\ z - \mu = 0 \end{cases}$. Acestea se sprijină

pe $C \leftrightarrow$ sistemul $\begin{cases} x^2 + y^2 - \lambda^2 = 0 \\ z - \mu = 0 \\ F(x,z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ admite soluţii $\leftrightarrow$ sistemul $\begin{cases} x^2 - \lambda^2 = 0 \\ z - \mu = 0 \\ F(x,z) = 0 \end{cases}$

admite soluţii $\leftrightarrow F(\pm \lambda, \mu) = 0$. Ecuaţia suprafeţei S va fi $F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$.

De exemplu, dacă C este cercul $\begin{cases} (x - a)^2 + z^2 - R^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, $a > R$, atunci suprafaţa S este un **tor** şi are ecuaţia $(\pm\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 - R^2 = 0$ adică

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$$

deci o ecuaţie de gradul IV; figura IV.20.

Stabilim acum legătura între pînze parametrizate și suprafețe (definițiile 3.1 și 3.2). Anume, vom arăta că local orice două parametrizări ale unei suprafețe S sînt echivalente (teorema 3.1 a) și că suportul oricărei pînze parametrizate este local o suprafață (teorema 3.1 b).

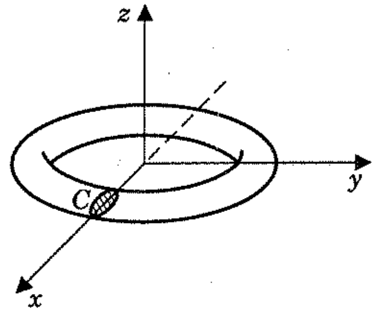


Figura IV.20.

TEOREMA 3.1. a) Fie (U, r) și (U_1, r_1) două parametrizări ale unei suprafețe S avînd același suport $r(U) = r_1(U_1)$. Atunci ele sînt echivalente (adică există un difeomorfism $\lambda : U \to U_1$ astfel încît $r = r_1 \circ \lambda$).

b) Fie $(U, r = r(u,v))$ o pînză parametrizată. Atunci orice punct $(u_0, v_0) \in U$ are o vecinătate $V \subset U$ astfel încît $r(V)$ să fie o suprafață în $\mathbb{R}^3$.

DEMONSTRAȚIE. a) Începem cu următoarea

LEMA 3.2. Fie (U, r) o parametrizare a lui S și $W = r(U)$ (deci $r : U \to W$ este bijectivă). Atunci pentru orice $c \in W$ există o vecinătate V a lui c în $\mathbb{R}^3$ și o aplicație $F : V \to U$ astfel încît $r^{-1}\big|_{W \cap V} = F\big|_{W \cap V}$.

DEMONSTRAȚIA lemei. Fie $r(u,v) = (\overbrace{f(u,v)}^{x}, \overbrace{g(u,v)}^{y}, \overbrace{h(u,v)}^{z})$ și $c = r(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$. Deoarece $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$, rangul matricii jacobiene a funcțiilor f, g, h în raport cu u, v este egal cu 2 și putem presupunem (de exemplu) că $\dfrac{D(f, g)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0$. Atunci conform teoremei funcțiilor implicite, există o

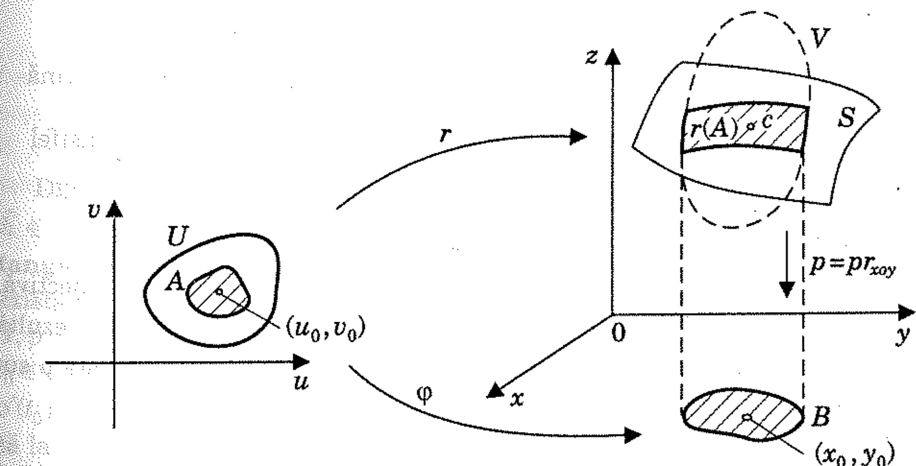


Figura IV.21.

vecinătate deschisă $A \subset U$ a lui (u_0, v_0) şi o vecinătate deschisă B a lui (x_0, y_0) în planul xOy astfel încît $\varphi : A \to B$, $(u, v) \to (x, y)$ să fie un difeomorfism.

Aplicația $r : U \to W$ fiind un difeomorfism, $r(A)$ este o vecinătate a lui $c = r(u_0, v_0)$ deci există o vecinătate V_1 a lui c în $\mathbb{R}^3$ astfel încît $r(A) = V_1 \cap S = V_1 \cap W$. Fie acum $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \to (x, y)$ proiecția pe planul xOy. Deoarece $p \circ r|_A = \varphi$, rezultă $p(r(A)) \subset B$ deci $r(A) \subset p^{-1}(B)$.

Notînd $V = V_1 \cap p^{-1}(B)$, rezultă $r(A) = V \cap S = V \cap W$ şi se poate considera aplicația $F = \varphi^{-1} \circ p|_V : V \to A$. Evident, F este de clasă C^1. Rămîne să arătăm relația din enunț. Fie $(\forall)(x,y,z) \in W \cap V$, $(x,y,z) \in r(A)$. Atunci există şi este unic un punct $(u,v) \in U$ astfel încît $(x,y,z) = r(u,v)$ deci $(u,v) = r^{-1}(x,y,z)$. În fine, $F(x,y,z) = \varphi^{-1}(p|_V(x,y,z)) = \varphi^{-1}(x,y) = (u,v)$, ultima relație decurgînd din faptul că $\varphi(u,v) = p(r|_A(u,v)) = p(x,y,z) = (x,y)$. Aşadar, $r^{-1}|_{W \cap V} = F|_{W \cap V}$. Lema este demonstrată.

Fie acum (U,r), (U_1,r_1) parametrizări ale lui S ca în enunț şi $W = r(U) = r_1(U_1)$. Aplicațiile $r : U \to W$, $r_1 : U_1 \to W$ fiin homeomorfisme (adică bijective, continue, cu inversele continue), rezultă că aplicația $\lambda = r_1^{-1} \circ r : U \to U_1$, este un homeomorfism. Rămîne să arătăm că λ şi λ^{-1} sînt de clasă C^1.

Fie $(\forall)$ $(u_0, v_0) \in U$ fixat. Aplicînd lema pentru punctul $c = r_1(\lambda(u_0, v_0))$, există o vecinătate deschisă V a lui c în $\mathbb{R}^3$ şi o aplicație $F : V \to U_1$ de clasă C^1 astfel încît $r_1^{-1}|_{W \cap V} = F|_{W \cap V}$ şi fie $Z = r^{-1}(W \cap V)$. Mulțimea Z este o vecinătate a lui (u_0, v_0) şi $\lambda|_Z = (r_1^{-1} \circ r)|_Z = (F \circ r)|_Z$ adică $\lambda|_Z$ este o funcție de clasă C^1 (compunere de aplicații C^1). Aşadar, λ este C^1 şi similar se arată că λ^{-1} este C^1.

b) Fie $r(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$. Putem presupune că $\frac{D(f, g)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0$ deci conform teoremei funcțiilor implicite, există o vecinătate V a lui (u_0, v_0) şi o vecinătate V_1 a lui $(x_0, y_0) = (f(u_0, v_0), g(u_0, v_0))$ astfel încît $F : V \to V_1$, $(u, v) \to (\overbrace{f(u, v)}^{x}, \overbrace{g(u, v)}^{y})$ să fie un difeomorfism.

Avem $F(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$.

Aplicația $r|_V : V \to \mathbb{R}^3$ este injectivă, deoarece $F = p \circ r|_V$ şi F este injectivă.

Atunci $r|_V : V \to r(V)$ este bijectivă şi continuă; cum $F = p \circ r|_V$, rezultă $(r|_V)^{-1} = F^{-1} \circ p$ deci $(r|_V)^{-1}$ este continuă. Am arătat astfel că $r(V)$ este o suprafață (conform definiției 3.2). Teorema 3.1 este demonstrată.

3.2. Drumuri pe o suprafață. Plan tangent, normală, orientare

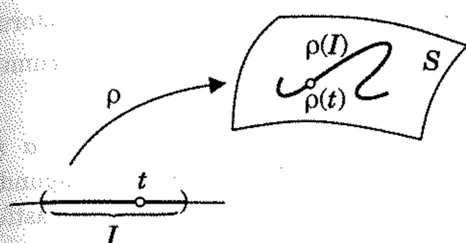


Figura IV.22.

Fie S o suprafață. Se spune că un drum parametrizat $(I, \rho = \rho(t))$ **este situat pe** S dacă $(\forall)\, t \in I$, $\rho(t) \in S$ adică suportul drumului $\rho(I)$ este conținut în S.

Un caz particular important îl constituie drumurile situate în suporturi de parametrizări locale ale lui S. Fie $(U, r = r(u, v))$ o parametrizare a lui S deci $r : U \to r(U)$ este un homeomorfism. Atunci a da un drum nesingular $(I, \rho = \rho(t))$ de clasă C^1, aflat în $r(U)$, revine la a da un drum nesingular $(I, \rho_1 = \rho_1(t))$ unde $\rho = r \circ \rho_1$.

Dacă ρ_1 are ecuațiile parametrice

$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$, $t \in I$, atunci ρ are ecuațiile parametrice $\begin{cases} x = f(u(t), v(t)) \\ y = g(u(t), v(t)), \quad t \in I \\ z = h(u(t), v(t)) \end{cases}$

unde $r(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$, pentru $(u, v) \in U$.

Segmentelor de dreaptă $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ situate în U le corespund curbe pe S, numite **linii de coordonate** (figura IV.23).

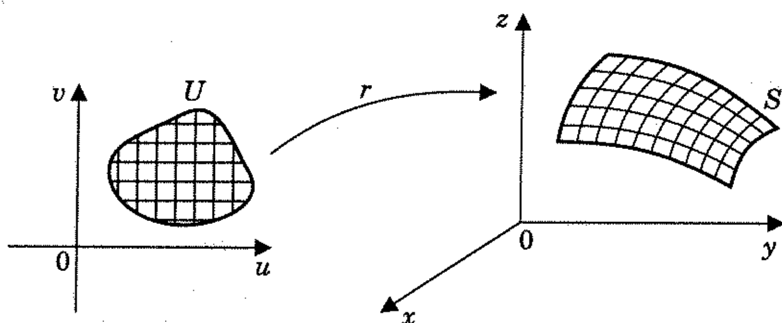


Figura IV.23.

DEFINIȚIA 3.3. Fie S o suprafață și un punct $a \in S$. Un vector aplicat în a, $\vec{h} \in \mathcal{V}_3(a)$, se numește **vector tangent la** S **în punctul** a dacă există un drum de clasă C^1 $(I, \rho = \rho(t))$ situat pe S și un punct $t_0 \in I$ astfel încît $\rho(t_0) = a$ și $\rho'(t_0) = \vec{h}$, deci $\vec{h}$ este vector-viteză la un drum trecînd prin a și situat pe S (figura IV.24).

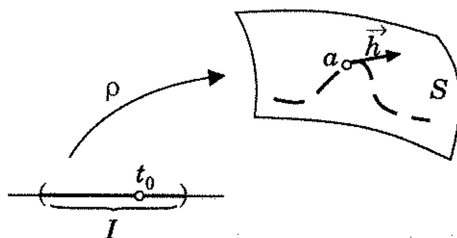


Figura IV.24.

Mulțimea T_aS a tuturor vecto-

rilor tangenți la S în a se numește **spațiul tangent la S în a.**

EXEMPLE. 1) Fie $S: r = (2u, uv, 5v)$, $a = (2, 1, 5) = r(1, 1) \in S$. Vectorul $\vec{h} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 10\vec{e}_3$ aparține lui T_aS deoarece, luînd $\rho_1: u = t, v = t^2$ și drumul corespunzător $\rho(t) = (2t, t^3, 5t^2)$ pe S, avem $a = \rho(1)$ și $\vec{h} = \vec{\rho}'(1)$.

2) Fie $(U, r = r(u, v))$ o parametrizare a lui S în vecinătatea lui a și $(u_0, v_0) \in U$ astfel ca $a = r(u_0, v_0)$. Atunci linia de coordonate ce corespunde segmentului $\rho_1: u = u_0 + t, v = v_0$, $t \in I_1$ este $(I_1, \rho(t) = r(u_0 + t, v_0))$; I_1 este astfel ales ca $\rho_1(t) \in U$, $(\forall)\, t \in I_1$.

Se observă că $\rho(0) = r(u_0, v_0) = a$ și $\rho'(0) = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0)$ deci $\vec{r}_u(u_0, v_0) \in T_aS$. În mod similar, $\vec{r}_v(u_0, v_0) \in T_aS$.

Remarcăm că vectorii $\vec{r}_u(u_0,v_0)$ și $\vec{r}_v(u_0,v_0)$ sînt liniar independenți deoarece $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$ în orice punct. Ei se mai numesc vectori–viteze parțiale și sînt tangenți la liniile de coordonate.

TEOREMA 3.3. Fie S o suprafață și $a \in S$ un punct fixat. Atunci T_aS este un spațiu vectorial real și $\dim T_aS = 2$.

DEMONSTRAȚIE. Fie $(U, r = r(u, v))$ o parametrizare a lui S în vecinătatea lui a și $(u_0, v_0) \in U$ astfel încît $a = r(u_0, v_0)$. Avem $T_aS \subset \mathscr{V}_3(a)$ și fie T subspațiul lui $\mathscr{V}_3(a)$ generat de $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ și $\vec{r}_v(u_0, v_0)$. Arătăm că $T_aS = T$. Fie mai întîi $(\forall)\, \vec{h} \in T_aS$ și fie $(I, \rho = \rho(t))$ un drum situat pe S și $t_0 \in I$ astfel încît $\rho(t_0) = a$ și $\rho'(t_0) = \vec{h}$. Atunci există funcții $u = u(t)$, $v = v(t)$ de clasă C^1 în vecinătatea lui t_0 astfel încît $u(t_0) = u_0$, $v(t_0) = v_0$ și $\rho = r(u(t), v(t))$. Așadar, $\vec{\rho}'(t_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0)u'(t_0) + \vec{r}_v(u_0,v_0)v'(t_0)$, deci $\vec{h} \in T$. Invers, dacă $\vec{h} \in T$, deci $\vec{h} = \alpha\vec{r}_u(u_0, v_0) + \beta\vec{r}_v(u_0, v_0)$ cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\vec{h}$ este un vector tangent în $t = 0$ la drumul $r = r(u_0 + \alpha t, v_0 + \beta t)$, deci $\vec{h} \in T_aS$. Am arătat că $T_aS = T$. Dar T admite baza $\{\vec{r}_u(u_0,v_0), \vec{r}_v(u_0, v_0)\}$ și prin urmare $\dim_{\mathbb{R}} T = 2$.

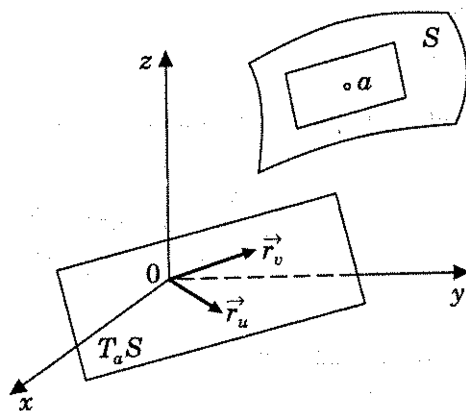


Figura IV.25.

DEFINIȚIA 3.4. Planul trecînd prin a, paralel cu T_aS, se numește **planul tangent la suprafața S în punctul** a. Normala la acest plan în a se numește **normală** la S în a (figura IV.25).

Reperul $\{a; \vec{r}_u(u_0, v_0), \vec{r}_v(u_0, v_0)\}$ se numește **reperul natural la S în** a (corespunzînd parametrizării).

Dacă $r = r(u, v)$, $a = r(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ este parametrizarea lui S, atunci ecuația planului

tangent la S în a va fi în mod evident

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0,$$

deoarece planul trece prin a și are vectorul normală $\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)$.

Dacă suprafața este reprezentată implicit $S : F(x, y, z) = 0$ și $a = (x_0, y_0, z_0)$ cu $\operatorname{grad}_a F \neq \vec{0}$, atunci vectorul $\operatorname{grad}_a F = \frac{\partial F}{\partial x}(a)\vec{e}_1 + \frac{\partial F}{\partial y}(a)\vec{e}_2 + \frac{\partial F}{\partial z}(a)\vec{e}_3$ este ortogonal la T_aS. [Într-adevăr, dacă $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ este o parametrizare a lui S în vecinătatea lui $a = r(u_0, v_0)$ atunci $F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = 0$ în vecinătatea lui (u_0, v_0). Derivînd în raport cu u și apoi în raport cu v, rezultă $(\operatorname{grad}_a F) \cdot \vec{r}_u(u_0, v_0) = 0$, $(\operatorname{grad}_a F) \cdot \vec{r}_v(u_0, v_0) = 0$ deci $\operatorname{grad}_a F \perp \vec{r}_u, \vec{r}_v$, adică $\operatorname{grad}_a F \perp T_aS$]. Rezultă că ecuația planului tangent în a la S este $\frac{\partial F}{\partial x}(a)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(a)(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(a)(z-z_0) = 0$, iar ecuațiile normalei în a la S sînt $\dfrac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(a)} = \dfrac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(a)} = \dfrac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(a)}$.

EXEMPLE. 1) Fie sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ și punctul $a = (x_0, y_0, z_0) \in S$.

Ecuația planului tangent în a la S este $2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0$, adică $x_0x + y_0y + z_0z - R^2 = 0$. Normala în a la S va fi coliniară cu vectorul $\overrightarrow{Oa}$.

2) Fie o suprafață dată explicit $z = f(x, y)$, adică $f(x, y) - z = 0$, cu f funcție de clasă C^1 pe un deschis $D \subset \mathbb{R}^2$. Normala în punctul curent are ecuațiile:

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0} = \frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0} = \frac{z-z_0}{-1};$$

notînd $p = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$, $q = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$, versorii normalei în punctul (x_0, y_0, z_0) vor fi $\pm\vec{N}$, unde $\vec{N} = \dfrac{p\vec{i} + q\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}$.

Orientarea unui spațiu vectorial se realizează prin fixarea unei baze.

Bazele pentru care matricea de trecere are determinantul pozitiv dau aceeași orientare. Dacă V este un subspațiu vectorial al lui $\mathscr{V}_3$ de dimensiune 2, atunci orientarea lui V este bine determinată printr-un versor ortogonal la V și folosim tocmai această posibilitate.

DEFINIȚIA 3.5. Numim **orientare** a unei suprafețe S alegerea unei orientări în fiecare spațiu T_aS, $a \in S$, adică alegerea cîte unui versor normal $\boldsymbol{n}(a)$, ortogonal la T_aS, astfel încît aplicația $S \to V_3$, $a \to \boldsymbol{n}(a)$ să fie continuă.

O suprafață S care admite orientare se numeşte **orientabilă,** iar dacă orientarea este fixată (deci un versor normal variind continuu pe S), suprafața S se zice **orientată.**

EXEMPLE. 1) O orientare a sferei $S: x^2+y^2+z^2=R^2$ se poate defini prin versorul normalei exterioare $\vec{n}(a)=\dfrac{1}{R}\overrightarrow{Oa}$, deci sfera S este orientabilă; cealaltă orientare este dată prin $\vec{n}(a)=-\dfrac{1}{R}\overrightarrow{Oa}$,

2) Orice suprafață simplă S cu parametrizarea globală $(U, r=r(u, v))$ este orientabilă prin versorul $\vec{n}(u,v)=\dfrac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$.

3) Un exemplu celebru de suprafață neorientabilă îl constituie banda lui A. G. Möbius (1790–1868); dar o "porțiune" a acesteia poate fi orientabilă.

4) Dacă o suprafață S este orientată prin versorul-normală $\vec{n}(a)$, atunci $-\vec{n}(a)$ determină o altă orientare a lui S. Dacă S este conexă, atunci orice orientare a lui S coincide cu una din acestea două [deoarece dacă $\vec{N}(a)$ este o orientare a lui S, atunci $\vec{N}(a)=\lambda(a)\vec{n}(a)$ şi funcția $\lambda: S \to \{-1, +1\}$ rezultă continuă; cum S este conexă, λ este constantă deci $\lambda=-1$ sau $\lambda=1$]. Aşadar, o suprafață orientabilă conexă admite exact două orientări.

Dacă S este o suprafață orientabilă (cu orientarea $\vec{n}(a)$, $a \in S$), o parametrizare $(U, r=r(U, v))$ a lui S se zice **compatibilă cu orientarea** dacă $(\forall)\ a=\vec{r}(u,v)$ cu $(u,v)\in U$, avem $\dfrac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}=\vec{n}(a)$, adică baza $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n}(a)\}$ a lui $\mathbb{R}^3$ este la fel orientată (satisface "regula burghiului" ca şi baza canonică $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$). De exemplu, parametrizarea sferei cu ajutorul longitudinii şi colatitudinii este compatibilă cu orientarea sferei dată de normala exterioară.

3.3. Prima formă fundamantală a unei suprafețe

DEFINIȚIA 3.6. Dacă S este o suprafață în $\mathbb{R}^3$, o aplicație $f: S \to \mathbb{R}^k$ se numeşte **netedă** dacă pentru orice parametrizare $(U, r=r(u,v))$ a lui S, aplicația $f \circ r: U \to \mathbb{R}^k$ este de clasă C^1. Aceasta este echivalent cu faptul că pentru orice $a \in S$ există o parametrizare (U, r) a lui S astfel încît $a \in r(U)$ şi aplicația $f \circ r: U \to \mathbb{R}^k$ este de clasă C^1.

Dacă S_1, S_2 două suprafețe (în $\mathbb{R}^3$), atunci o aplicație $F: S_1 \to S_2$ se numeşte **netedă** dacă notînd cu $i: S_2 \to \mathbb{R}^3$ aplicația de incluziune, compunerea $i \circ F$ este netedă în sensul anterior. Dacă F este bijectivă şi F, F^{-1} sînt netede, atunci F se numeşte un **difeomorfism.**

Fie $F: S_1 \to S_2$ o aplicație netedă între două suprafețe şi $a \in S_1$. Atunci există o aplicație $\mathbb{R}$–liniară $F'(a): T_aS_1 \to T_{F(a)}S_2$, numită **aplicația tan-**

gentă la F în punctul a (sau **diferenţiala lui F în** a). Anume, pentru orice vector tangent $\vec{h} = T_a S_1$ alegem un drum $(I, \rho = \rho(t))$ şi $t_0 \in I$ astfel încît $\rho(t_0) = a$, $\rho'(t_0) = \vec{h}$. Considerînd drumul $(I, \rho_1 = F \circ \rho)$, avem $\rho_1(t_0) = F(\rho(t_0)) = F(a)$ şi se pune prin definiţie $F'(a)(\vec{h}) = \rho_1'(t_0)$. Se arată uşor că definiţia este corectă (independentă de alegerea lui ρ şi t_0) şi că aplicaţia $F'(a)$ este $\mathbb{R}$–liniară. Dacă $(U, r = r(u, v))$ este o parametrizare a lui S_1 în vecinătatea lui $a = r(u_0, v_0)$, atunci conform teoremei 3.3, vectorii $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ formează o bază a lui $T_a S_1$. Se arată uşor că $(\forall)\ \vec{h} \in T_a S_1$, $\vec{h} = h_1 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0, v_0) + h_2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$, cu $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$, avem

$$F'(a)(\vec{h}) = h_1 \frac{\partial(\vec{F} \circ \vec{r})}{\partial u}(u_0, v_0) + h_2 \frac{\partial(\vec{F} \circ \vec{r})}{\partial v}(u_0, v_0).$$

De aici rezultă faptul că aplicaţia $F'(a)$ este $\mathbb{R}$–liniară.

DEFINIŢIA 3.7. Fie S o suprafaţă de clasă C^2 în $\mathbb{R}^3$. Pentru orice punct $a \in S$ considerăm produsul scalar $\varphi_a^{(1)} : T_a S \times T_a S \to \mathbb{R}$, $(\vec{p}, \vec{q}) \to \vec{p} \cdot \vec{q}$.

Se numeşte **prima formă fundamentală** a lui S familia $\varphi^{(1)} = \{\varphi_a^{(1)}\}_{a \in S}$ a tuturor produselor scalare $\varphi_a^{(1)}$, indexată după punctele $a \in S$.

Fie $(U, r = r(u, v))$ o parametrizare a lui S. Pentru aplicaţia netedă $r : U \to S$ şi pentru orice $(u,v) \in U$ avem aplicaţia tangentă

$$r'(u, v) : T_{(u, v)} U \to T_{r(u, v)} S.$$

Dar U fiind un deschis în $\mathbb{R}^2$, $T_{(u, v)} U = \mathcal{V}_2(u, v)$ (mulţimea vectorilor legaţi în punctul (u, v)), deci $r'(u, v)(h_1\vec{e}_1 + h_2\vec{e}_2) = h_1\vec{r}_u(u, v) + h_2\vec{r}_v(u, v)$ şi $r'(u, v)$ este un izomorfism $\mathbb{R}$–liniar. Atunci pentru orice punct $(u, v) \in U$, se poate defini produsul scalar

$$\varphi^{(1)} : \mathcal{V}_2(u, v) \times \mathcal{V}_2(u, v) \to \mathbb{R},\ \varphi^{(1)}(\xi, \eta) = r'(u, v)(\xi) \cdot r'(u, v)(\eta).$$

Am identificat $\mathcal{V}_2(u, v)$ cu $T_{r(u, v)} S$. Introducem notaţiile lui Gauss: $E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$, $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$, $G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$ (funcţii de clasă C^1 în U), numiţi şi **coeficienţii primei forme fundamentale a lui** S. Se observă că

$$d\vec{r} \cdot d\vec{r} = (\vec{r}_u\, du + \vec{r}_v\, dv) \cdot (\vec{r}_u\, du + \vec{r}_v\, dv) = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

(formă pătratică în du, dv). Evident, matricea lui $\varphi_a^{(1)}$ în baza $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v\}$ a lui $T_a S$ este $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$.

EXEMPLE. 1) Considerăm sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, cu parametrizarea

$$r : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to S,\ r(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u).$$

Atunci

$$\vec{r}_u = R \cos u \cos v \vec{e}_1 + R \cos u \sin v \vec{e}_2 - R \sin u \vec{e}_3,$$

$$\vec{r}_v = -R \sin u \sin v \vec{e}_1 + R \sin u \cos v \vec{e}_2$$

şi rezultă

$$E = R^2,\ F = 0,\ G = R^2 \sin^2 u.$$

2) Fie un plan P cu parametrizarea $(\mathbb{R}^2, r)$, $r = a + u\vec{p} + v\vec{q}$ $(a \in \mathbb{R}^3;$ $\vec{p}, \vec{q} \in \mathcal{V}_3)$. Atunci $\vec{r}_u = p$, $\vec{r}_v = q$ şi $E = p^2$, $F = \vec{p} \cdot \vec{q}$, $G = q^2$. În particular, pentru planul xOy avem $r = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2$ şi $E = 1, F = 0, G = 1$.

Prima formă fundamentală a unei suprafeţe S permite rezolvarea unor probleme "fără a părăsi suprafaţa şi a ieşi în spaţiul ambiant $\mathbb{R}^3$". Dacă $(U, r = r(u, v))$ este o parametrizare a lui S şi (I, ρ) este un drum parametrizat situat pe S definit prin $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$ deci $\rho(t) = r(u(t), v(t))$, $t \in I$, atunci $\vec{\rho}'(t) = \vec{r}_v \cdot u'(t) + \vec{r}_v \cdot v'(t)$ şi $\vec{\rho}'(t) \cdot \vec{\rho}'(t) = Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2$.

Aşadar, lungimea porţiunii din drum, între punctele t_1, t_2, este conform definiţiei 2.3,

$$L_{t_1 t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \vec{\rho}'(t) \right\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2}\, dt.$$

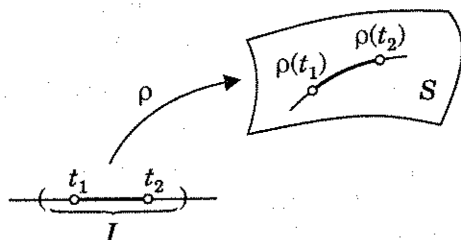


Figura IV.26.

OBSERVAŢIE. Dacă $s(t)$ este lungimea arcului între un punct $t_0 \in I$ fixat şi punctul curent $t \in I$, atunci $s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \vec{\rho}'(t) \right\| dt$ deci

$$s'(t) = \left\| \vec{\rho}'(t) \right\| = = \sqrt{Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2}.$$

Deoarece $s'(t) = \dfrac{ds}{dt}$, relaţia anterioară se mai scrie simbolic

$$ds^2 = E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2,$$

spunîndu-se că defineşte **metrica** suprafeţei S.

EXEMPLU. Calculăm lungimea curbei $u = t$, $v = t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$. Am văzut că $E = R^2$, $F = 0$, $G = R^2 \sin^2 u$ deci $ds^2 = R^2 du^2 + R^2 \sin^2 u\, dv^2$ şi

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 u'(t)^2 + R^2 \sin^2 u \cdot v'(t)^2}\, dt = R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 t}\, dt \text{ etc.}$$

G. B. RIEMANN (1826–1866), a avut o idee care a revoluţionat geometria, oferind totodată fizicii relativiste aparatul matematic necesar. De altfel el a pornit de la observarea universului fizic, admiţînd că local acesta este euclidian, dar admite o curbură variind continuu, variaţia ei fiind legată de mişcarea materiei în timp şi în spaţiu. Ne restrîngem la cazul suprafeţelor.

Dacă S este o suprafaţă, se numeşte **metrică Riemann** pe S o familie $g = (g_a)_{a \in S}$ de produse scalare $g_a : T_a S \times T_a S \to \mathbb{R}$, variind neted [în sensul că pentru orice parametrizare $(U, r = r(u_1, u_2))$ a lui S, funcţiile

$$g_{ij} : r(U) \to \mathbb{R}, x = r(u_1, u_2) \to g_{ij}(x) = g_x\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j}\right), 1 \le i, j \le 2$$

sînt netede; funcțiile $g_{ij}(x)$ se numesc **componentele** metricii Riemann g relativ la parametrizarea considerată]. Așadar, în fiecare spațiu tangent T_aS este fixat cîte un produs scalar g_a, matricea acestui produs scalar relativ la baza mobilă $\left\{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}\right\}$ fiind $(g_{ij}(a))_{1\le i,j\le 2}$. Dacă $\vec{p}, \vec{q} \in T_aS$ și

$$\vec{p} = p_1 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} + p_2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2}, \quad \vec{q} = q_1 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} + q_2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2},$$

atunci $g_a(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} p_i q_j$. Adeseori această relație se scrie scurt $g(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(a) p_i q_j$. În acest mod, pe suportul oricărei parametrizări a lui S, o metrică Riemann poate fi dată prin setul de funcții netede g_{ij}, $1 \le i, j \le 2$, formînd în fiecare punct o matrice 2×2 simetrică pozitiv definită.

Un exemplu de metrică Riemann pe S îl constituie desigur prima formă fundamentală. Aceasta sugerează diverse alte construcții. Astfel, dacă g este o metrică Riemann fixată, putem defini lungimea unui arc de curbă, unghiul a două curbe etc. Această noțiune se extinde la cazul varietăților, incluzînd cazul 4-dimensional al universului fizic.

3.4. A doua formă fundamentală a unei suprafețe

Fie S o suprafață de clasă C^2, orientabilă cu orientarea dată prin versori-normală $\vec{n}(a)$, $a \in S$. Notăm prin Σ sfera unitate $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Atunci se poate considera **aplicația lui Gauss** $\gamma : S \to \Sigma$, $a \to$ acel unic punct $p \in \Sigma$ astfel încît $\overrightarrow{Op} = \vec{n}(a)$ (figura. IV.27).

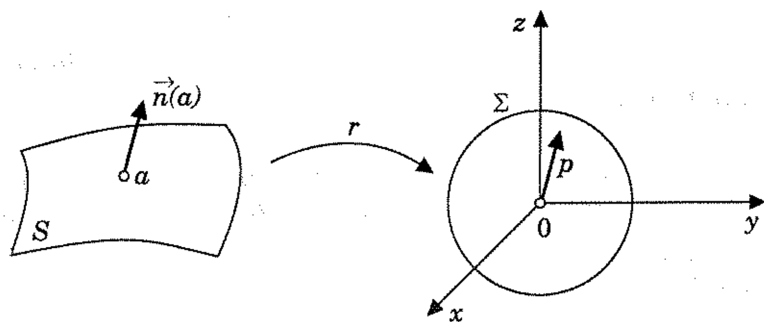


Figura IV.27.

Aplicația γ este netedă deoarece pentru orice $a \in S$, alegînd o parametrizare $(U, r = r(u, v))$ a lui S compatibilă cu orientarea, avem

$$(\gamma \circ r)(u, v) = \gamma(r(u, v)) = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$$

şi aceasta este de clasă C^1. Pentru orice $a \in S$, putem considera aplicația $\mathbb{R}$-liniară $\gamma'(a) : T_aS \to T_{\gamma(a)}\Sigma$. Dar $T_{\gamma(a)}\Sigma = T_aS$ (ca spații vectoriale), deoarece normalele lor sînt paralele. Pentru orice punct $a \in S$, endomorfismul $\gamma'(a) : T_aS \to T_aS$ este numit **operatorul fundamental** al suprafeței S în punctul a.

Dacă $(U, r = r(u, v))$ este o parametrizare a lui S în vecinătatea lui $a = r(u, v)$ compatibilă cu orientarea, atunci

$$(\gamma \circ r)(u, v) = \gamma(r(u, v)) = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} = \vec{n}(u,v),$$

deci $(\forall)$ $\vec{h} \in T_aS$, $\vec{h} = h_1\vec{r}_u + h_2\vec{r}_v$, avem

$$\gamma'(a)(\vec{h}) = h_1 \frac{\partial(\overrightarrow{\gamma \circ r})}{\partial u} + h_2 \frac{\partial(\overrightarrow{\gamma \circ r})}{\partial v} = h_1 \frac{\partial \vec{n}}{\partial u} + h_2 \frac{\partial \vec{n}}{\partial v}.$$

În particular, $\gamma'(a)(\vec{r}_u) = \dfrac{\partial \vec{n}}{\partial u} = \vec{n}_u$ (notație) şi $\gamma'(a)(\vec{r}_v) = \dfrac{\partial \vec{n}}{\partial v} = \vec{n}_v$ (notație).

TEOREMA 3.4. Dacă S este o suprafață de clasă C^2, orientabilă, atunci pentru orice $a \in S$, operatorul fundamental $f = \gamma'(a) : T_aS \to T_aS$ este autoadjunct (deci are valori proprii reale şi este diagonizabil).

DEMONSTRAȚIE. Avem de arătat că $(\forall)$ $\vec{p}, \vec{q} \in T_aS$, $f(\vec{p}) \cdot \vec{q} = \vec{p} \cdot f(\vec{q})$. Să observăm mai întîi că $f(\vec{r}_u) \cdot \vec{r}_v = \vec{r}_u \cdot f(\vec{r}_v)$ [într-adevăr, aceasta revine la $\vec{n}_u \cdot \vec{r}_v = \vec{r}_u \cdot \vec{n}_v$; dar $\vec{n} \cdot \vec{r}_v = 0$ şi $\vec{n} \cdot \vec{r}_u = 0$ şi derivînd în raport cu u şi respectiv v avem $\vec{n}_u \cdot \vec{r}_v + \vec{n} \cdot \vec{r}_{vu} = 0$, $\vec{n}_v \cdot \vec{r}_u + \vec{n} \cdot \vec{r}_{uv} = 0$ şi se ştie că $\vec{r}_{uv} = \vec{r}_{vu}$]. În mod similar, $f(\vec{r}_v)\vec{r}_u = \vec{r}_v \cdot f(\vec{r}_u)$. Se ține apoi cont că $(\forall)$ $\vec{p}, \vec{q} \in T_aS$ există scalari reali p_1, p_2, q_1, q_2 astfel încît $\vec{p} = p_1\vec{r}_u + p_2\vec{r}_v$, $q = q_1\vec{r}_u + q_2\vec{r}_v$ etc.

Teorema este demonstrată.

DEFINIȚIA 3.8. Fie S o suprafață de clasă C^2, orientabilă. Pentru orice punct $a \in S$ considerăm aplicația biliniară (simetrică conform teoremei 3.4)

$$\varphi_a^{(2)} : T_aS \times T_aS \to \mathbb{R},\ (\vec{p}, \vec{q}) \to -f(\vec{p}) \cdot \vec{q}.$$

Familia de aplicații $\varphi^{(2)} = \{\varphi_a^{(2)}\}_{a \in S}$ se numeşte **a doua formă fundamentală** a lui S.

Funcțiile $L = -\vec{r}_u \cdot \vec{n}_u$, $M = -\vec{r}_u \cdot \vec{n}_v = -\vec{r}_v \cdot \vec{n}_u$, $N = -\vec{r}_v \cdot \vec{n}_v$ se numesc **coeficienții celei de a doua forme fundamentale a lui S**. Se observă că

$$-\mathrm{d}\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{n} = -(\vec{r}_u \mathrm{d}u + \vec{r}_v \mathrm{d}v) \cdot (\vec{n}_u \mathrm{d}u + \vec{n}_v \mathrm{d}v) = L\, du^2 + 2M\, du dv + N\, dv^2$$

(formă pătratică în du, dv).

Deoarece $\vec{r}_u \perp \vec{n}$, $\vec{r}_v \perp \vec{n}$, rezultă

$$0 = (\vec{r}_u \cdot \vec{n})_u = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n} + \vec{r}_u \cdot \vec{n}_u,$$
$$0 = (\vec{r}_u \cdot \vec{n})_v = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n} + \vec{r}_u \cdot \vec{n}_v,$$
$$0 = (\vec{r}_v \cdot \vec{n})_u = \vec{r}_{vu} \cdot \vec{n} + \vec{r}_v \cdot \vec{n}_u,$$
$$0 = (\vec{r}_v \cdot \vec{n})_v = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{n} + \vec{r}_v \cdot \vec{n}_v,$$

de unde

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n},\ M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n},\ N = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{n}.$$

Remarcăm că $(\forall)\ a \in S$, matricea lui $\varphi_a^{(1)}$, respectiv $\varphi_a^{(2)}$, relativ la baza $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v\}$ a lui T_aS, este $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ şi respectiv $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$.

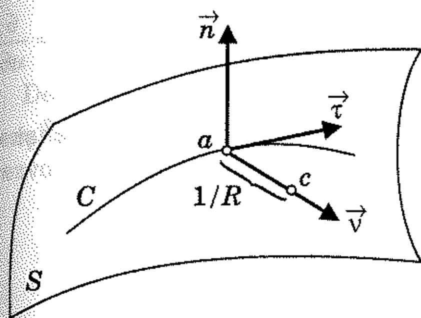


Figura IV.28.

Fie $S : \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ o suprafaţă de clasă C^2 şi $a \in S$ un punct fixat.

Considerăm o curbă $C : v = v(u)$ situată pe S şi trecînd prin a, ν versorul normalei principale la C în a şi $\vec{ac} = \frac{1}{R}\vec{\nu}$ vectorul de curbură (figura IV.28).

Se numeşte **curbura normală** la C în punctul a, produsul scalar $k = \vec{n} \cdot \vec{ac}$. Aşadar,

$$k = \vec{n} \cdot \frac{1}{R}\vec{\nu} = \vec{n} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = -\frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \vec{\tau}$$

(am aplicat formula I–a a lui Frenet şi faptul că $\vec{n} \cdot \vec{\tau} = 0$). Dar $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$, deci

$$k = \frac{-d\vec{n} \cdot d\vec{r}}{ds} = \frac{L + 2Mv'(u) + Nv'(u)^2}{E + 2Fv'(u) + Gv'(u)^2}.$$

Deoarece E, F, G, L, M, N depind doar de suprafaţa S, rezultă că numărul k este acelaşi pentru toate curbele care: trec prin a, sînt situate pe S şi au aceeaşi tangentă în a.

Să notăm $v'(u) = m$ deci $k = \frac{L + 2Mm + Nm^2}{E + 2Fm + Gm^2}$. Valorile extreme ale lui k se numesc **curburi principale** ale lui S în punctul a (presupus fixat). Punînd condiţia $k'(m) = 0$, rezultă imediat că aceste curburi principale verifică ecuaţia

$$\begin{vmatrix} Ek - L & Fk - M \\ Fk - M & Gk - N \end{vmatrix} = 0,$$

adică $(EG - F^2)k^2 + (2MF - EN - GL)k + LN - M^2 = 0$. Notînd cu k_1, k_2 soluţiile acestei ecuaţii, numărul $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ se numeşte **curbura medie** a lui S în a, iar $K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$ se numeşte **curbura Gauss** (totală) a lui S în a.

Curbele (C) situate pe S, în lungul cărora curbura normală este nulă (adică $L + 2Mv'(u) + Nv'(u)^2 = 0$ sau $L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0$), se numesc **linii asimptotice** pe S; în lungul lor, avem $\vec{\nu} \perp \vec{n}$ deci planul osculator determinat de τ, ν coincide cu planul tangent la suprafaţă. Curbele (C) situate

pe S în lungul cărora curbura normală este principală (deci extremă) se numesc **linii de curbură**; din condiţia $k'(m) = 0$ rezultă

$$(2M + 2Nm)(E + 2Fm + Gm^2) - (2F + 2Gm)(L + 2Mm + Nm^2) = 0$$

şi scriind $m = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$, un calcul imediat conduce la

$$\begin{vmatrix} E\mathrm{d}u + F\mathrm{d}v & F\mathrm{d}u + G\mathrm{d}v \\ L\mathrm{d}u + M\mathrm{d}v & M\mathrm{d}u + N\mathrm{d}v \end{vmatrix} = 0,$$

numită **ecuaţia liniilor de curbură ale suprafeţei** S.

EXEMPLU. Fie $S : \vec{r} = u\cos v\,\vec{e}_1 + u\sin v\,\vec{e}_2 + u\,\vec{e}_3$. În acest caz $\vec{r}_u = \cos v\,\vec{e}_1 + \sin v\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{r}_v = -u\sin v\,\vec{e}_1 + u\cos v\,\vec{e}_2$ deci $E = 2, F = 0, G = u^2$ şi

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos v\,\vec{e}_1 + \sin v\,\vec{e}_2 - \vec{e}_3).$$

Apoi $\vec{r}_{uu} = \vec{0}$, $\vec{r}_{uv} = -\sin v\,\vec{e}_1 + \cos v\,\vec{e}_2$, $\vec{r}_{vv} = -u\cos v\,\vec{e}_1 - u\sin v\,\vec{e}_2$, deci

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n} = 0,\ M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n} = 0,$$

$$N = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{n} = -\frac{u}{\sqrt{2}}.$$

Liniile asimptotice ale lui S verifică relaţia

$$L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2 = 0,$$

adică $\mathrm{d}v^2 = 0$ deci $v = \text{constant}$. Iar liniile de curbură verifică ecuaţia $\mathrm{d}u \cdot \mathrm{d}v = 0$ de unde $u = C_1$, $v = C_2$ (constante).

OBSERVAŢIE. Se poate arăta că notînd cu λ_1, λ_2 valorile proprii ale operatorului fundamental $\gamma'(a)$, numerele reale $k_1 = -\lambda_1$, $k_2 = -\lambda_2$ sînt tocmai curburile principale ale lui S în punctul a, iar vectorii proprii sînt tangenţi liniilor de curbură (în a).

Curburile principale şi curbura Gauss permit clasificarea punctelor suprafeţelor. Punctul $a \in S$ se numeşte **eliptic** (respectiv **hiperbolic**) dacă curbura Gauss a lui S în a satisface condiţia $K > 0$ (respectiv $K < 0$). Se poate arăta că în vecinătatea unui punct eliptic suprafaţa se află de aceeaşi parte a planului tangent; într-un punct hiperbolic, planul tangent "traversează" suprafaţa. În cazul cînd $K = 0$ punctul se numeşte **parabolic**. Dacă $k_1 = k_2$ (nenule), a se zice **ombilic**, iar dacă $k_1 = k_2 = 0$, a se zice **planar**. Se poate arăta că o suprafaţă conexă cu toate punctele ombilice (respectiv planare) este o porţiune de sferă (respectiv de plan).

3.5. Ecuaţiile de mişcare a reperului natural al unei suprafeţe

Considerăm o suprafaţă simplă S în $\mathbb{R}^3$; $r : U \to S$, $r = r(u, v)$ o parametrizare (r fiind un homeomorfism de clasă C^2), S fiind orientată prin versorul normală $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$ în punctul $(u,v) \in U$. Pentru orice punct $(u, v) \in U$, se poate considera reperul mobil $\{a; \vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n}\}$ în $\mathbb{R}^3$, unde $a = r(u, v)$ parcurge S; acesta este numit **reperul natural al suprafeţei** S.

În analogie cu cazul curbelor unde am stabilit formulele de derivare a versorilor reperului Frenet în raport cu parametrul t (deci am calculat vitezele de variație a acelor versori), vom stabili acum formule pentru derivatele parțiale ale vectorilor reperului natural al unei suprafețe ca mai sus, în raport cu parametrii u, v.

Introducem următoarele convenții de notație:

$$\frac{\partial}{\partial u}=\partial_1;\ \frac{\partial}{\partial v}=\partial_2;\ \frac{\partial^2}{\partial u^2}=\partial_{11},\ \frac{\partial^2}{\partial u\partial v}=\partial_{12};\ \frac{\partial^2}{\partial v\partial u}=\partial_{21};\ \frac{\partial^2}{\partial v^2}=\partial_{22}\ (\text{deci } \partial_{12}=\partial_{21}).$$

Deoarece $\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n}$ sînt vectori liniar independenți pentru orice $(u, v) \in U$, rezultă că ei formează o bază a lui $\mathscr{V}_3$. Atunci pentru orice $1 \le i, j \le 2$ avem dezvoltări de forma

$$(1)\qquad \partial_{ij}\vec{r} = \sum_{k=1}^{2}\Gamma_{ij}^{k}\partial_k\vec{r} + \alpha_{ij}\vec{n}$$

$$(2)\qquad \partial_i\vec{n} = \sum_{k=1}^{2} a_i^k \cdot \partial_k\vec{r} + \beta_i\vec{n},$$

unde Γ_{ij}^k, α_{ij}, a_i^k, β_i sînt funcții de u, v cu valori scalare. Ne propunem să arătăm că toți acești coeficienți se pot exprima cu ajutorul coeficienților E, F, G, L, M, N ai celor două forme fundamentale ale suprafeței S.

Înmulțind scalar relația (2) cu $\vec{n}$, rezultă $\beta_i = \vec{n}\cdot\partial_i\vec{n}$. Dar $\vec{n}\cdot\vec{n}=1$ și derivînd această relație în raport cu u, v obținem $\vec{n}\cdot\partial_i\vec{n}=0$ deci $\beta_i = 0$ pentru $i = 1$ și $i = 2$.

Notăm acum $g_{ij} = \partial_i\vec{r}\cdot\partial_j\vec{r}$ deci

$$g_{11} = \vec{r}_u\cdot\vec{r}_u = E,\ g_{12} = g_{21} = \vec{r}_u\cdot r_v = F,\ g_{22} = \vec{r}_v\cdot\vec{r}_v = G.$$

De asemenea notăm $h_{ij} = -\partial_i\vec{r}\cdot\partial_j\vec{n}$. Din relațiile $\vec{n}\cdot\partial_i\vec{r}=0$, $\vec{n}\cdot\partial_j\vec{r}=0$ rezultă prin derivare $\partial_j\vec{n}\cdot\partial_i\vec{r}+\vec{n}\cdot\partial_{ij}\vec{r}=0$ și respectiv $\partial_i\vec{n}\cdot\partial_j\vec{r}+\vec{n}\cdot\partial_{ij}\vec{r}=0$, de unde $\partial_i\vec{r}\cdot\partial_j\vec{n}=\partial_j\vec{r}\cdot\partial_i\vec{n}=-\vec{n}\cdot\partial_{ij}\vec{r}$. Așadar, $h_{ij}=\vec{n}\cdot\partial_{ij}\vec{r}$. Elementele h_{ij} se pot exprima cu ajutorul lui L, M, N. Anume

$$h_{11} = -\vec{r}_u\cdot\frac{\partial\vec{n}}{\partial u} = L,\ h_{12} = -\vec{r}_u\cdot\frac{\partial\vec{n}}{\partial v} = -\vec{r}_v\cdot\frac{\partial\vec{n}}{\partial u} = M \text{ și } h_{22} = -\vec{r}_v\cdot\frac{\partial\vec{n}}{\partial v} = N.$$

Din relația (1), înmulțind scalar cu $\vec{n}$, rezultă

$$\partial_{ij}\vec{r}\cdot\vec{n} = \sum_{k=1}^{2}\Gamma_{ij}^{k}\underbrace{(\partial_k\vec{r}\cdot\vec{n})}_{0}+\alpha_{ij},$$ deci $\alpha_{ij}=h_{ij}$. Din (1), (2) se obțin relațiile

$$(3)\qquad \partial_{ij}\vec{r} = \sum_{k=1}^{2}\Gamma_{ij}^{k}\partial_k\vec{r} + h_{ij}\vec{n};$$

$$(4)\qquad \partial_i\vec{n} = \sum_{k=1}^{2} a_i^k\cdot\partial_k\vec{r}.$$

Mai departe, ne propunem să exprimăm coeficienții Γ_{ij}^k, h_{ij} și a_i^k în funcție numai de elementele g_{ij}.

Matricea $\mathscr{G}=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}=(g_{ij})_{1\le i,j\le 2}$ este nesingulară, deoarece

$$\det\mathscr{G}=EG-F^2=(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u)\cdot(\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v)-(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v)^2=\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|^2\neq 0.$$

Dacă $\mathscr{G}^{-1}=(g^{ij})_{1\le i,j\le 2}$ (cu indicii sus), din $\mathscr{G}\cdot\mathscr{G}^{-1}=I_2$, rezultă că

$$\sum_{k=1}^{2} g_{ik}g^{kj}=\delta_i^j.$$

Din (4) înmulțind scalar cu $\partial_j\vec{r}$, rezultă

$$\partial_i\vec{n}\cdot\partial_j\vec{r}=\sum_{k=1}^{2} a_i^k g_{kj} \text{ adică } h_{ij}=-\sum_{k=1}^{2} a_i^k g_{kj}.$$

Înmulțind cu g^{jl} și însumînd după j, rezultă

$$\sum_{j=1}^{2} h_{ij}g^{jl}=-\sum_{1\le k,j\le 2} a_i^k g_{kj}g^{jl}=-\sum_{k=1}^{2} a_i^k\delta_k^l=-a_i^l$$

și ca atare,

$$(5)\qquad a_i^k=-\sum_{j=1}^{2} h_{ij}g^{jk},\ 1\le i,k\le 2.$$

Pe de altă parte, din relația (3), înmulțind scalar cu $\partial_l\vec{r}$, rezultă

$$\partial_{ij}\vec{r}\cdot\partial_l\vec{r}=\sum_{k=1}^{2}\Gamma_{ij}^k\partial_k\vec{r}\cdot\partial_l\vec{r}=\sum_{k=1}^{2}\Gamma_{ij}^k g_{kl}.$$

Introducem notația

$$(6)\qquad \Gamma_{ij,l}=\sum_{k=1}^{2}\Gamma_{ij}^k g_{kl} \text{ deci } \Gamma_{ij,l}=\partial_{ij}\vec{r}\cdot\partial_l\vec{r}.$$

Înmulțind relația cu g^{lm} și însumînd după l, avem

$$\Gamma_{ij}^m=\sum_{l=1}^{2}\Gamma_{ij,l}g^{lm}.$$

Apoi din relația $\partial_i\vec{r}\cdot\partial_l\vec{r}=g_{il}$ derivată în raport cu variabila j, rezultă

$$\partial_{ij}\vec{r}\cdot\partial_l\vec{r}+\partial_i\vec{r}\cdot\partial_{lj}\vec{r}=\partial_j g_{il} \text{ și ca atare } \Gamma_{ij,l}+\Gamma_{lj,i}=\partial_j g_{il}.$$

Prin permutări circulare, avem $\Gamma_{jl,i}+\Gamma_{il,j}=\partial_l g_{ji}$ și $\Gamma_{li,j}+\Gamma_{ji,l}=\partial_i g_{lj}$, de unde $\Gamma_{ij,l}-\Gamma_{ji,l}+\Gamma_{lj,i}-\Gamma_{jl,i}-\Gamma_{il,j}-\Gamma_{li,j}=\partial_j g_{il}-\partial_l g_{ji}-\partial_i g_{lj}$.

Deoarece $\Gamma_{ij,l}=\Gamma_{ji,l}$ (conform (6)), se obține $-2\,\Gamma_{il,j}=\partial_j g_{il}-\partial_l g_{ji}-\partial_i g_{lj}$ și ca atare

$$\Gamma_{il,j}=\frac{1}{2}(\partial_i g_{lj}+\partial_l g_{ji}-\partial_j g_{il}).$$

În finalul acestor calcule, se obține

$$(7)\qquad \Gamma_{il}^k=\sum_{j=1}^{2}\Gamma_{il,j}g^{jk}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(\partial_i g_{lj}+\partial_l g_{ji}-\partial_j g_{il})g^{jk}.$$

Formulele (7) dau expresiile lui Γ_{il}^k în funcție de coeficienții primei forme fundamentale a suprafeței.

Am demonstrat astfel

TEOREMA 3.5. Fie $r : U \to S$, $r = r(u, v)$ o parametrizare de clasă C^2 a suprafeței S, orientată prin $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$.

$$(8) \qquad \partial_{ij}\vec{r} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k} \partial_k \vec{r} + h_{ij} n;$$

$$(8') \qquad \partial_i \vec{n} = -\sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} h_{ij} g^{jk} \partial_k \vec{r},$$

unde $(g_{ij})_{1 \le i, j \le 2} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, $(h_{ij})_{1 \le i, j \le 2} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ **și**

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{2} (\partial_i g_{jp} + \partial_j g_{pi} - \partial_p g_{ij}) \cdot g^{pk}.$$

Formulele (8) și (8′) se mai numesc **ecuațiile de mișcare a reperului natural al lui** S.

DEFINIȚIA 3.9. Un drum parametrizat $(I, \rho = \rho(t))$ situat pe S se numește **geodezică pe** S dacă $(\forall)\, t \in I$, vectorul–accelerație este ortogonal spațiului tangent, adică $\vec{\rho}''(t) \perp T_{\rho(t)}S$.

EXEMPLE. 1) O dreaptă $\rho(t) = a + t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$ ($\vec{v} \in \mathcal{V}_3 \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}^3$) este o geodezică pe orice suprafață pe care este situată, deoarece $\vec{\rho}''(t) = 0$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

2) Fie sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; "ecuatorul" $\rho(t) = (R \cos t, R \sin t, 0)$, $t \in (0, 2\pi)$ este o geodezică pe S, deoarece $\vec{\rho}''(t) = -\vec{\rho}(t) = -R\cos t\,\vec{e}_1 - R\sin t\,\vec{e}_2$, iar $\vec{\rho}(t)$ este ortogonal planului tangent $T_{\rho(t)}S$. Mai general, orice cerc mare al sferei este o geodezică.

3) Curba $\rho(t) = (\cos(at + b), \sin(at + b), at + b)$, $t \in \mathbb{R}$ este o geodezică pe cilindrul $x^2 + y^2 = 1$, deoarece $\vec{\rho}''(t) = -a^2 \cos(at + b)\vec{e}_1 - a^2 \sin(at + b)\vec{e}_2$ și acest vector este coliniar cu $\operatorname{grad}_{\rho(t)}(x^2 + y^2 - 1) = 2\cos(at + b)\vec{e}_1 + 2\sin(at + b)\vec{e}_2$, deci $\vec{\rho}''(t) \perp T_{\rho(t)}S$.

TEOREMA 3.6. Fie $(I, \rho = \rho(t))$ o geodezică pe suprafața S. Atunci:
a) viteza pe geodezică este constantă;
b) geodezica este nesingulară (dacă nu este redusă la un punct).

DEMONSTRAȚIE. a) Viteza în punctul $t \in I$ este $v(t) = \sqrt{\vec{\rho}'(t) \cdot \vec{\rho}'(t)}$ deci $v^2 = \vec{\rho}' \cdot \vec{\rho}'$. Dar $(\vec{\rho}' \cdot \vec{\rho}')' = 2\vec{\rho}'' \cdot \vec{\rho}' = 0$, ultima relație rezultînd din faptul că $(\forall)\, t \in I$, $\vec{\rho}''(t) \perp T_{\rho(t)}S$ și $\vec{\rho}'(t) \in T_{\rho(t)}S$. Așadar, $(v^2)' = 0$ deci $v^2 = $ constant.

b) Știm că $v = v_0$, constant. Dacă $v_0 \neq 0$, rezultă că drumul este nesingular (căci $\vec{\rho}'(t) \neq \vec{0}$ pentru orice $t \in I$). Dacă $v_0 = 0$, rezultă $\vec{\rho}'(t) = \vec{0}$, $(\forall)\, t \in I$ deci $\rho(t) = $ constant și suportul drumului ar fi un punct.

TEOREMA 3.7. Fie $(U, r = r(u_1, u_2))$ o parametrizare a suprafeței S și

$\rho_1 : \begin{cases} u_1 = u_1(t) \\ u_2 = u_2(t) \end{cases}, t \in I$ **un drum parametrizat de clasă C^2 situat în U.**

Drumul parametrizat $(I, \rho = r \circ \rho_1)$ **este o geodezică pe S dacă şi numai dacă**

$$(9) \qquad u_k''(t) + \sum_{1\le i,\, j\le 2} \Gamma_{ij}^k(u_1(t), u_2(t)) \cdot u_i'(t) \cdot u_j'(t) = 0,\ 1 \le k \le 2.$$

DEMONSTRAŢIE. Drumul $\rho(t) = r(\rho_1(t)) = r(u_1(t), u_2(t))$, $t \in I$ este o geodezică dacă şi numai dacă $\vec{\rho}''(t)$ este paralel cu normala $\vec{n}$ la suprafaţă în punctul $\rho(t)$. Dar

$$\vec{\rho}'(t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \cdot u_1'(t) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \cdot u_2'(t) = \sum_{i=1}^{2} \partial_i \vec{r} \cdot u_i'(t) \text{ şi}$$

$$\vec{\rho}''(t) = \sum_{i,j} (\partial_{ij}\vec{r}) u_i'(t) \cdot u_j'(t) + \sum_i \partial_i \vec{r} \cdot u_i''(t) = \sum_{i,j} \Big(\sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \partial_k \vec{r} + h_{ij}\vec{n}\Big) u_i' u_j' + \sum_i (\partial_i \vec{r}) u_i'' =$$

$$= \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k u_i' u_j' \partial_k \vec{r} + \sum_{i,j} h_{ij} u_i' u_j' \vec{n} + \sum_k u_k'' \partial_k \vec{r} = \sum_k \Big(u_k'' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k u_i' u_j'\Big) \partial_k \vec{r} + \sum_{i,j} h_{ij} u_i' u_j' \vec{n}.$$

Avem $\vec{\rho}''(t) \parallel \vec{n}(\rho(t)) \leftrightarrow u_k'' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k u_i' u_j' = 0$ pentru $k = 1, 2$.

Sistemul diferenţial (9) se numeşte **sistemul geodezicelor lui S**. Se poate arăta că pentru orice două puncte fixate A, B ale suprafeţei S, dintre toate arcele de curbă situate pe S şi trecînd prin A şi B, cea mai mică lungime o are arcul de geodezică trecînd prin A, B. Exemplele date după definiţia 3.9 confirmă acest rezultat.

În încheierea acestui paragraf, facem cîteva consideraţii de geometrie neeuclidiană. Pînă în secolul trecut se cunoştea şi se accepta ca atare doar geometria lui Euclid. N. LOBACEVSKI (1792–1856) şi J. BOLYAY (1802–1860) au avut îndrăzneala să construiască o geometrie care accepta toate axiomele geometriei euclidiene (de incidenţă, ordine, congruenţă şi continuitate), cu excepţia axiomei paralelelor, pe care au înlocuit-o astfel: "printr-un punct exterior unei drepte (D) se pot duce cel puţin două drepte care nu intersectează (D). La prima vedere aceasta contrazice intuiţia, dar o analiză mai atentă arată că, spre deosebire de celelalte axiome, aceasta se referă la drepte nemărginite, iar experimentul uman direct, limitat oricum la o porţiune mărginită de spaţiu, este deci imposibil. Aşadar, depăşind prejudecăţile, axioma lui Lobacevski are acelaşi drept de existenţă ca şi axioma lui Euclid a paralelelor. Experienţa noastră cotidiană ne-a sugerat că suprafaţa Pămîntului este un plan euclidian, dar îmbogăţirea acestei experienţe a impus modificări totale ale acestei reprezentări şi acum este dovedit că Universul nostru fizic nu este euclidian, ci doar local euclidian! Felix Klein (1849–1925) a construit un model al geometriei plane lobacevskiene (numită şi hiperbolică). Anume, ca spaţiu geometric S el a considerat un disc deschis de centru O şi rază 1, care este o suprafaţă pe care se poate defini o metrică riemanniană. Punctele lui S sînt punctele uzuale, dreptele lui S sînt coarde

$\overset{\frown}{AB}$ ale cercului (fără capetele A, B); apartenența se consideră în sens uzual (de exemplu $C \in AB$, iar $M \notin AB$). Punctele de pe frontiera discului se asimilează cu "punctele de la infinit" (figura IV.29). Se definește în mod corespunzător congruența a două segmente și se reformulează (și se îndeplinesc!) toate axiomele din geometria euclidiană, cu excepția axiomei paralelelor. Într-adevăr, prin punctul $M \notin AB$ se pot duce o infinitate de drepte (deci coarde) care nu intersectează coarda AB, două dintre acestea, anume MA, MB intersectînd-o "la infinit". Modelul anterior este necontradictoriu deoarece oricărui rezultat de geometrie lobacevskiană (adică dedus logic din axiomele respective) îi corespunde un rezultat de geometrie euclidiană pentru punctele din interiorul discului D.

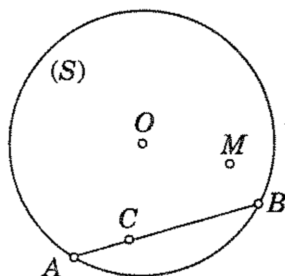


Figura IV.29.

Riemann a construit și o geometrie plană numită eliptică, în care ca spațiu S se consideră suprafața unei sfere, punctele sînt cele uzuale și dreptele sînt cercuri mari ale sferei (cercuri ale căror plane trec prin centrul sferei). Arcele de cercuri mari sînt tocmai geodezicele sferei. Deoarece orice două drepte (cercuri mari) se intersectează, nu există paralele și ca atare, printr-un punct exterior unei drepte nu se poate duce nici o paralelă la aceasta. Alături de geometria euclidiană (în care curbura Gauss totală K este nulă în fiecare punct) se pot dezvolta o geometrie lobacevskiană, modelul anterior lui Klein corespunzînd geometriei unei suprafețe cu $K < 0$, precum și o geometrie eliptică ($K > 0$), toate avînd o deplină motivație logică.

Descoperirea geometriei neeuclidiene a avut implicații serioase în matematică, în fizică, în cosmogonie dar și în filozofie, arătîndu-ne că nu putem absolutiza reprezentările noastre asupra spațiului.

§ 4. Varietăți diferențiabile

Generalizarea noțiunilor de curbă și suprafață s-a impus din rațiuni matematice puternice și a condus la conceptul de varietate. Actualmente acest concept este utilizat de fizicieni și chiar de ingineri, deoarece el apare firesc în unele descrieri fundamentale ale realității fizice.

EXEMPLU. Să considerăm un circuit RL în care curenții (i_R, i_L) și tensiunile (v_R, v_L) sînt legate prin relații de forma $i_R = i_L$, $v_L = 2v_R$ și $v_R = f(i_R)$ cu f funcție derivabilă. Circuitului i se poate asocia mulțimea $M \subset \mathbb{R}^4$, $M = \{(i_R, i_L, v_R, v_L) \mid i_R = i_L, v_L = 2v_R, v_R = f(i_R)\}$ sau cu notații schimbate, $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = x_2, x_4 = 2x_3, x_3 = f(x_1)\}$. Se observă că $M = \{(x_1, x_1, f(x_1), 2x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ și că aplicația $\varphi : M \to (0, +\infty)$, $(x_1, x_1, f(x_1), 2x_1) \to x_1$ este bijectivă; astfel x_1 apare ca o coordonată pe M, în

sensul că pentru a determina un punct al lui M este suficient de cunoscut valoarea lui x_1 corespunzător.

Se pot însă concepe mulțimi mai generale de tipul lui M și aplicații φ bijective care asociază elementelor lui M seturi de numere reale (coordonate).

4.1. Noțiunea de varietate (diferențiabilă)

Reamintim că dacă X este o mulțime nevidă, o topologie pe X este o familie $\mathcal{T}$ de submulțimi ale lui X astfel încît $\varnothing$, X aparțin la $\mathcal{T}$ și $\mathcal{T}$ este închisă relativ la reuniuni oarecare și la intersecții finite; perechea $(X, \mathcal{T})$ se numește **spațiu topologic**, iar mulțimile din $\mathcal{T}$ se numesc **deschise** (sau **deschiși**).

Un spațiu topologic X (topologia nu se mai menționează) se numește **separat** (sau Haussdorf) dacă pentru orice $x \neq y$ din X există deschiși U, V astfel încît $x \in U$, $y \in V$ și $U \cap V = \varnothing$. Dacă X, Y sînt două spații topologice, atunci o aplicație $\varphi : X \to Y$ se numește **continuă** dacă pentru orice deschis V al lui Y, $\varphi^{-1}(V)$ este deschis în X. Dacă φ este bijectivă și φ, φ^{-1} sînt continue, se spune că φ este un **homeomorfism.**

DEFINIȚIA 4.1. Fie M un spațiu topologic separat. Se numește **hartă** n–dimensională (sau **sistem local de coordonate**) pe M orice aplicație $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ definită pe un deschis $U \subset M$ astfel încît $\varphi(U)$ să fie deschis și aplicația $\varphi : U \to \varphi(U)$ să fie homeomorfism. O astfel de hartă se mai notează pe scurt (U, φ).

EXEMPLU. Dacă S este o suprafață în $\mathbb{R}^3$ și dacă (U, r) este o parametrizare a lui S, atunci perechea $(r(U), r^{-1})$ este o hartă 2–dimensională pe S.

Două hărți n–dimensionale (U, φ), (V, ψ) pe M se numesc **compatibile** dacă aplicațiile $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$; $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ sînt difeomorfisme de clasă C^1 (între deschiși din $\mathbb{R}^n$). Dacă $U \cap V = \varnothing$,

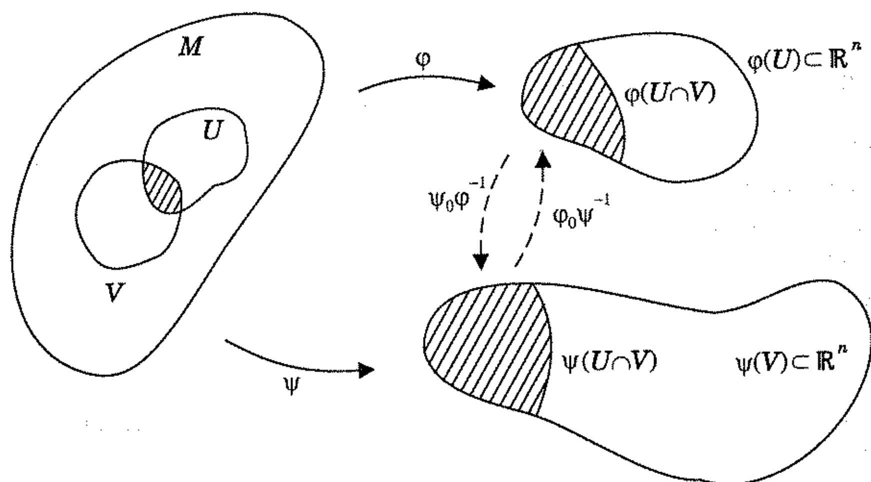


Figura IV.30.

convenim să considerăm hărţile respective compatibile (figura IV.30).

Fie (U, φ) o hartă (n–dimensională) pe M. Pentru orice $a \in U$, $\varphi(a)$ este un punct din $\mathbb{R}^n$ şi coordonatele sale $x^1(a), ..., x^n(a)$ se numesc **coordonatele locale** ale lui a (relativ la acea hartă). Să presupunem că (U, φ), (V, ψ) sînt două hărţi pe M astfel încît $U \cap V \neq \emptyset$. Dacă $a \in U \cap V$, atunci punctul a admite două rînduri de coordonate locale. Fie $\varphi(a) = (x^1(a), ..., x^n(a))$ şi $\psi(a) = (y^1(a), ..., y^n(a))$. Deoarece $\psi(a) = (\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(a))$, rezultă că $y^1, ..., y^n$ sînt funcţii de $x^1, ..., x^n$ deci $y^i = f^i(x^1, ..., x^n)$, $1 \leq i \leq n$. Dacă hărţile sînt compatibile, aceste funcţii sînt difeomorfisme (de clasă C^1)

$$\varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V), (x^1, ..., x^n) \to (y^1, ..., y^n).$$

DEFINIŢIA 4.2. Dacă M este un spaţiu topologic separat, se numeşte **atlas** (n–dimensional) pe M o familie (U_i, φ_i), $i \in I$ de hărţi pe M, compatibile două cîte două şi astfel încît $\bigcup_{i \in I} U_i = M$; presupunem în plus că orice hartă pe M care este compatibilă cu toate hărţile (U_i, φ_i), $i \in I$, aparţine atlasului.

Spaţiul M se numeşte **varietate diferenţială** (**n–dimensională** şi de clasă C^1) dacă este fixat un atlas (n–dimensional) pe M (Se definesc în mod analog varietăţi de clasă C^k, C^∞).

EXEMPLE. 1) Fie $M = \mathbb{R}^n$ cu topologia de spaţiu metric. Alegem harta $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})$ la care adăugăm hărţile compatibile cu ea. Se obţine o structură de varietate diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^n$.

2) Dacă M este o varietate (diferenţiabilă) şi $V \subset M$ un deschis, atunci V este o varietate diferenţiabilă; într-adevăr dacă (U_i, φ_i), $i \in I$ este un atlas pe M, atunci $(U_i \cap V, \varphi_i|_{U_i \cap V})$, $i \in I$ este un atlas pe V.

3) Arătăm că orice suprafaţă $S \subset \mathbb{R}^3$ este o varietate 2–dimensională.

Într-adevăr, orice punct $a \in S$ aparţine unei hărţi pe S şi orice două hărţi pe S sînt compatibile.

În mod similar, orice curbă este o varietate 1–dimensională.

DEFINIŢIA 4.3. Dacă M este o varietate, o funcţie $f: M \to \mathbb{R}$ se numeşte **netedă** pe M dacă este continuă şi pentru orice hartă (U, φ) pe M, funcţia $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este de clasă C^1.

Aceasta este echivalent cu faptul că $(\forall) x \in M$, există o hartă (V, ψ) pe M astfel încît $x \in V$ şi $f \circ \psi^{-1}$ este C^1 în punctul $\psi(x)$. Se verifică imediat că mulţimea tuturor funcţiilor netede pe M este un inel comutativ, relativ la sumă şi produs, notat $C^1(M)$; uneori trebuie considerate inelele de funcţii de clasă $C^2(M)$ sau chiar $C^\infty(M)$.

Dacă M_1, M_2, sînt două varietăţi, o aplicaţie continuă $F: M_1 \to M_2$ se numeşte **netedă** dacă pentru orice hărţi (U, φ) pe M_1 şi (V, ψ) pe M_2, aplicaţia $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(V)$ este de clasă C^1. (Dacă $U \cap F^{-1}(V) = \emptyset$ această condiţie se consideră automat îndeplinită). Se arată uşor că netezimea lui F este echivalentă cu faptul că $(\forall) x \in M_1$, există hărţi (U, φ) pe M_1, (V, ψ) pe M_2

astfel încît $x \in U$, $F(x) \in V$ şi $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ să fie de clasă C^1 în punctul $\varphi(x)$.

O aplicaţie $F : M_1 \to M_2$ se zice un **difeomorfism** dacă este un homeomorfism şi F, F^{-1} sînt netede.

Se extinde fără dificultate noţiunea de vector tangent la o varietate $M \subset \mathbb{R}^N$ (cu $N \geq 1$ convenabil) într-un punct $a \in M$, în analogie cu definiţia 3.3. Mulţimea acestora se notează T_aM şi se numeşte **spaţiul tangent la** M **în** a.

Dacă $F : M_1 \to M_2$ este o aplicaţie netedă, atunci se defineşte natural aplicaţia tangentă $F'(a) : T_aM_1 \to T_{F(a)}M_2$, $\forall\, a \in M_1$.

Dacă F este un difeomorfism, atunci $F'(a)$ este un izomorfism $\mathbb{R}$–liniar.

Dacă (U, φ) este o hartă pe M astfel încît $a \in U$, atunci există un izomorfism $\mathbb{R}$–liniar $T_aM = T_aU \xrightarrow{\theta_\varphi} T_{\varphi(a)}\mathbb{R}^n = \mathcal{V}_n(\varphi(a))$.

Baza spaţiului vectorial T_aM care corespunde, prin izomofismul θ_φ, bazei canonice $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$, se numeşte **baza mobilă** $\{\partial_{1a}, \ldots, \partial_{na}\}$; aşadar $\theta_\varphi(\partial_{ka}) = \vec{e}_k$, $1 \leq k \leq n$.

4.2. Cîmpuri de vectori pe o varietate

Fie M o varietate (n–dimensională) şi $U \subset M$ o submulţime deschisă.

Definiţia 4.4. Se numeşte **cîmp de vectori** pe U orice colecţie $v = \{v_x\}_{x \in U}$ de vectori tangenţi $v_x \in T_xM$, indexată după punctele lui U.

Aşadar, oricărui punct $x \in U$ i se asociază un vector tangent $v_x \in T_xM$.

Exemple. 1) **Cîmpul nul** pe U este colecţia $O = \{O_x\}_{x \in U}$ a vectorilor tangenţi nuli.

2) Dacă v, w sînt cîmpuri de vectori pe U şi $\lambda : U \to \mathbb{R}$ este o funcţie, atunci se definesc în mod natural cîmpurile $v + w$ şi λv pe U.

Dacă (V, ψ) este o hartă pe M, atunci în fiecare spaţiu tangent T_xM, $x \in V$ este definită baza mobilă $\partial_{1x}, \ldots, \partial_{nx}$. Pentru orice cîmp de vectori v pe V şi pentru orice $x \in V$ avem o scriere de forma $v_x = f^1(x)\partial_{1x} + \ldots + f^n(x)\partial_{nx}$.

Se mai scrie $v = f^1\partial_1 + \ldots + f^n\partial_n$ şi se mai spune că $f^1, \ldots, f^n$ sînt **componentele** lui v relativ la harta (V, ψ). Cîmpul v definit pe un deschis $U \subset M$ se numeşte **neted** dacă relativ la orice hartă (V, ψ) componentele lui v vor fi funcţii netede $U \cap V \to \mathbb{R}$ (în cazul cînd $U \cap V = \varnothing$ se consideră că această condiţie are loc automat).

Indicăm acum o construcţie foarte utilă. Dacă $D \subset \mathbb{R}^{2n}$ este un deschis şi $F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, $G(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ sînt două funcţii $F, G : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^1, atunci se poate defini **comutatorul** lor (sau **paranteza Poisson**) $H = [F, G]$ ca fiind funcţia $H : D \to \mathbb{R}$,

$$H(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial y_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial G}{\partial x_i}\right).$$

Dacă F = constantă, atunci evident $[F, G] = 0$ şi $[G, F] = 0$ pentru orice G.

Cu notații transparente, se verifică uşor următoarele proprietăți:
$[F, G] = -[G, F]$, $[F_1 + F_2, G]=[F_1, G] + [F_2, G]$, $[F_1F_2, G] = F_1[F_2, G] + F_2[F_1, G]$,
precum şi identitatea lui Jacobi:

$$[F_1, [F_2, F_3]] + [F_2, [F_3, F_1]] + [F_3, [F_1, F_2]] = 0.$$

EXEMPLU. Să presupunem că Σ este un sistem dinamic în care parametrii de stare $x_i(t)$; $y_i(t)$, $1 \le i \le n$ sînt funcții de clasă C^1 pe un interval I.

Presupunem că există o funcție $H(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ de clasă C^1 într-un deschis D din $\mathbb{R}^{2n}$ şi că $(\forall)\ t \in I$, $1 \le i \le n$, au loc relațiile:

$$(1) \qquad \dot{x}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

(uneori se scrie $\dot{u}(t)$ în loc de $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u'(t)$). Funcția H se numeşte **hamiltonianul** lui Σ. Dacă $F(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ este o altă funcție de clasă C^1, atunci derivata ei în raport cu t (ținînd cont că x_i şi y_i sînt funcții de t) este

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\dot{x}_i(t) + \frac{\partial F}{\partial y_i}\dot{y}_i(t)\right) \overset{cf(1)}{=} \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial H}{\partial x_i}\right) = [F, H].$$

În ipoteza că paranteza Poisson $[F,H]$ este nulă rezultă că funcția F este o constantă, deci relația $F(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) = k$ este o lege de conservare pentru sistemul Σ şi reciproc.

Din identitatea lui Jacobi rezultă că dacă $F_1(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) = k_1$ şi $F_2(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) = k_2$ sînt legi de conservare, atunci $[F_1, F_2] = k$ are aceeaşi proprietate; într-adevăr,

$$[[F_1, F_2], H] = -[F_2, [H, F_1]] - [F_1, [F_2, H]] = -[F_2, 0] - [F_1, 0] = 0.$$

Dacă v şi w sînt două cîmpuri netede pe un deschis $U \subset M$, $v = \sum_{i=1}^{n} f^i\partial_i$, $w = \sum_{i=1}^{n} g^i\partial_i$ (relativ la o hartă (V, ψ) pe M), atunci **comutatorul** (sau **paranteza Poisson**) a lui v, w este cîmpul $[v, w]$ pe $V \cap U$ definit prin $[v, w] = \sum_{i=1}^{n} h^i\partial_i$, unde $h^i = \sum_{j=1}^{n}(f^j\partial_j g^i - g^j\partial_j f^i)$.

De exemplu $[\partial_i, \partial_j] = 0$ pentru orice $1 \le i, j \le n$. Se verifică uşor că $[v, w] = -[w, v]$, $[v, v] = 0$, $[\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w] = \lambda_1[v_1, w] + \lambda_2[v_2, w]$ etc. De asemenea pentru orice cîmp neted v într-o hartă (V, ψ) şi pentru orice funcție netedă $f : V \to \mathbb{R}$ se poate defini funcția $D_v f : V \to \mathbb{R}$, unde $D_v f(x)$ = derivata lui f după direcția vectorului v_x şi se poate arăta că operatorul D_v satisface proprietățile:

$$D_v \circ D_w - D_w \circ D_v = D_{[v,w]};\ [fv, w] = f[v, w] - (D_w f)v \text{ şi } [v, fw] = f[v, w] + (D_v f)w.$$

Menționăm că se pot stabili şi în cazul varietăților n–dimensionale ecuațiile de mişcare a reperului mobil, utilizate în fizica modernă. Cîmpurile de vectori vor fi reluate şi studiate în capitolul 5, consacrat ecuațiilor diferențiale şi sistemelor dinamice.

§ 5. Elemente de calcul tensorial

Am studiat pînă acum vectorii în diversele lor ipostaze – vectori în plan, în spațiu, multidimensionali, vectori tangenți la curbe, suprafețe sau varietăți, cîmpuri de vectori etc. Introducem acum o nouă entitate fizico-matematică, anume tensorii. Pentru a localiza puțin acest concept, menționăm că scalarii sînt tensori de ordin zero, iar vectorii sînt tensori de ordinul 1. Pentru început ne restrîngem la cazul tensorilor de ordin 2, în spațiul tridimensional.

5.1. Tensori de ordin 2 în spațiu

Dacă $\vec{u} \in \mathscr{V}_3$ este un versor dat, atunci se poate considera aplicația $\mathbb{R}$–liniară $\varphi_{\vec{u}} : \mathscr{V}_3 \to \mathscr{V}_3$, $\vec{v} \to (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}$ = proiecția lui $\vec{v}$ pe $\vec{u}$.

Scalarul $\vec{v} \cdot \vec{u}$ se numește **componenta fizică** a lui $\vec{v}$ în direcția lui $\vec{u}$.

Dacă $\vec{u}, \vec{v} \in \mathscr{V}_3$ sînt vectori fixați, atunci se poate defini aplicația $\mathbb{R}$–liniară

$$\psi_{\vec{u},\vec{v}} : \mathscr{V}_3 \to \mathscr{V}_3, \ \ \vec{w} \to \vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{w}).$$

Așadar, apar în mod firesc diverși operatori liniari ai spațiului $\mathscr{V}_3$.

DEFINIȚIA 5.1. Se numește **tensor de ordinul 2 în spațiu,** orice operator liniar $T : \mathscr{V}_3 \to \mathscr{V}_3$. Mulțimea acestora este $L(\mathscr{V}_3)$.

Tensorul **nul** este $0 : \mathscr{V}_3 \to \mathscr{V}_3$, $\vec{v} \to \vec{0}$. Tensorul **identic** este $1 : \mathscr{V}_3 \to \mathscr{V}_3$, $\vec{v} \to \vec{v}$. Doi tensori T, T' se consideră **egali** dacă $T(v) = T'(v)$ pentru orice $\vec{v} \in \mathscr{V}_3$. **Adjunctul** (sau **transpusul**) lui T este tensorul T^*, avînd proprietatea definitorie că $\vec{u} \cdot T(\vec{v}) = T^*(\vec{u}) \cdot \vec{v}$, $(\forall)\ \vec{u}, \vec{v} \in \mathscr{V}_3$. Un tensor este **simetric** (respectiv **antisimetric**) dacă $T = T^*$ (respectiv $T = -T^*$).

Exemple de tensori.

1) $\varphi_{\vec{u}}$ și $\psi_{\vec{u},\vec{v}}$ definiți anterior sînt tensori de ordinul 2.

2) Din legătura dintre operatori liniari și matrice, rezultă că orice tensor are o matrice asociată relativ la o bază ortonormală fixată $\mathscr{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ a lui $\mathscr{V}_3$ și reciproc. Dacă $M_T = (t_{ij})_{1 \le i, j \le 3}$ este matricea unui tensor T relativ la $\mathscr{B}$, atunci

$$T(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{3} t_{ij}\vec{e}_i, \ 1 \le j \le 3.$$

Evident, tensorul T este simetric sau antisimetric după cum matricea M_T are această proprietate. Valorile și vectorii proprii ai lui M_T se consideră atașați tensorului T. Vectorii proprii determină **direcțiile principale** ale tensorului. Spațiul vectorial $L(\mathscr{V}_3)$ al tensorilor de ordinul 2 are dimensiunea 9 și admite baza $(T_{ij})_{1 \le i, j \le 3}$, formată din tensorii $T_{ij} = \psi_{\vec{e}_i, \vec{e}_j}$ deci $T_{ij}(\vec{w}) = \vec{e}_i(\vec{e}_j \cdot \vec{w})$.

[Într-adevăr, pentru orice tensor $T \in L(\mathscr{V}_3)$ avem o scriere unică $T = \sum_{i,j} t_{ij} T_{ij}$, deoarece cei doi membri coincid pe vectorii din

$$\mathscr{B} : (\sum_{i,j} t_{ij} T_{ij})(\vec{e}_k) = \sum_{i,j} t_{ij} T_{ij}(\vec{e}_k) = \sum_{i,j} t_{ij} \vec{e}_i (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) = \sum_{i,j} t_{ij} \vec{e}_i \delta_{jk} = \sum_i t_{ik} \vec{e}_i = T(\vec{e}_k),$$

pentru $1 \le k \le 3$].

3) Fie P un punct fixat, ρ şi $\vec{v}$ respectiv densitatea şi viteza unui fluid în P. Se poate atunci defini **tensorul–flux** al fluidului în P, anume $\rho\psi_{\vec{v},\vec{v}} : \mathscr{V}_3(P) \to \mathscr{V}_3(P)$, care asociază oricărui vector $\vec{p} \in \mathscr{V}_3(P)$, aplicat în P, vectorul $\rho\psi_{\vec{v},\vec{v}}(\vec{p}) = \rho\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{p})$.

4) Fie un punct P al unui corp material. Pentru orice vector $\vec{v} \in \mathscr{V}_3(P)$ considerăm un element de arie plană A normală în P la $\vec{v}$ şi notăm cu $A\vec{t}$ forța pe care materialul o exercită asupra lui A. Se admite că aplicația $T : \mathscr{V}_3(P) \to \mathscr{V}_3(P)$, $\vec{v} \to \vec{t}$ este liniară deci determină un tensor, numit **tensorul tensiunilor** în P (figura IV.31).

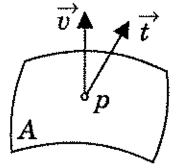


Figura IV.31.

5.2. Componentele vectorilor şi tensorilor

Legile sînt formulate independent de alegerea unor sisteme de coordonate (sau repere). Se ştie că nu întotdeauna coordonatele carteziene sînt cele mai bune şi rezolvarea unor ecuații poate fi mult uşurată de alegerea unor coordonate convenabile, care să țină cont de context, de diversele simetrii etc. (astfel, în probleme cu simetrie centrală se recomandă trecerea la coordonate polare în plan sau sferice în spațiu; iar în probleme cu simetrie axială, se recomandă coordonatele cilindrice).

Ca şi vectorii, tensorii sînt mărimi invariante, nemodificate de o schimbare a reperului. Un vector–viteză din $\mathscr{V}_3$, privit ca entitate fizică, nu depinde de reperul ales, iar un tensor este un operator liniar al lui $\mathscr{V}_3$ şi atît. Doar componentele vectorului sau ale tensorului se modifică prin trecere de la o bază la alta a spațiului! Trecem la ilustrarea acestei idei.

Fie $\mathscr{B} = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ o bază oarecare (nu neapărat ortonormală) a lui $\mathscr{V}_3$.

Aşadar, vectorii $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ sînt necoplanari şi notăm cu $G = (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$, volumul (nenul) al paralelipipedului construit pe ei. Bazei $\mathscr{B}$ i se poate asocia baza vectorilor reciproci, $\mathscr{B}_r = \{\vec{g}^1, \vec{g}^2, \vec{g}^3\}$, avînd proprietatea definitorie că $\vec{g}^i \cdot \vec{g}_j = \delta_i^j$, pentru orice $1 \le i, j \le 3$; în mod necesar,

$$\vec{g}^1 = \frac{1}{G}(\vec{g}_2 \times \vec{g}_3), \ \vec{g}^2 = \frac{1}{G}(\vec{g}_3 \times \vec{g}_2), \ \vec{g}^3 = \frac{1}{G}(\vec{g}_1 \times \vec{g}_2).$$

Dacă $\mathscr{B}$ este ortonormală, atunci $G = 1$ şi $\vec{g}^i = \vec{g}_i$, $1 \le i \le 3$.

Definiția 5.2. Fie $\vec{v} \in \mathscr{V}_3$ un vector oarecare. Atunci el admite o scriere unică de forma $\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v^i \vec{g}_i$; scalarii v^1, v^2, v^3 se numesc **componentele–etaj**

(sau **contravariante**) ale lui $\vec{v}$ relativ la baza $\mathscr{B}$. De asemenea $\vec{v}$ admite o scriere unică de forma $\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{g}^i$ şi scalarii v_1, v_2, v_3 se numesc **componentele–subsol** (sau **covariante**) ale lui $\vec{v}$ relativ la $\mathscr{B}$. Dacă $\mathscr{B}$ este ortonormală, atunci cele două tipuri de componente coincid: $v_i = v^i$ pentru orice $1 \le i \le 3$.

Vom adopta convenția lui Einstein de a omite semnul "sigma" subînțelegînd că, atunci cînd un indice–etaj şi unul subsol se repetă, se face însumare după acel indice. Cu această convenție, relațiile de mai sus se scriu:

(1) $\vec{v} = v^i \vec{g}_i$;

(2) $\vec{v} = v_i \vec{g}^i$.

Din relația (2) înmulțită scalar cu $\vec{g}_j$, rezultă $\vec{v} \cdot \vec{g}_j = v_i \vec{g}^i \cdot \vec{g}_j = v_i \delta^i_j = v_j$, iar din (1) înmulțită cu $\vec{g}^j$, rezultă $\vec{v} \cdot \vec{g}^j = v^i \vec{g}_i \cdot \vec{g}^j = v^i \delta^j_i = v^j$. Aşadar,

(3) $v_i = \vec{v} \cdot \vec{g}_i$ şi $v^i = \vec{v} \cdot \vec{g}^i$, pentru orice $1 \le i \le 3$.

Aceste formule dau modul de calcul al componentelor–etaj şi subsol ale unui vector.

Dăm acum expresiile produsului scalar şi produsului vectorial a doi vectori $\vec{u}, \vec{v} \in \mathscr{V}_3$, folosind componentele–etaj şi respectiv subsol (relativ la $\mathscr{B}$). Avem $\vec{u} = u^i \vec{g}_i$, $\vec{v} = v_j \vec{g}^j$ deci $\vec{u} \cdot \vec{v} = u^i v_j \vec{g}_i \cdot \vec{g}^j$ (însumare după i,j) şi ca atare, $\vec{u} \cdot \vec{v} = u^i v_j \delta^j_i = u^i v_i$ (însumare după i). De asemenea, $\vec{u} = u_i \vec{g}^i$, $\vec{v} = v^j \vec{g}_j$ deci $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_i v^j \vec{g}^i \cdot \vec{g}_j = u_i v^j \delta^i_j = u_i v^i$. Reținem deci

(4) $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_i v^i = u^i v_i$.

Pe de altă parte, componentele–subsol ale produsului vectorial

$\vec{u} \times \vec{v}$ sînt $(\vec{u} \times \vec{v})_k \overset{cf.(3)}{=} (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{g}_k = (u^i \vec{g}_i \times v^j \vec{g}_j) \cdot \vec{g}_k = u^i v^j (\vec{g}_i \times \vec{g}_j) \vec{g}_k$

Se notează $\varepsilon_{ijk} = (\vec{g}_i \times \vec{g}_j) \cdot \vec{g}_k$ = produsul mixt $(\vec{g}_i, \vec{g}_j, \vec{g}_k)$. Atunci

$$(\vec{u} \times \vec{v})_k = \varepsilon_{ijk} u^i v^j,\ 1 \le k \le 3$$

(însumare după i şi j) şi $\vec{u} \times \vec{v} = (\vec{u} \times \vec{v})_k \cdot \vec{g}^k = \varepsilon_{ijk} u^i v^j \vec{g}^k$ (însumare după i, j, k).

Se arată de asemenea că $(\vec{u} \times \vec{v}) = \varepsilon^{ijk} u_i v_j \vec{g}_k$, unde

$$\varepsilon^{ijk} = (\vec{g}^i \times \vec{g}^j) \cdot \vec{g}^k = G^2 \varepsilon_{ijk}.$$

DEFINIȚIA 5.3. Fie $T : \mathscr{V}_3 \to \mathscr{V}_3$ un tensor de ordin 2. Atunci $T(\vec{g}_j) \in \mathscr{V}_3$ şi $T(\vec{g}_j) = \sum_{i=1}^{3} t_{ij} \vec{g}^i = t_{ij} \vec{g}^i$, scalarii t_{ij} numindu-se **componentele–subsol** (covariante) ale lui T relativ la baza $\mathscr{B}$. Evident, $T(\vec{g}_j) \cdot \vec{g}_p = t_{ij} \vec{g}^i \vec{g}_p = t_{ij} \delta^i_p = t_{pj}$ şi ca atare,schimbînd notațiile $t_{ij} = \vec{g}_i \cdot T(\vec{g}_j)$, $1 \le i, j \le 3$. În mod similar, $T(\vec{g}^j) \in \mathscr{V}_3$ şi avem scrierea $T(\vec{g}^j) = t^{ij} \vec{g}_i$, scalarii t^{ij} purtînd numele de **componentele–etaj** (contravariante) ale lui T. În acest caz, $t^{ij} = \vec{g}^i \cdot T(\vec{g}^j)$.

Se pot de asemenea defini două rînduri de **componente mixte** ale lui T (care coincid dacă T este simetric) și anume $t^i_{.j} = \vec{g}^i \cdot T(\vec{g}_j)$ și $t^{.i}_j = \vec{g}_j \cdot T(\vec{g}^i)$.

Dacă $\mathscr{B}' = \{\vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$ este o altă bază a lui $\mathscr{V}_3$ și $\mathscr{B}'_r = \{\vec{g}'^1, \vec{g}'^2, \vec{g}'^3\}$ este baza ei reciprocă, atunci se poate considera matricea $A = (a^i_j)_{1\le i,j\le 3}$ de trecere de la $\mathscr{B}$ la $\mathscr{B}'$. Aceasta este o matrice inversabilă și fie $B = (b^i_j)_{1\le i,j\le 3} = A^{-1}$, inversa ei. Au loc relațiile $a^i_j b^j_k = \delta^i_k$ și $a^p_q b^r_p = \delta^r_q$. Avem $\vec{g}'_i = a^j_i \vec{g}_j$; înmulțind cu b^i_k și însumînd după i, rezultă $b^i_k \vec{g}'_i = a^j_i b^i_k \vec{g}_j = \delta^i_k \vec{g}_j = \vec{g}_k$ adică, modificînd indicii, $\vec{g}_i = b^j_i \vec{g}'_j$, $1 \le i \le 3$. (Se remarcă faptul că indicii de covarianță se corespund pe direcția "\"). În mod similar, $\vec{g}'^i = b^i_j \vec{g}^j$ și $\vec{g}^i = a^i_j \vec{g}'^j$, $1 \le i \le 3$ (Indicii de contravarianță se corespund pe direcția "/").

Fie $\vec{v} \in \mathscr{V}_3$; conform (3) rezultă

$$v'_i = \vec{g}'_i \cdot \vec{v} = a^j_i \vec{g}_j \cdot \vec{v} = a^j_i v_j, \quad v'^i = \vec{g}'^i \cdot \vec{v} = b^i_j \vec{g}^j \cdot \vec{v} = b^i_j v^j.$$

Reținem formulele de legătură între componentele–etaj (și respectiv subsol) ale lui $\vec{v}$ relativ la bazele $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$:

(4) $\quad v'_i = a^j_i v_j$ (respectiv $v'^i = b^i_j v^j$), $1 \le i \le 3$.

În mod similar, pentru componentele–etaj ale unui tensor $T : \mathscr{V}_3 \to \mathscr{V}_3$ avem

$$t'_{ij} = \vec{g}'_i \cdot T(\vec{g}'_j) = a^p_i \vec{g}_p \cdot T(a^q_j \vec{g}_q) = a^p_i a^q_j \vec{g}_p \cdot T(\vec{g}_q) = a^p_i a^q_j t_{pq};$$

similar pentru componentele–subsol. Reținem formulele:

(5) $\quad t'_{ij} = a^p_i a^q_j t_{pq}$; $t'^{ij} = b^i_p b^j_q t^{pq}$ (însumare după p și q); $1 \le i, j \le 3$.

APLICAȚII

a) Fie $D = \mathbb{R}^2 \setminus$ semiaxa pozitivă Ox. Considerăm o particulă materială de masă m, aflată sub acțiunea unei forțe $\vec{F}$. Presupunem că la orice moment $t \in I$ particula este situată în punctul $M(x(t), y(t))$ din D. Notăm cu ρ și θ coordonatele polare ale lui M, presupuse funcții de clasă C^2 pe intervalul I.

Atunci $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$ și vectorul de poziție $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ al lui M va fi

(6) $\quad r = \rho\cos\theta\, \vec{e}_1 + \rho\sin\theta\, \vec{e}_2$.

Vectorul–viteză la momentul t la traiectoria punctului M va fi

(7) $\quad \vec{v} = \dfrac{d}{dt}\vec{r}(\rho, \theta) = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \cdot \dot{\rho} + \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \cdot \dot{\theta}$.

Notăm

$$\vec{g}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \overset{cf.(6)}{=} \cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2 \text{ și}$$

$$\vec{g}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \overset{cf.(6)}{=} -\rho\sin\theta\, \vec{e}_1 + \rho\cos\theta\, \vec{e}_2.$$

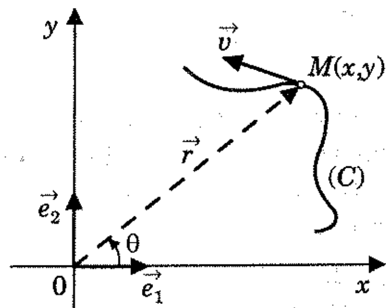


Figura IV.32.

Evident, $\mathscr{B} = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ formează o bază

(mobilă) a lui $\mathcal{V}_2$ (mai precis pentru $\mathcal{V}_2(M)$ cu $M \in D$); $\vec{g}_1$ este tangent la curba θ = constant, iar $\vec{g}_2$ la ρ = constant. Baza ei reciprocă este $\mathcal{B}_r = \{\vec{g}^1, \vec{g}^2\}$, unde $\vec{g}^1 = \vec{g}_1$, $\vec{g}^2 = \frac{1}{\rho^2}\vec{g}_2$ deci $\vec{g}_i \cdot \vec{g}^j = \delta_i^j$, $1 \le i, j \le 2$.

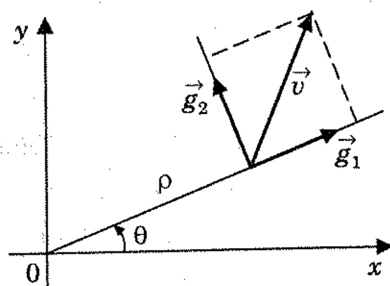


Figura IV.33.

Din (7) rezultă $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{g}_1 + \dot{\theta}\vec{g}_2 = \dot{\rho}\vec{g}^1 + \rho^2\dot{\theta}\vec{g}^2$ (deci componentele–etaj ale vitezei sînt $\dot{\rho}, \dot{\theta}$ numite **viteza radială** și **viteza unghiulară**; iar componentele–subsol sînt $\dot{\rho}$ și $\rho^2\dot{\theta}$).

Determinăm acum accelerația $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ a particulei. Așadar,

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\vec{g}_1 + \dot{\rho}\dot{\vec{g}}_1 + \ddot{\theta}\vec{g}_2 + \dot{\theta}\dot{\vec{g}}_2.$$

Dar

$$\dot{\vec{g}}_1 = \frac{d}{dt}(\cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2) = (-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2)\cdot\dot{\theta} = \frac{\dot{\theta}}{\rho}\vec{g}_2$$

și

$$\dot{\vec{g}}_2 = \frac{d}{dt}(-\rho\sin\theta\,\vec{e}_1 + \rho\cos\theta\,\vec{e}_2) = (-\dot{\rho}\sin\theta - \rho\cos\theta\cdot\dot{\theta})\vec{e}_1 +$$

$$+(\dot{\rho}\cos\theta - \rho\sin\theta\cdot\dot{\theta})\vec{e}_2 = -\rho\dot{\theta}\vec{g}_1 + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\vec{g}_2,$$

de unde $$\vec{a} = \ddot{\rho}\vec{g}_1 + \dot{\rho}\frac{\dot{\theta}}{\rho}\vec{g}_2 + \ddot{\theta}\vec{g}_2 + \dot{\theta}\left(-\rho\dot{\theta}\vec{g}_1 + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\vec{g}_2\right) = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{g}_1 + \left(\ddot{\theta} + \frac{2\dot{\rho}\dot{\theta}}{\rho}\right)\vec{g}_2.$$

Expresia $a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$ se numește **accelerația radială,** iar $a_\theta = \ddot{\theta} + \frac{2\dot{\rho}\dot{\theta}}{\rho}$ **accelerația tangențială** (ale particulei).

Mișcarea particulei în D este descrisă prin legea lui Newton $m\vec{a} = \vec{F}$. Să notăm cu F^1, F^2 componentele–etaj ale lui $\vec{F}$ relativ la baza $\mathcal{B}$, deci $\vec{F} = F^1\vec{g}_1 + F^2\vec{g}_2$. Ecuația $m\vec{a} = \vec{F}$ conduce la sistemul

$$(8)\qquad \begin{cases} m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right) = F^1 \\ m\left(\ddot{\theta} + \dfrac{2\dot{\rho}\dot{\theta}}{\rho}\right) = F^2 \end{cases}$$

Se cunosc legile lui J. Kepler (1571–1630), guvernînd mișcarea planetelor, legi deduse din observații astronomice:

I. Planetele descriu elipse în jurul Soarelui, acesta ocupînd unul din focare;

II. Raza vectoare $\overrightarrow{SP}$ descrie arii egale în timpuri egale;

III. Raportul dintre pătratul timpului de revoluție și cubul semiaxei mari este același pentru toate planetele (figura IV.34.).

Legea I afirmă că dacă $P(x, y)$, atunci $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, unde $a>b$ sînt semiaxele elipsei, iar Soarele are coordonatele $S(c, 0)$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Înlocuind $x=c+\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ rezultă $\rho=\frac{b^2}{a+c\cos\theta}$. Legea II arată că $\rho^2\dot{\theta}=c$, constant [într-un interval de timp dt raza vectoare mătură aria $\mathrm{d}A=\frac{1}{2}\rho^2\mathrm{d}\theta$ a unui sector de cerc de rază ρ şi unghi la centru $\mathrm{d}\theta$; în unitatea de timp aria respectivă este $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}=\frac{C}{2}$ deci $A(t)=\frac{C}{2}t+C_1$ şi pentru orice două momente de timp $t_1<t_2$, $A(t_2)-A(t_1)=\frac{C}{2}(t_2-t_1)$ şi acesta este sensul legii II; în particular, pentru $t_1=0$, $t_2=T$ rezultă $\pi ab=\frac{C}{2}T$, deci $C=\frac{2\pi ab}{T}$]. În fine legea III arată că durata T a unei rotații complete în jurul Soarelui satisface condiția $\frac{T^2}{a^3}=k$, constant.

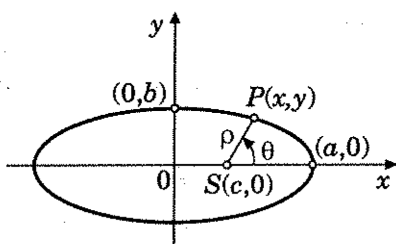


Figura IV.34.

Pornind de la legile lui Kepler, ne propunem să refacem modul cum I. Newton (1642–1727) a dedus din relațiile (8) legea atracției universale (de fapt el a parcurs şi drumul invers).

Mai întîi, din faptul că $\rho^2\dot{\theta}=C$, prin derivare în raport cu t, rezultă relația $2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}+\rho^2\ddot{\theta}=0$ deci $\ddot{\theta}+\frac{2\dot{\rho}}{\rho}\dot{\theta}=0$. Din formula secundă (8) deducem că $F^2=0$ deci $\vec{F}=F^1\vec{g}_1\overset{cf.(8)}{=}m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)\vec{g}_1$. Deoarece $\dot{\theta}=\frac{C}{\rho^2}$, avem

$$\dot{\rho}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\cdot\dot{\theta}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\frac{C}{\rho^2}=-C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right) \text{ şi}$$

$$\ddot{\rho}=\frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta}=\frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}\theta}\frac{C}{\rho^2}=\frac{C}{\rho^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[-C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]=-\frac{C^2}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Atunci $$\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2=-\frac{C^2}{\rho^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)-\rho\left(\frac{C}{\rho^2}\right)^2=-\frac{C^2}{\rho^2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\right]=$$

$$=-\frac{C^2}{\rho^2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\left(\frac{a+c\cos\theta}{b^2}\right)+\frac{a+c\cos\theta}{b^2}\right]=-\frac{aC^2}{b^2\rho^2}$$

şi ca atare,

$$(9) \qquad \vec{F}=-\frac{maC^2}{b^2\rho^2}\vec{g}_1.$$

În fine, deoarece $C = \dfrac{2\pi ab}{T}$ și $\dfrac{T^2}{a^3} = k$, avem

$$\frac{maC^2}{b^2\rho^2} = \frac{ma}{b^2\rho^2}\cdot\frac{4\pi^2a^2b^2}{T^2} = \frac{4\pi^2a^3m}{\rho^2T^2} = \frac{4\pi^2m}{k\rho^2}.$$

Introducînd constanta $f = \dfrac{4\pi^2}{kM}$, unde M este masa Soarelui (m fiind masa planetei), rezultă $\dfrac{maC^2}{b^2\rho^2} = f\dfrac{Mm}{\rho^2}$ și înlocuind în (9),

$$(10) \qquad \vec{F} = -f\frac{Mm}{\rho^2}\vec{g}_1.$$

Aceasta este forța de atracție pe care Soarele o exercită asupra planetei de masă m aflată la distanța $\rho = \|\overrightarrow{SP}\|$. Constanta f a fost determinată experimental de Cavendish; în sistemul MKS, $f = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\mathrm{m}^3/\mathrm{kg{\cdot}s}^2$. Fizica modernă arată că este necesară o teorie mai elaborată a gravitației, deoarece formula (10) conduce la unele rezultate care nu se verifică experimental. Nu intrăm în detalii.

b) Considerăm acum cazul unor coordonate oarecare în spațiu. Fie $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ baza canonică a lui $\mathscr{V}_3$ (asociată unui reper cartezian ortogonal $Ox^1x^2x^3$). Fie u^1, u^2, u^3 un alt sistem de coordonate deci $x^i = x^i(u^1, u^2, u^3)$, $1 \le i \le 3$ (presupuse funcții de clasă C^2 realizînd un difeomorfism $(u^1, u^2, u^3) \to (x^1, x^2, x^3)$ între deschiși din $\mathbb{R}^3$). Dacă $u^i = u^i(t)$, $1 \le i \le 3$, $t \in I$, atunci vectorul de poziție al punctului curent la momentul t va fi $\vec{r} = x^k\vec{e}_k$ (însumare după k), iar vectorul–viteză este $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u^i}\dot{u}^i$. Notăm $\vec{g}_i = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u^i}$ și convenim ca derivata parțială în raport cu o variabilă u^i să fie notată simbolic prin indicele i deci $\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u^i} = \vec{r}_{,i}$. Reținem:

$$(11) \qquad \vec{v} = \dot{u}^i\vec{g}_i \text{ unde } \vec{g}_i = \vec{r}_{,i} = x^k_{,i}\vec{e}_k.$$

Așadar, $\dot{u}^1, \dot{u}^2, \dot{u}^3$ sînt componentele–etaj ale lui $\vec{v}$ relativ la baza mobilă $\mathscr{B} = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ a lui $\mathscr{V}_3$. Să notăm cu $\mathscr{B}_r = \{\vec{g}^1, \vec{g}^2, \vec{g}^3\}$ baza reciprocă a lui $\mathscr{B}$ deci $\vec{g}_i \cdot \vec{g}^j = \delta_i^j$, $1 \le i, j \le 3$.

Ne propunem acum să calculăm vectorul–accelerație; conform (11)

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{u}^i\vec{g}_i + \dot{u}^i\dot{\vec{g}}_i, \text{ unde } \dot{\vec{g}}_i = \frac{\partial\vec{g}_i}{\partial u^j}\dot{u}^j = \dot{u}^j\vec{g}_{i,j}.$$

Dar vectorii $\vec{g}_{i,j}$ pot fi exprimat cu ajutorul bazei $\mathscr{B}$:

$$\vec{g}_{i,j} = \Gamma_{ij}^k\vec{g}_k.$$

Scalarii Γ_{ij}^k (care sînt funcții de u^1, u^2, u^3) se numesc **simbolii lui E. B. Christoffel** (1829–1900). Așadar,

$$(12) \qquad \Gamma_{ij}^k = \vec{g}^k \cdot \vec{g}_{i,j}.$$

Înlocuind mai sus rezultă $\vec{a} = \ddot{u}^k\vec{g}_k + \dot{u}^i\dot{u}^j\Gamma_{ij}^k\vec{g}_k = (\ddot{u}^k + \dot{u}^i\dot{u}^j\Gamma_{ij}^k)\vec{g}_k$. Notînd cu $a^k = \ddot{u}^k + \dot{u}^i\dot{u}^j\Gamma_{ij}^k$, $1 \le k \le 3$, componentele–etaj ale accelerației, rezultă $\vec{a} = a^k\vec{g}_k$ (însumare după k). În fine, dacă $\vec{F} = F^k\vec{g}_k$ este vectorul–forță, atunci ecuația lui Newton $m\vec{a} = \vec{F}$ se transformă în **sistemul ecuațiilor de mişcare**:

$$m(\ddot{u}^k + \Gamma_{ij}^k\dot{u}^i\dot{u}^j) = F^k,\ 1 \le k \le 3.$$

Comparînd cu rezultatul din teorema 3.7, se observă că dacă $\vec{F} = \vec{0}$, adică $F^k = 0$, $1 \le k \le 3$, atunci **mişcarea fără forțe are loc în lungul unor geodezice.**

5.3. Schimbări de coordonate şi cîmpuri de tensori

Fie x^1, x^2, x^3 coordonatele carteziene în $\mathbb{R}^3$ şi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ baza canonică a lui $\mathscr{V}_3$ asociată unui reper cartezian ortogonal $Ox^1x^2x^3$.

Vom considera şi alte sisteme de coordonate, presupunînd că schimbările de coordonate sînt difeomorfisme de clasă C^2 între deschişi din $\mathbb{R}^3$. Dacă u^1, u^2, u^3 este un alt sistem de coordonate şi dacă $x^i = x^i(u^1, u^2, u^3)$, $1 \le i \le 3$ sînt formulele de legătură cu coordonatele carteziene, atunci vectorul de poziție al punctului curent $M \in \mathbb{R}^3$ este

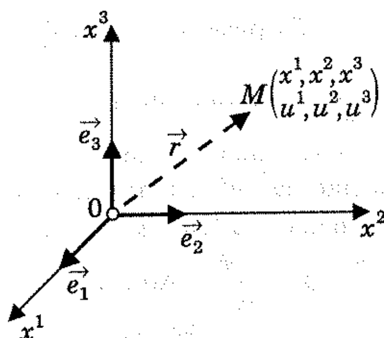


Figura IV.35.

$$\vec{r} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3 = x^k\vec{e}_k.$$

Notăm $\vec{g}_i = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u^i} = \vec{r}_{,i}$ pentru $1 \le i \le 3$ (vectori tangenți în punctul curent la curbele u^j = constant, $j \ne i$). Vectorii $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ formează o bază (mobilă) a lui $\mathscr{V}_3$. Ca atare, au loc scrieri de forma $\vec{g}_{i,j} = \Gamma_{ij}^k\vec{g}_k$ (însumare după k), unde $\vec{g}_{i,j} = \dfrac{\partial\vec{g}_i}{\partial u^j}$.

Funcțiile Γ_{ij}^k (u^1, u^2, u^3) sînt simbolii lui Christoffel.

DEFINIȚIA 5.4. Sistemul de coordonate $\{u^1,u^2,u^3\}$ se numeşte **ortogonal** dacă $\vec{g}_i \perp \vec{g}_j$ pentru orice $i \ne j$; în acest caz scalarii $R_i = \|\vec{g}_i\|$, $1 \le i \le 3$ se numesc **parametrii lui G. Lamé** (1795–1870) pentru sistemul respectiv de coordonate, iar $\left\{\dfrac{1}{R_1}\vec{g}_1, \dfrac{1}{R_2}\vec{g}_2, \dfrac{1}{R_3}\vec{g}_3\right\}$ formează o bază ortonormală a lui $\mathscr{V}_3$.

EXEMPLE. 1) Sistemul de coordonate carteziene ortogonale $u^1 = x^1$, $u^2 = x^2$, $u^3 = x^3$ este evident ortogonal, deoarece $\vec{g}_k = \vec{e}_k$, iar $R_k = 1$, $1 \le k \le 3$.

2) Sistemul de coordonate sferice $u^1 = r$, $u^2 = \theta$, $u^3 = \varphi$ este ortogonal. Într-adevăr, avem $\vec{r} = r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_1 + r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_2 + r\cos\theta\,\vec{e}_3$;

$$\vec{g}_1 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_2 + \cos\theta\,\vec{e}_3;$$

$$\vec{g}_2 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = r\cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_1 + r\cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_2 - r\sin\theta\,\vec{e}_3;$$

$$\vec{g}_3 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_1 + r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_2.$$

și $\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 = 0$, $\vec{g}_2 \cdot \vec{g}_3 = 0$, $\vec{g}_3 \cdot \vec{g}_1 = 0$. Parametrii Lamé corespunzători sînt

$$R_1 = \|\vec{g}_1\| = 1,\ R_2 = \|\vec{g}_2\| = r,\ R_3 = \|\vec{g}_3\| = r\sin\theta.$$

3) Sistemul de coordonate cilindrice $u^1 = \rho$, $u^2 = \varphi$, $u^3 = z$ este ortogonal deoarece

$$\vec{r} = \rho\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \rho\sin\varphi\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3 \text{ și } \vec{g}_1 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\varphi\,\vec{e}_2,$$

$\vec{g}_2 = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -\rho\sin\varphi\,\vec{e}_1 + \rho\cos\varphi\,\vec{e}_2$, $\vec{g}_3 = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \vec{e}_3$ deci parametrii Lamé sînt 1, ρ, 1.

Dacă se cunosc componentele unui vector sau tensor în sistemul de coordonate $\{u^1, u^2, u^3\}$, atunci se pot calcula componentele într-un nou sistem de coordonate $\{u'^1, u'^2, u'^3\}$. Fie $\vec{r}$ vectorul de poziție al punctului curent și $\vec{g}_i = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u^i}$, $\vec{g}'_j = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u'^j}$. Atunci $(\forall)\ \vec{v} \in \mathscr{V}_3$ avem scrieri $\vec{v} = v^i\vec{g}_i = v'^j\vec{g}'_j$ și ținînd cont că $\vec{g}_i = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u^i} = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u'^j}\dfrac{\partial u'^j}{\partial u^i} = \dfrac{\partial u'^j}{\partial u^i}\vec{g}'_j$, rezultă $v'^j = \dfrac{\partial u'^j}{\partial u^i}v^i$ (însumare după i), $1 \le j \le 3$.

Aceste relații stabilesc legătura între componentele–etaj ale lui $\vec{v}$ la o schimbare de coordonate. Au lor relații similare pentru componentele–subsol ale lui $\vec{v} : v'_j = \dfrac{\partial u^i}{\partial u'^j}v_i$. De asemenea pentru componentele–subsol ale unui tensor T de ordin 2 avem: $T'_{ij} = \dfrac{\partial u^p}{\partial u'^i}\dfrac{\partial u^q}{\partial u'^j}T_{pq}$ etc. Mulți autori consideră astfel de relații ca punct de plecare în definirea noțiunii de tensor. De exemplu, ei numesc **tensor dublu covariant de ordin 2** un set de 9 funcții $T_{pq}(u^1, u^2, u^3)$, $1 \le p, q \le 3$ astfel încît funcțiile $T'_{ij}(u'^1, u'^2, u'^3) = T_{ij}(u^1(u'^1, u'^2, u'^3), u^2(u'^1, u'^2, u'^3), u^3(u'^1, u'^2, u'^3))$ să satisfacă relații $T'_{ij} = \dfrac{\partial u^p}{\partial u'^i}\dfrac{\partial u^q}{\partial u'^j}T_{pq}$, pentru orice schimbare de coordonate $(u^1, u^2, u^3) \to (u'^1, u'^2, u'^3)$. În mod similar, un tensor dublu contravariant de ordin 2 este un set de 9 funcții $T^{pq}(u^1, u^2, u^3)$ astfel încît $T'^{pq} = \dfrac{\partial u'^p}{\partial u^i}\dfrac{\partial u'^q}{\partial u^j}T^{ij}$ pentru orice schimbare de coordonate ca mai sus.

EXEMPLE. 1) Fie $v_i(u^1, u^2, u^3)$, $1 \leq i \leq 3$ componentele unui vector covariant, care la orice schimbare de coordonate ca mai sus, verifică relații de forma $v_i' = \frac{\partial u^j}{\partial u'^i} v_j$. Notînd $t_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial u^j} - \frac{\partial v_j}{\partial u^i}$ se obține un tensor dublu covariant, numit **rotorul** vectorului de componente v_i [Într-adevăr, la orice schimbare de coordonate, avem

$$t'_{ij} = \frac{\partial v'_i}{\partial u'^j} - \frac{\partial v'_j}{\partial u'^i} = \frac{\partial}{\partial u'^j}\left(\frac{\partial u^p}{\partial u'^i} v_p\right) - \frac{\partial}{\partial u'^i}\left(\frac{\partial u^q}{\partial u'^j} v_q\right) =$$

$$= \underline{\frac{\partial^2 u^p}{\partial u'^j \partial u'^i}} v_p + \frac{\partial u^p}{\partial u'^i}\frac{\partial v_p}{\partial u'^j} - \underline{\frac{\partial^2 u^q}{\partial u'^i \partial u'^j}} v_q - \frac{\partial u^q}{\partial u'^j}\frac{\partial v_q}{\partial u'^i} =$$

(termenii subliniați reducîndu-se)

$$= \frac{\partial u^p}{\partial u'^i}\left(\frac{\partial v_q}{\partial u^q}\frac{\partial u^q}{\partial u'^j}\right) - \frac{\partial u^q}{\partial u'^j}\left(\frac{\partial v_q}{\partial u^p}\frac{\partial u^p}{\partial u'^i}\right) = \frac{\partial u^p}{\partial u'^i}\frac{\partial u^q}{\partial u'^j}\left(\frac{\partial v_p}{\partial u^q} - \frac{\partial v_q}{\partial u^p}\right) = \frac{\partial u^p}{\partial u'^i}\frac{\partial u^q}{\partial u'^j} t_{pq}].$$

2) **Tensorul metric în** $\mathbb{R}^3$

Pentru orice sistem de coordonate u^1, u^2, u^3 notăm

(13) $\quad g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u^j}$ (sumă după k), $1 \leq i, j \leq 3$.

Așadar, $g_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^j} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j$.

Arătăm că în acest mod se obține un tensor dublu covariant (evident simetric), numit **tensorul metric** în $\mathbb{R}^3$. [Într-adevăr, pentru orice schimbare de coordonate $(u^1, u^2, u^3) \to (u'^1, u'^2, u'^3)$ avem

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial u'^i}\frac{\partial x^k}{\partial u'^j} = \left(\frac{\partial x^k}{\partial u^p}\frac{\partial u^p}{\partial u'^i}\right)\cdot\left(\frac{\partial x^k}{\partial u^q}\frac{\partial u^q}{\partial u'^j}\right) = \frac{\partial u^p}{\partial u'^i}\frac{\partial u^q}{\partial u'^j}\left(\frac{\partial x^k}{\partial u^p}\frac{\partial x^k}{\partial u^q}\right) = \frac{\partial u^p}{\partial u'^i}\frac{\partial u^q}{\partial u'^j} g_{pq}]$$

Reamintim că forma pătratică $ds^2 = dx^k \cdot dx^k$ (însumare după k) se numește "elementul de arc" al spațiului. Pentru orice alt sistem de coordonate u^1, u^2, u^3 avem $ds^2 = \left(\frac{\partial x^k}{\partial u^i} du^i\right) \cdot \left(\frac{\partial x^k}{\partial u^j} du^j\right) = g_{ij} du^i du^j$ deci elementul de arc se exprimă în noile coordonate folosind componentele tensorului metric. Într-un sistem ortogonal de coordonate avem $g_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$, $g_{ii} = R_i$ și

$ds^2 = R_1(du^1)^2 + R_2(du^2)^2 + R_3(du^3)^2$. De exemplu, în coordonatele sferice

$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$, iar în coordonate cilindrice

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

În general expresia $dV = R_1 R_2 R_3 \, du^1 du^2 du^3$ se numește **elementul de volum** în coordonatele ortogonale u^1, u^2, u^3. Așadar, în coordonate carteziene (respectiv sferice, cilindrice), elementul de volum va fi $dV = dx^1 dx^2 dx^3$ (respectiv $dV = r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi$, $dV = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$).

3) Ne ocupăm acum de modul cum se modifică simbolii lui Christoffel Γ_{ij}^k la o schimbare de coordonate. Conform (12) avem $\Gamma_{jk}'^i = \vec{g}'^i \cdot \frac{\partial \vec{g}_j'}{\partial u'^k}$. Dar $\vec{g}'^i = \frac{\partial u'^i}{\partial u^p}\vec{g}^p$ și $\frac{\partial \vec{g}_j'}{\partial u'^k} = \frac{\partial}{\partial u'^k}\left(\frac{\partial u^q}{\partial u'^j}\vec{g}_q\right) = \frac{\partial^2 u^q}{\partial u'^k \partial u'^j}\vec{g}_q + \frac{\partial u^p}{\partial u'^j}\frac{\partial \vec{g}_q}{\partial u'^k}$. Deoarece $\vec{g}_q$ sînt funcții de u^1, u^2, u^3 care depind la rîndul lor de u'^1, u'^2, u'^3, rezultă

$$\frac{\partial \vec{g}_q}{\partial u'^k} = \frac{\partial \vec{g}_q}{\partial u^r}\frac{\partial u^r}{\partial u'^k} = \frac{\partial u^r}{\partial u'^k}\Gamma_{qr}^s \vec{g}_s.$$

$$(14) \qquad \Gamma_{jk}'^i = \frac{\partial u'^i}{\partial u^p}\left(\frac{\partial^2 u^p}{\partial u'^j \partial u'^k} + \frac{\partial u^q}{\partial u'^j}\frac{\partial u^r}{\partial u'^k}\Gamma_{qr}^p\right).$$

În general, dacă $r, s \geq 0$ sînt întregi, se numește **tensor de tip** (r, s) **și ordin** $r+s$ în $\mathbb{R}^n$, orice set de n^{r+s} funcții $t_{k_1 \ldots k_r}^{l_1 \ldots l_s}(u^1, \ldots, u^n)$, care la orice schimbare de coordonate $(u^1, \ldots, u^n) \to (u'^1, \ldots, u'^n)$ satisfac relațiile

$$t'^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} = \frac{\partial u^{k_1}}{\partial u'^{i_1}} \cdots \frac{\partial u^{k_r}}{\partial u'^{i_r}}\frac{\partial u'^{j_1}}{\partial u^{l_1}} \cdots \frac{\partial u'^{j_s}}{\partial u^{l_s}} t_{k_1 \ldots k_r}^{l_1 \ldots l_s}.$$

Pentru $r = 0$, $s = 0$ se obțin scalarii; pentru $r = 1$, $s = 0$ vectorii covarianți și pentru $r = 0$, $s = 1$ vectorii contravarianți.

În spiritul definiției 5.1 dăm:

DEFINIȚIA 5.5. În general, dacă $r,s \geq 0$ sînt întregi, se numește **tensor de tip** $r+s$ **pe un spațiu vectorial real** V orice aplicație multiliniară $T: \underbrace{V \times \ldots \times V}_{r \text{ ori}} \times \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{s \text{ ori}} \to \mathbb{R}$ unde V^* este spațiul dual al lui V, $V^* = L(V, \mathbb{R})$.

[Definiția 5.1 se regăsește observînd că dacă $\dim_{\mathbb{R}} V < \infty$, aplicațiile biliniare $V \times V^* \to \mathbb{R}$ se identifică prin aplicații liniare $V \to V$; $\mathscr{V}_3^*$ se poate identifica prin $\mathscr{V}_3$: dacă $\mathscr{B}$ este o bază, baza vectorilor ei reciproci și baza duală $\mathscr{B}$ pot fi identificate].

Dacă $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ și $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ este o bază a lui V, atunci se poate construi baza duală $\mathscr{B}_d = \{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ a lui $\mathscr{V}^*$, unde $\omega^i(e_j) = \delta_j^i$, $1 \leq i, j \leq n$. Notînd $T_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s} = T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}, \omega^{j_1}, \ldots, \omega^{j_s})$, componentele lui T de p ori covariante și q ori contravariante, se poate arăta că, prin trecere de la baza $\mathscr{B}$ la o altă bază $\mathscr{B}' = \{e_1', \ldots, e_n'\}$, au loc relații de forma

$$T'^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_r \\ l_1, \ldots, l_s}} \alpha_{i_1}^{k_1} \ldots \alpha_{i_r}^{k_r} \beta_{l_1}^{j_1} \ldots \beta_{l_s}^{j_s} T_{k_1 \ldots k_r}^{l_1 \ldots l_s},$$

unde (α_j^i) este matricea de trecere de la $\mathscr{B}$ la $\mathscr{B}'$, iar (β_j^i) este inversa ei.

A da un **cîmp de tensori** de tip $r+s$ pe o varietate diferențiabilă n-dimensională M revine la a asocia oricărui punct $x \in M$ un tensor de tip $r+s$ pe spațiul tangent $T_x M$. Cîmpurile de vectori pe M (definiția 4.4) în paragraful anterior sînt cîmpuri de tensori de tip $0+1$. Tensorii din definiția 5.5 se mai numesc afini; în fiecare punct $x \in M$ este fixat cîte un astfel de tensor $T(x)$ și

unei baze în $T_x M$, i se asociază un set de funcții de x = componentele tensorului $T(x)$. Schimbarea hărților induce formule de transformare a componentelor cîmpului de tensori.

OBSERVAȚIE. Formulele (14) arată că setul de funcții Γ_{ij}^k **nu** are caracter tensorial. Punînd însă $T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$ se obțin componentele **tensorului de torsiune** al spațiului (de tip 2 + 1). De asemenea, punînd

$$R_{ijk}^l = \Gamma_{jk,i}^l - \Gamma_{ik,j}^l + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l$$

se obțin componentele **tensorului de curbură** al lui Riemann (de tip 3 + 1).

5.4. Operatorii diferențiali ai teoriei cîmpului

Să notăm cu x^1, x^2, x^3 coordonatele carteziene și cu u^1, u^2, u^3 un sistem oarecare de coordonate în spațiu (schimbările de coordonate fiind presupuse difeomorfisme de clasă C^2).

Reamintim că $\bar{r} = x^k \bar{e}_k$ (sumă după k) este vectorul de poziție al punctului de coordonate x^1, x^2, x^3. Am pus

$$\bar{g}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^i} = \frac{\partial x^1}{\partial u^i}\bar{e}_1 + \frac{\partial x^2}{\partial u^i}\bar{e}_2 + \frac{\partial x^3}{\partial u^i}\bar{e}_3, \; 1 \le i \le 3.$$

Vectorii bazei reciproce $\bar{g}^1, \bar{g}^2, \bar{g}^3$ sînt

$$\bar{g}^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^1}\bar{e}_1 + \frac{\partial u^i}{\partial x^2}\bar{e}_2 + \frac{\partial u^i}{\partial x^3}\bar{e}_3 \text{ (deoarece } \bar{g}_i \cdot \bar{g}^j = \frac{\partial x^k}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial u^j}{\partial x^k} = \delta_i^j).$$

DEFINIȚIA 5.6. Pentru o funcție $f(u^1, u^2, u^3)$ de clasă C^1 (pe un deschis din $\mathbb{R}^3$), **gradientul** lui f este cîmpul de vectori

$$(15) \qquad \nabla f = \operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial u^k}\bar{g}^k \text{ (sumă după } k).$$

În coordonate carteziene $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ avem $\bar{g}_k = \bar{g}^k = \bar{e}_k$ și

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{e}_3.$$

În coordonate curbilinii ortogonale, notăm cu $\bar{u}_k$ versorul lui $\bar{g}_k = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_k}$ (tangent la curbele u_i = constant, $i \ne k$); așadar, $\bar{g}_1 = R_1\bar{u}_1$, $\bar{g}_2 = R_2\bar{u}_2$, $\bar{g}_3 = R_3\bar{u}_3$; $\bar{g}^1 = \frac{1}{R_1}\bar{u}_1$, $\bar{g}^2 = \frac{1}{R_2}\bar{u}_2$, $\bar{g}^3 = \frac{1}{R_3}\bar{u}_3$ și înlocuim în (15). Astfel, în coordonate sferice, pentru o funcție $f(r, \theta, \varphi)$ avem

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\bar{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\bar{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\bar{u}_\varphi,$$

în coordonate cilindrice

$$\nabla f(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\bar{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\bar{u}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{u}_z.$$

Aici $\bar{u}_r$; $\bar{u}_\theta$; $\bar{u}_\varphi$ sînt versorii tangenți în punctul curent M respectiv la semidreapta $\{\theta = \text{const}, \varphi = \text{const}\}$; cercul–meridian $\{r = \text{const}, \varphi = \text{const}\}$ și cercul–paralel $\{r = \text{const}, \theta = \text{const}\}$.

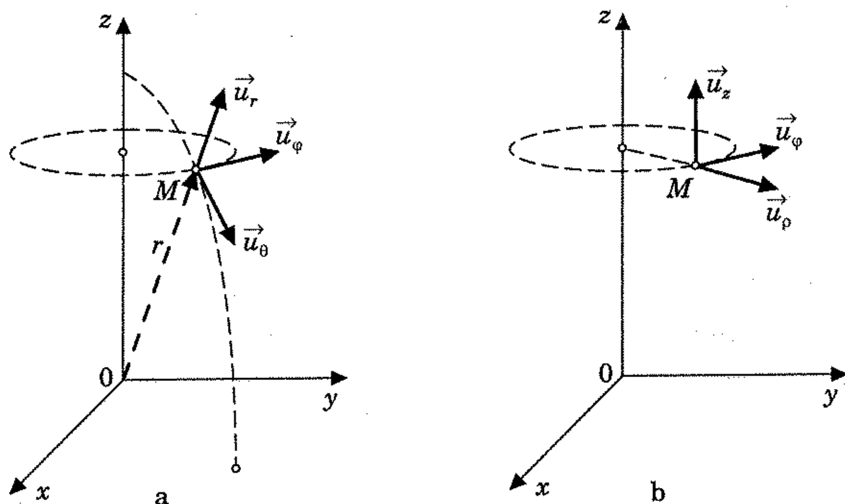


Figura IV.36.

În mod similar, $\vec{u}_\rho$; $\vec{u}_\varphi$; $\vec{u}_z$ sînt versorii tangenţi în punctul curent la semidreapta $\{\varphi = \text{const}, z = \text{const}\}$; cercul $\{\rho = \text{const}, z = \text{const}\}$; dreapta $\{\rho = \text{const}; \varphi = \text{const}\}$ (v. figura IV.36).

DEFINIŢIA 5.7. Fie $\vec{v}$ un cîmp de vectori avînd componentele de clasă C^1; notăm $\vec{v}_{,i} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial u^i}$. **Divergenţa** lui $\boldsymbol{v}$ este scalarul

$$(16) \qquad \nabla \cdot \vec{v} = \operatorname{div} \vec{v} = \vec{v}_{,i} \cdot \vec{g}^{\,i} \text{ (sumă după } i)$$

şi **rotorul** lui $\vec{v}$ este

$$(17) \qquad \nabla \times \vec{v} = \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{g}^{\,i} \times \vec{v}_{,i} \text{ (sumă după } i)$$

Pentru a da formule explicite de calcul, este utilă noţiunea de derivată covariantă. Avem $\vec{v} = v^j \vec{g}_j$ deci

$$\vec{v}_{,i} = (v^j \vec{g}_j)_{,i} = v^j_{,i} \vec{g}_j + v^j \vec{g}_{j,i} = v^j_{,i} \vec{g}_j + v^j \Gamma^k_{ij} \vec{g}_k = (v^k_{,i} + \Gamma^k_{ij} v^j) \vec{g}_k.$$

Expresia din paranteză se numeşte **derivata covariantă** (a componentei–etaj k în raport cu coordonata u^i) şi se notează $\nabla_i v^k$. Aşadar,

$$(18) \qquad \vec{v}_{,i} = (\nabla_i v^k) \vec{g}_k, \text{ unde } \nabla_i v^k = v^k_{,i} + \Gamma^k_{ij} v^j.$$

În mod similar se defineşte $\nabla_i v_j = v_{j,i} - \Gamma^k_{ij} v_k$ (pentru componentele–subsol) şi avem $\vec{v}_{,i} = (\nabla_i v_k) \vec{g}^{\,k}$.

Atunci $\operatorname{div} \vec{v} \overset{cf.(16)}{=} \vec{v}_{,i} \vec{g}^{\,i} \overset{cf.(18)}{=} (\nabla_i v^k) \vec{g}_k \cdot \vec{g}^{\,i} = (\nabla_i v^k) \delta^i_{\ k} = \nabla_i v^i$. (sumă după i).

Analog, conform (17),

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{g}^{\,i} \times \vec{v}_{,i} = \vec{g}^{\,i} \times (\nabla_i v_j) \vec{g}^{\,j} = (\nabla_i v_j) \vec{g}^{\,i} \times \vec{g}^{\,j} = \varepsilon^{ijk} (\nabla_i v_j) \vec{g}^{\,k}$$

Se poate arăta că, în coordonate curbilinii ortogonale, dacă

$$\vec{v} = f_1 \vec{u}_1 + f_2 \vec{u}_2 + f_3 \vec{u}_3, \text{ atunci}$$

(19) $$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{Rf_i}{R_i}\right),$$

unde $R = R_1R_2R_3$ este produsul parametrilor Lamé. În coordonate carteziene,

$$\nabla\vec{v} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

Dacă $\Phi(u^1, u^2, u^3)$ este o funcție de clasă C^2, atunci laplacianul lui Φ este

$$\Delta\,\Phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\Phi) = \nabla(\nabla\,\Phi).$$

Atunci

(20) $$\Delta\Phi = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{R}{R_j^{\,2}}\frac{\partial\Phi}{\partial u^j}\right).$$

În coordonate carteziene $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ avem

(21) $$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

În coordonate sferice:

(22) $$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right)\right].$$

În coordonate cilindrice:

(23) $$\Delta\Phi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right].$$

Renunțînd la variabila z, din (23) rezultă laplacianul în coordonate polare în plan; anume pentru o funcție $\Phi(\rho, \theta)$ de clasă C^2 avem

(24) $$\Delta\Phi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)\right] = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}.$$

Vom folosi ulterior aceste expresii.

Capitolul V SISTEME DIFERENȚIALE

§ 1. Clase de ecuații și sisteme diferențiale

1.1. Noțiuni fundamentale în teoria sistemelor diferențiale (ordinare)

Teoria ecuațiilor și sistemelor diferențiale reprezintă unul din domeniile fundamentale ale matematicii, cu largi aplicații în tehnică, ca de exemplu în mecanică, în studiul circuitelor electrice, al oscilațiilor și în teoria comenzii automate. Ea permite în esență să se studieze procesele de evoluție deterministe, finit–dimensionale și diferențiale. Precizăm aceasta. O condiție esențială pe care trebuie să o îndeplinească un proces fizic pentru a fi "descris" de ecuații diferențiale este aceea ca prezentul să conțină predicția viitorului local, ca și reconstituirea trecutului local; un proces fizic care satisface această condiție se numește **determinist.** Un proces fizic este **finit–dimensional** și **diferențiabil** dacă este descris de un număr finit de parametri de stare (mărimi dependente de timp a căror cunoaștere determină dinamica procesului), care sînt funcții derivabile de variabila timp.

În liceu s-au considerat doar ecuații de forma $f(x) = 0$ cu f funcție reală; ecuațiile algebrice, logaritmice, trigonometrice etc, erau de această formă. Se impune însă și studiul unor ecuații în care necunoscuta este ea însăși o funcție (astfel de ecuații se mai numesc **funcționale**). Printre acestea se află ecuațiile diferențiale ordinare (în care necunoscuta este o funcție de o singură variabilă independentă), ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale, ecuațiile cu diferențe finite, ecuațiile integrale etc. Istoricește, primele ecuații diferențiale au apărut din "probleme nevinovate"; de exemplu, problema **găsirii tractricei:** dacă stăpînul S "merge" pe o axă, iar cîinele său C este ținut cu zgarda întinsă, tangentă la curba γ descrisă de cîine (S și C fiind presupuși

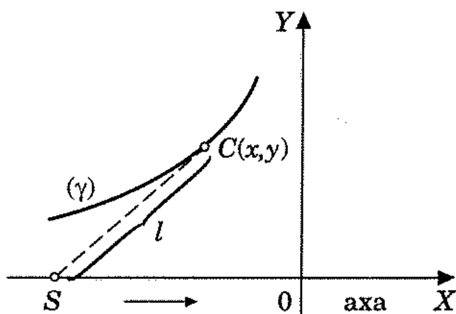


Figura V.1.

puncte materiale, se cere să se determine ecuația curbei γ (numită tractrice).

Alegînd un reper ortogonal XOY și presupunînd că ecuația lui γ este $Y = y(X)$ cu y funcție derivabilă, ecuația dreptei SC va fi $Y - y = y' \cdot (X - x)$ deci punctul S va avea coordonatele $\left(x - \dfrac{y}{y'}, 0\right)$. Condiția ca distanța $\|SC\|$ să fie constantă, egală cu lungimea l a zgardei, revine la $\dfrac{y^2}{y'^2} + y^2 = l^2$, egalitate care constituie o "ecuație diferențială de ordin I".

Rezolvarea ei va fi dată ulterior.

Descoperirea legilor dinamicii a condus la o mare dezvoltare a studiului ecuațiilor diferențiale. Dacă $\vec{r} = \vec{r}(t)$ este vectorul de poziție, la momentul t, al unei particule materiale, de masă m, aflată sub acțiunea unei forțe $\vec{F}$, atunci $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$. Raportîndu-ne la un reper ortogonal $Oxyz$ de versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ avem $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ și egalitatea anterioară este echivalentă cu următorul "sistem diferențial de ordin II".

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_1(x, y, z) \\ m\ddot{y} = F_2(x, y, z) \\ m\ddot{z} = F_3(x, y, z) \end{cases} \quad \text{(am notat } \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x'(t),\ \ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = x''(t) \text{ etc).}$$

În perioada mecanicistă a fizicii, s-a degajat "principiul determinismului" conform căruia cunoașterea stării unui sistem material la un moment t_0 (numit ad-hoc prezent) implică atît posibilitatea predicției viitorului (adică determinarea stării sistemului la momente $t > t_0$) cît și reconstituirea stărilor trecute, pentru $t < t_0$. Acest principiu își are însă limitele lui: este valabil doar local, doar pentru procese și fenomene descrise prin ecuații sau sisteme diferențiale (problema Cauchy) și nu poate fi extins necenzurat, de exemplu, la fenomene biologice sau sociale unde este valabil "determinismul statistic".

Mișcarea unei particule în spațiu este bine determinată dacă se cunosc 6 parametri (coordonatele carteziene ale poziției și coordonatele scalare ale vectorului–viteză). Spațiul stărilor particulei este $\mathbb{R}^6$. Notînd $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = y$, $x_4 = \dot{y}$, $x_5 = z$, $x_6 = \dot{z}$, sistemul anterior se scrie esențialmente echivalent sub forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = F_1(x_1, x_3, x_5) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = F_2(x_1, x_3, x_5) \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = F_3(x_1, x_3, x_5) \end{cases}$$

deci "un sistem diferențial de ordinul I" cu necunoscuta setul de 6 funcții $\underline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_6(t))$ care reprezintă tocmai cei 6 parametri indicați mai sus. Se constată că evoluția în timp a particulei (pentru t aparținînd unui

interval de timp I) este strîns legată de curba parametrizată $I \to \mathbb{R}^6$, $t \to \underline{x}(t)$, numită şi curba ei de evoluţie în spaţiul stărilor; traiectoria particulei este desigur curba $I \to \mathbb{R}^3$, $t \to (x_1(t), x_3(t), x_5(t))$.

Mecanica teoretică a punctelor materiale oferă numeroase exemple de ecuaţii diferenţiale ordinare (legate de viteze de variaţie a mărimilor în procese deterministe, finit dimensionale şi diferenţiabile). În schimb, în mecanica fluidelor există procese care nu pot fi descrise doar cu un număr finit de parametri, iar în teoria ciocnirilor, parametrii naturali de stare nu sînt funcţii derivabile.

Subliniem că ecuaţiile diferenţiale care îl interesează pe cercetătorul oricărei porţiuni din realitate sînt deduse prin raţionamente modelatoare, ascund o anumită imprecizie şi rezultatele obţinute trebuie confruntate cu experimentul. În cele ce urmează, vom prezenta îndeosebi studiul unor ecuaţii sau sisteme diferenţiale deja explicitate; altminteri depăşim cadrul unui curs de matematică.

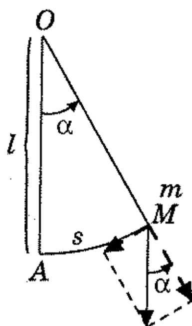


Figura V.2.

EXEMPLE. 1) **Ecuaţia pendulului.** Să considerăm un pendul ca în figura V.2 (OA fiind poziţia verticală, OM o poziţie curentă); asupra masei m acţionează forţa (scalară) mg; presupunînd firul inextensibil, aceasta se reduce la componenta ei $mg \sin \alpha \simeq mg\,\alpha$ (am presupus că oscilaţiile sînt "mici" deci $\sin \alpha \simeq \alpha$). Pe de altă parte, lungimea arcului AM este $s = l\alpha$ şi ecuaţia lui Newton $m\ddot{s} = -mg\alpha$ devine $l\ddot{\alpha} = -g\alpha$. Notînd $\frac{g}{l} = \omega^2$ $(\omega > 0)$, se obţine ecuaţia diferenţială de ordinul II $\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0$, numită **ecuaţia pendulului.** Mai general, o ecuaţie de forma $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$ se numeşte **ecuaţia oscilatorului armonic,** cu perturbaţia în timp $f(t)$ şi necunoscuta $x(t)$. De rezolvarea acestor ecuaţii ne vom ocupa mai tîrziu.

2) Fie un circuit, alcătuit dintr-o rezistenţă R şi o inductanţă L legate în serie, alimentat începînd de la un moment t_0 de la o sursă de tensiune constantă E_0. Notînd cu $i(t)$ curentul în circuit, rezultă că pentru orice $t > t_0$ avem $R \cdot i(t) + Li'(t) = E_0$, o ecuaţie diferenţială de ordinul I.

3) Să considerăm mişcarea unei particule materiale de masă constantă m şi energie totală constantă E, aflată într-un cîmp de potenţial $U(x)$; aici $x = x(t)$ este parametrul de stare şi avem aici un proces cu un grad de libertate (sau 1–dimensional).

Ecuaţia mişcării (din legea conservării energiei) este:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E,$$

deci (presupunînd că $\dot{x} = \frac{dx}{dt} > 0$) rezultă

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

ceea ce reprezintă o ecuaţie diferenţială de ordinul I.

Revenim acum la cazul general şi dăm cîteva noţiuni şi definiţii fundamentale.

Fie U un domeniu al spaţiului euclidian real $\mathbb{R}^n$ şi $v : U \to \mathbb{R}^n$ un cîmp vectorial, adică $v = (f_1, ..., f_n)$, unde $f_i : U \to \mathbb{R}$ este funcţie diferenţiabilă pentru $i = 1, 2, ..., n$ (se poate considera şi cazul în care f_i, $i = 1, ..., n$, sînt doar funcţii continue). Relaţia

$$(1) \qquad \dot{x} = v(x), \; x \in U,$$

se numeşte **sistem diferenţial autonom** (sau **invariant în timp**) **definit de cîmpul de vectori** v. Domeniul U se numeşte **spaţiul de faze** (sau **spaţiul stărilor**) sistemului diferenţial (1). Dacă $n = 1$, atunci relaţia (1) reprezintă o **ecuaţie diferenţială autonomă de ordinul întîi.**

DEFINIŢIA 1.1. Se numeşte **soluţie a sistemului diferenţial** (1) **pe un interval** I, orice funcţie diferenţiabilă $\varphi : I \to U$, care are proprietatea că $\frac{d\varphi}{dt} = v(\varphi(t))$, pentru orice $t \in I$.

Imaginea aplicaţiei φ se numeşte **orbită a sistemului diferenţial** (1).

DEFINIŢIA 1.2. Se spune că o soluţie $\varphi : I \to U$ a sistemului diferenţial (1) satisface **condiţia iniţială**

$$(2) \qquad \varphi(t_0) = x_0 \; (t_0 \in \mathbb{R}, \; x_0 \in U)$$

dacă $t_0 \in I$ şi valoarea lui φ în t_0 este egală cu x_0, deci dacă orbita dată de φ trece prin punctul x_0 la momentul t_0.

Dacă $x_0 \in U$ este un **punct singular al cîmpului de vectori** v, adică $v(x_0) = 0$, atunci $\varphi \equiv x_0$ este evident o soluţie a sistemului (1), care satisface condiţia iniţială (2). O astfel de soluţie se numeşte **soluţie staţionară** sau **poziţie de echilibru.** Evident, în acest caz, punctul x_0 este o orbită.

Problema de a găsi o soluţie a sistemului diferenţial (1) care satisface condiţia iniţială (2), se numeşte **problemă Cauchy** pentru sistemul diferenţial respectiv. Datele t_0, x_0 se numesc **date Cauchy** (A. L. CAUCHY, 1789–1857). Problema Caychy îşi are originea în mecanică, în determinarea mişcării unei particule cunoscînd poziţia şi viteza ei iniţială.

DEFINIŢIA 1.3. Se numeşte **spaţiul de faze extins al sistemului** (1) domeniul $\mathbb{R} \times U \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Se numeşte **curbă integrală a sistemului** (1) graficul unei soluţii oarecare a sistemului.

Deşi în general legile naturii nu variază în timp, uneori se întîlnesc şi ecuaţii diferenţiale cu membrul drept dependent de timp. Fie U un domeniu al spaţiului euclidian real $\mathbb{R}^{n+1}$ cu coordonatele $t, x_1, ..., x_n$ şi $v : U \to \mathbb{R}^n$ un cîmp vectorial care depinde de timpul t. Egalitatea

$$(3) \; \dot{x} = v(t, x), \; (t, x) \in U$$

se numeşte **sistem diferenţial (neautonom).**

DEFINIŢIA 1.4. Se numeşte **soluţie a sistemului** (3) orice funcţie diferenţiabilă $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ $(I = (a, b) \subset \mathbb{R})$ al cărei grafic este conţinut în domeniul U (adică $(\forall)\ t \in I$, $(t, \varphi(t) \in U)$ şi care are proprietatea că

$$\frac{d\varphi}{dt} = v(t, \varphi(t)), \text{ pentru orice } t \in I.$$

În acest caz, **spaţiul fazelor** este format din acele puncte $x \in \mathbb{R}^n$ pentru care există $t \in \mathbb{R}$ astfel încît $(t, x) \in U$. Domeniul U se numeşte **spaţiul de faze extins,** iar graficul unei soluţii oarecare a sistemului diferenţial (3) se numeşte **curbă integrală a sistemului.** Se spune că soluţia $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ satisface **condiţia iniţială** $\varphi(t_0) = x_0$ dacă $t_0 \in I$, $(t_0, x_0) \in U$ şi valoarea lui φ în t_0 este egală cu x_0, deci dacă (t_0, x_0) este un punct al curbei integrale asociate soluţiei. Geometric, o curbă integrală este situată în domeniul U şi are în fiecare punct $(t, \varphi(t))$ tangentă de coeficient unghiular $v(t, \varphi(t))$, ca în figura V.3.

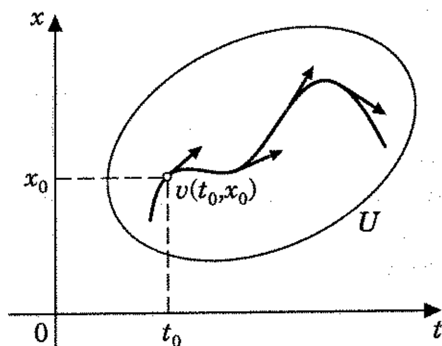


Figura V.3.

Vom prezenta acum modelul matematic al unui proces determinist. Fie M spaţiul stărilor (fazelor) unui proces şi fie $x \in M$ o stare oarecare (iniţială).

Dacă notăm cu $g^t x \in M$ starea procesului la timpul t, determinată de starea iniţială x, definim fiecare $t \in \mathbb{R}$ aplicaţia $g^t : M \to M$, care se numeşte **evoluţia** la timpul t. Avem atunci $g^{t+s} = g^t \circ g^s$, $(\forall)\ t, s \in \mathbb{R}$, căci starea $y = g^s x$ în care trece x după timpul s, trece după timpul t în aceeaşi stare $z = g^t y$ în care x trece după timpul $t + s$ şi anume $g^{t+s} x = z$ (procesul este determinist).

Dăm acum definiţii riguroase:

DEFINIŢIA 1.5. Se numeşte **grup cu un parametru de transformări** ale mulţimii M, o familie $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de aplicaţii ale mulţimii M în ea însăşi, $g^t : M \to M$, avînd proprietăţile: pentru orice $t, s \in \mathbb{R}$, $g^{t+s} = g^t \circ g^s$ şi $g^0 = 1_M$.

DEFINIŢIA 1.6. Se numeşte **curent** $(M, \{g^t\})$ o pereche formată dintr-o mulţime M şi un grup $\{g^t\}$ cu un parametru de transformări ale acestei mulţimi.

Mulţimea M se numeşte **spaţiul fazelor (stărilor)** curentului. Pentru fiecare stare $x \in M$ definim aplicaţia $\varphi : \mathbb{R} \to M$, $\varphi(t, = g^t x$, $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$, care se numeşte **mişcare** a punctului x sub acţiunea curentului, iar imaginea acestei aplicaţii se numeşte **orbită** a curentului. Se numeşte **poziţie de echilibru** sau **punct fix** $x \in M$ al unui curent orice punct care este orbită, adică pentru care $g^t x = x$, $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$.

Se numeşte **spaţiul de faze extins** al curentului $(M, \{g^t\})$ mulţimea $\mathbb{R} \times M$, iar graficul unei mişcări se numeşte **curbă integrală** a curentului.

Pentru modelarea unui proces determinist, finit dimensional şi diferenţial, dăm următoarea noţiune:

DEFINIŢIA 1.7. Fie $U \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu. Se numeşte **grup cu un parametru** $\{g^t\}$ **de difeomorfisme** ale lui U o aplicaţie $g : \mathbb{R} \times U \to U$, $g(t, x) = g^t x$, $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$, $(\forall)\ x \in U$, cu proprietăţile:

1) g este o aplicaţie diferenţiabilă;

2) familia $\{g^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ este un grup cu un parametru de transformări ale lui U.

OBSERVAŢIE. Din relaţia $g^{t+s} = g^t \circ g^s$ obţinem că $g^t \circ g^{-t} = g^0 = 1_U$, deci g^t este bijecţie pentru orice $t \in$ R şi are ca inversă pe g^{-t}. Din proprietatea 1) rezultă că atît g^t cît şi g^{-t} sînt diferenţiabile, deci g^t este un difeomorfism pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

DEFINIŢIA 1.8. Fie $(U, \{g^t\})$ un curent definit de un grup cu un parametru de difeomorfisme ale domeniului $U \subset \mathbb{R}^n$. Se numeşte **viteza** $v(x)$ a curentului în punctul $x \in U$, vectorul viteză al mişcării punctului x, adică

$$\left.\frac{\mathrm{d}g^t x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v(x).$$

Are loc următorul rezultat:

TEOREMA 1.1. Fie $(U, \{g^t\})$ un curent definit de un grup cu un parametru de difeomorfisme ale unui domeniu $U \subset \mathbb{R}^n$ şi v cîmpul vectorial al vitezelor curentului. Orice mişcare $\varphi : \mathbb{R} \to U$, $\varphi(t) = g^t x$, a unui punct $x \in U$ este o soluţie a sistemului diferenţial autonom $\dot{x} = v(x)$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $t_0 \in \mathbb{R}$ oarecare; avem:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{\mathrm{d}g^t x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{\mathrm{d}g^{t_0+\tau} x}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} = \left.\frac{\mathrm{d}g^{\tau}(g^{t_0} x)}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} = v(g^{t_0}x) = v(\varphi(t_0)),$$

deci $\varphi(t) = g^t x$ este soluţie a sistemului diferenţial $\dot{x} = v(x)$.

EXEMPLU. Fie ecuaţia diferenţială

(4) $\dot{x} = kx$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ şi $k \in \mathbb{R}^*$ (constantă).

Vom arătă că unica soluţie a acestei ecuaţii, cu condiţia iniţială $\varphi(0) = x_0$, este

$$\varphi(t) = e^{kt} x_0,\ (\forall)\ t \in \mathbb{R}.$$

Într-adevăr, funcţia este soluţie, căci $\varphi'(t) = ke^{kt}x_0 = k\,\varphi(t)$ şi în plus $\varphi(0) = x_0$; fie apoi $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o altă soluţie a ecuaţiei (4) ce verifică condiţia iniţială $\psi(0) = x_0$. Atunci, pentru funcţia $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\theta(t) = \psi(t) \cdot e^{-kt}$, $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$, avem:

$$\theta'(t) = \psi'(t)e^{-kt} - k\psi(t)e^{-kt} = k\psi(t)e^{-kt} - k\psi(t)e^{-kt} = 0,$$

deci, $\theta(t) = c$ (constantă) $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$. În particular, pentru $t = 0$ obţinem $c = \psi(0) = x_0$, deci $\psi(t) = e^{kt}x_0 = \varphi(t)$, $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$, adică avem unicitatea soluţiei date.

Definim acum aplicaţia $g^t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(\forall)\ t \in$ R, prin $g^t x_0 = e^{kt} x_0$.

Pentru $(\forall)\, t, s \in \mathbb{R}$ avem $(g^t \circ g^s)x_0 = g^t(g^s x_0) = e^{kt}(e^{ks}x_0) = e^{k(t+s)}x_0 = g^{t+s}x_0$, $(\forall)\, x_0 \in \mathbb{R}$, deci $g^t \circ g^s = g^{t+s}$. Evident $g^0 x_0 = x_0$, deci familia $\{g^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ este un grup cu un parametru de transformări ale lui $U = \mathbb{R}$. În plus, aplicația $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t, x) = g^t x = e^{kt}x$, $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$ este diferențiabilă, deci curentul $(\mathbb{R}, \{g^t\})$ este dat de un grup cu un parametru de difeomorfisme.

OBSERVAȚIE. Teorema 1.1 ne arată că un curent $(U, \{g^t\})$ definit de un grup cu un parametru de difeomorfisme ale unui domeniu $U \subset \mathbb{R}^n$, definește un sistem diferențial autonom, iar mișcările sub acțiunea curentului sînt soluții ale acestui sistem diferențial asociat. În exemplul anterior am văzut că și invers, plecînd de la soluțiile unei ecuații diferențiale autonome, am definit un curent $(\mathbb{R}, \{g^t\})$, printr-un grup cu un parametru de difeomorfisme.

Reciproca teoremei 1.1 nu este adevărată, în general. În anumite condiții, cu ajutorul soluțiilor unui sistem diferențial autonom, se poate obține doar un curent "local".

1.2. Ecuații diferențiale integrabile prin metode elementare

Fie $f(x, y)$, $f : U \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^2$; atunci se poate considera ecuația diferențiabilă de ordinul I asociată lui f, $y' = f(x, y)$.

Conform definiției 1.1, prin **soluție** a acesteia pe un interval I se înțelege orice funcție derivabilă $\varphi : I \to \mathbb{R}$ astfel încît $(\forall)\, x \in I$, $(x, \varphi(x)) \in U$ și $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. Aici spațiul stărilor este $\mathbb{R}^1$ și un proces descris prin ecuația $y' = f(x, y)$ se consideră cunoscut dacă se știe y ca funcție de x; graficele de soluții se mai numesc **curbe integrale**. Problematica principală constă în determinarea soluțiilor prin metode exacte sau aproximative, precum și în studiul calitativ al soluțiilor.

Mai general, dacă $f_i(x, y_1, ..., y_n)$, $1 \le i \le n$ sînt n funcții continue pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, atunci se poate considera sistemul diferențial de ordin I asociat, anume $y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, $1 \le i \le n$. Considerînd funcția $F : U \to \mathbb{R}^n$, sistemul se scrie "vectorial" $Y' = F(x, Y)$, unde $Y = (y_1, ..., y_n)$, $Y' = (y_1', \dots, y_n')$.

Punctul $(y_1, ..., y_n)$ din $\mathbb{R}^n$ este starea unui proces descris prin acest sistem.

Soluția unui astfel de sistem pe un interval I este o funcție derivabilă $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ astfel încît $(\forall)\, t \in I$, $(t, \varphi(t)) \in U$ și $\varphi'(t) = F(t, \varphi(t))$. Notînd cu $\varphi_1, ..., \varphi_n$ componentele lui φ, relația anterioară se scrie explicit $\varphi_i'(t) = f(t, \varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$, $1 \le i \le n$, $t \in I$. Dacă $(a, b_1, ..., b_n) \in U$ problema Cauchy corespunzătoare revine la a afla soluțiile φ în vecinătatea lui a, cu $\varphi(a) = (b_1, ..., b_n)$. Este inutil de spus că notațiile anterioare pot fi înlocuite cu altele (iar în aplicații de întîlnesc cele mai variate situații).

Cea mai simplă ecuație diferențială este $y' = f(x)$, unde $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă dată. Problema Cauchy $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in I$ are evident o soluție unică, anume $y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0$. Iată că determinarea soluției revine la a calcula o integrală și prin extrapolare lingvistică, rezolvarea oricărei ecuații

diferențiale se mai numește **integrare**. Cu notații schimbate, dacă $x' = f(t)$, $x(t_0) = x_0$, atunci $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau$.

EXEMPLU. Dacă $x''(t) = -g$ (g constant), atunci $x'(t) = -gt + C_1$ și $x(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$. Dacă în plus $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$, atunci $C_2 = x_0$ și $C_1 = v_0$ deci $x(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \cdot t + x_0$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Vom prezenta cîteva ecuații diferențiale de ordinul întîi pentru care există metode elementare de a obține o soluție oarecare ("soluția generală").

a) Ecuație cu diferențială exactă.

Fie

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \ (y' = f(x, y))$$

o ecuație diferențială, unde $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe deschisul D din $\mathbb{R}^2$. Presupunem că pentru orice punct $(x, y) \in D$ avem $f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, deci ecuația (1) se scrie $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$, cu $P, Q : D \to \mathbb{R}$, funcții continue și $Q \neq 0$ pe D, astfel încît forma diferențială

$$(2) \qquad \omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

să fie o formă diferențială **exactă** pe D; așadar, există o funcție $F : D \to \mathbb{R}$, $F \in C^1(D)$, cu proprietatea că $dF = \omega$ sau, echivalent, $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ și $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$.

Atunci se spune că ecuația diferențială (1) este o **ecuație cu diferențială exactă.**

TEOREMA 1.2. **Dacă ecuația diferențială (1) este o ecuație cu diferențială exactă atunci, cu notațiile de mai sus, o funcție $y = \varphi(x)$ definită pe un interval oarecare este soluție a ecuației (1) dacă și numai dacă verifică ecuația implicită $F(x, y) = C$, cu C constantă reală oarecare.**

DEMONSTRAȚIE. Fie $\varphi : I \to \mathbb{R}$ o soluție a ecuației diferențiale (1), unde $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Atunci pentru orice $x \in I$ punctul $(x, \varphi(x)) \in D$ și se verifică egalitatea

$$\varphi'(x) = -\frac{P(x, \varphi(x))}{Q(x, \varphi(x))},$$

care se poate scrie sub forma $P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$, sau încă, sub forma echivalentă,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0.$$

Pentru orice $x \in I$ avem, deci, egalitatea $\frac{d}{dx}(F(x, \varphi(x)) = 0$, de unde rezultă că $F(x, \varphi(x)) = C$, $(\forall)\, x \in I$.

Reciproc, fie $y = \varphi(x)$, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ o soluție a ecuației implicite $F(x, y) = C$.

Pentru orice $x \in I$ avem $(x, \varphi(x)) \in D$ și $F(x, \varphi(x)) = C$, de unde derivînd obținem $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$, sau $\varphi'(x) = -\frac{P(x, \varphi(x))}{Q(x, \varphi(x))} = f(x, \varphi(x))$, deci $y = \varphi(x)$ este o soluție a ecuației diferențiale (1).

În aplicații se folosește mai ales următorul rezultat:

COROLAR. Presupunem că ecuația diferențială (1) **se scrie sub forma**

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

unde $P, Q : D \to \mathbb{R}$ **sînt funcții de clasă** C^1 **pe domeniul simplu conex** $D \subset \mathbb{R}^2$, $Q \neq 0$ **pe** D, **astfel încît forma diferențială** (2) **să fie o formă diferențială închisă** ($\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ **pe** D). **Atunci orice soluție a ecuației diferențiale** (1) **se obține din ecuația implicită** $F(x, y) = C$ (C **constantă reală oarecare**), **unde**

$$(4) \qquad F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy, \text{ cu } (x_0, y_0) \in D \text{ fixat.}$$

DEMONSTRAȚIE. Se știe din cursul de analiză matematică că pe un domeniu simplu conex orice formă diferențială închisă este exactă și că funcția F a cărei diferențială este ω este dată de formula (4). Afirmația de corolar rezultă atunci din teorema 1.2.

EXEMPLU. Considerăm ecuația $\overbrace{(-\frac{1}{x^2} + ye^x)}^{P}dx + \overbrace{e^x}^{Q}\,dy = 0$ în deschisul simplu conex $D = \{x > 0, y > 0\}$. Deoarece $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} (= e^x)$, sîntem în condițiile aplicării corolarului. Fixînd $(x_0, y_0) \in D$, rezultă

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} \left(-\frac{1}{x^2} + y_0 e^x\right)dx + \int_{y_0}^{y} e^y\,dy = \frac{1}{x} + ye^x - \frac{1}{x_0} - y_0 e^{x_0}.$$

Orice soluție verifică relația $\frac{1}{x} + ye^x = C$ cu C constantă arbitrară și soluția generală a ecuației este $y = \frac{Cx - 1}{xe^x}$. Se putea raționa și direct, prelucrînd ecuația dată:

$$-\frac{1}{x^2}dx + ye^x dy + e^x dy = 0, \quad -\frac{1}{x^2}dx + d(ye^x) = 0, \quad d\left(\frac{1}{x} + ye^x\right) = 0,$$

de unde $\frac{1}{x} + ye^x = C$ (folosind faptul că dacă f este o funcție de clasă C^1 și $df = 0$ într-un deschis conex, atunci f este constantă).

Fie ecuația diferențială autonomă

(5) $\quad \dfrac{dy}{dx} = f(y)$, cu $f : J \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe un interval J și $f(y) \neq 0$

pentru orice $y \in J$. Ecuația se scrie $dx - \dfrac{1}{f(y)}dy = 0$. Forma diferențială

(6) $\quad \omega = 1 \cdot dx - \dfrac{1}{f(y)}dy$

este evident închisă în domeniul simplu conex $D = \mathbb{R} \times J$ deci orice soluție a ecuației (5) satisface, conform corolarului teoremei 1.2, relația

(7) $\quad \displaystyle\int_{x_0}^{x} dx - \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)} = C$, fiind o funcție constantă oarecare.

Soluția care satisface condiția $y(x_0) = y_0$ cu $x_0 \in \mathbb{R}, y_0 \in J$ satisface relația

(8) $\quad x - x_0 = \displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)}.$

Uneori forma diferențială $\omega = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ nu este închisă în D, dar prin înmulțire cu o funcție $\mu(x, y)$, $\mu : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^1, convenabilă (numită **factor integrant**), forma diferențială

(9) $\quad \mu\omega = \mu P \cdot dx + \mu Q \cdot dy$

devine închisă și ecuația $\mu\omega = 0$ se rezolvă ca mai sus. Așadar, este verificată atunci condiția

(10) $\quad \dfrac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$ în orice punct $(x, y) \in D$,

adică ecuația cu derivate parțiale

(11) $\quad Q\dfrac{\partial \mu}{\partial x} - P\dfrac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$

În practică metoda factorului integrant se aplică "încercînd" funcții care depind numai de x sau numai de y.

EXEMPLU. Fie ecuația diferențială $y dx + 2x dy = 0$ în domeniul simplu conex $D = \{x > 0\}$. Notînd $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = 2x$, se observă că $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ și ecuația nu este exactă. Căutăm un factor integrant de forma $\mu(x)$; ecuația devine $\overbrace{\mu(x)y}^{P}\, dx + \overbrace{2x\mu(x)}^{Q}\, dy = 0$ și punînd condiția $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, rezultă $\mu(x) = 2\mu(x) + 2x\mu'(x)$, deci $\dfrac{\mu'(x)}{\mu(x)} = -\dfrac{1}{2x}$, $\ln|\mu| = -\dfrac{1}{2}\ln x + \ln|C|$; se observă că putem lua $\mu(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Ecuația inițială devine exactă după înmulțirea cu $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$: $\dfrac{y}{\sqrt{x}}dx + 2\sqrt{x}\, dy = 0$, adică $d\left(\dfrac{1}{2}y\sqrt{x}\right) = 0$ și soluția generală este $\dfrac{1}{2}y\sqrt{x} = \dfrac{C}{2}$ deci $y = \dfrac{C}{\sqrt{x}}$. Din nou, ecuația inițială putea fi rezolvată mai

simplu (ceea ce nu se poate face totdeauna), scriind-o sub forma $\frac{dx}{x} = -2\frac{dy}{y}$ şi integrînd direct: $\ln x = -2 \ln |y| + \ln |C|$, $xy^2 = C$ etc.

b) Ecuaţii cu variabile separate

O ecuaţie diferenţială de forma

$$\text{(12)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y),$$

unde $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ sînt funcţii continue, $g \neq 0$, pe J, iar $I = (a, b)$, $J = (c, d) \subset \mathbb{R}$, se numeşte **ecuaţie cu variabile separate.** Forma diferenţială $\omega = f(x)dx - \frac{1}{g(y)}dy$ este exactă pe $D = I \times J$ fiind diferenţiala funcţiei $F : D \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx - \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)}$, $(\forall)\,(x, y) \in D$, unde $x_0 \in I$ şi $y_0 \in J$. Aplicînd teorema 1.2 rezultă că orice soluţie a ecuaţiei (12) este dată sub forma implicită $\int_{x_0}^{x} f(x)dx - \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)} = C$, $C \in \mathbb{R}$.

EXEMPLE. 1) Ecuaţia diferenţială $y' = ky$ ($k \in \mathbb{R}$ constant) are o soluţie unică pe intervalul $I = (-\infty, \infty)$, pentru orice problemă Cauchy $y(x_0) = y_0$; anume $y(x) = y_0 \cdot e^{k(x-x_0)}$. Forma curbelor integrale după valorile k şi y_0 este indicată în Figura V.4.

2) Indicăm un exemplu cînd problema Cauchy are soluţie neunică (pe $\mathbb{R}$).

Fie ecuaţia $y' = \sqrt{|y|}$, cu condiţia $y(2) = 1$. Pe intervalul $I = (-\infty, \infty)$ această problemă Cauchy admite soluţii distincte, anume

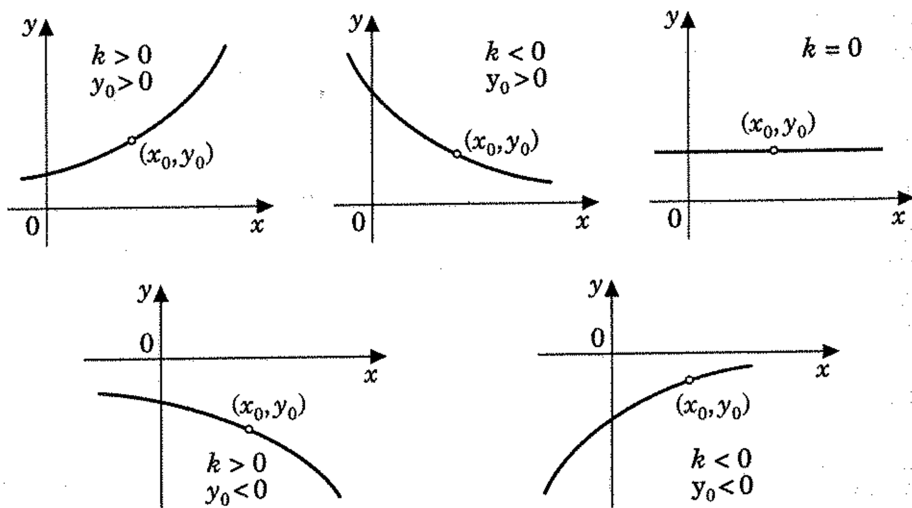


Figura V.4.

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{4}x^2 & x\geq 0\end{cases},\quad \psi(x)=\begin{cases}-\frac{1}{4}(x+2)^2 & x\leq -2\\ 0 & x\in(-2,0)\\ \frac{1}{4}x^2 & x\geq 0.\end{cases}$$

Este suficient să observăm că funcțiile φ,ψ sînt derivabile pe $\mathbb{R}$, $\varphi'(x)=\sqrt{|\varphi(x)|}$ și $\psi'(x)=\sqrt{|\psi(x)|}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$ și că $\varphi(2)=1$, $\psi(2)=1$.

3) În exemplul care urmează arătăm rolul important al datelor Cauchy (o schimbare mică a datelor poate avea efecte mari). Fie ecuația diferențială cu variabile separate $x'=e^x\cdot\sin t$; ecuația se scrie echivalent $\frac{dx}{dt}=e^x\cdot\sin t$, $e^{-x}dx=\sin t\,dt$ și prin integrare, $-e^{-x}=-\cos t-C$ deci $x(t)=-ln\,|C+\cos t|$, C fiind o constantă arbitrară. Evident, problema Cauchy $x(0)=0$ are unica soluție $x(t)=-\ln|\cos t|$, iar problema Cauchy $x(0)=-\ln 3$ are soluția unică $x(t)=-\ln(2+\cos t)$; în primul caz avem o soluție nemărginită în vecinătatea $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ a lui $t=0$, iar în cazul secund se obține o soluție mărginită pe întreaga dreaptă reală.

c) Ecuații omogene

O ecuație diferențială de forma

$$(13)\qquad \frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right),$$

în care funcția f depinde doar de raportul variabilelor y și x se numește **ecuație omogenă.** Notăm $\frac{y}{x}=u$ și presupunem că funcția $f:J\to\mathbb{R}$ este continuă și că pentru orice $u\in J$, $f(u)-u\neq 0$. Considerînd pe u funcție de variabila x, din egalitatea $y=x\cdot u$ obținem $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$. Făcînd deci, în ecuația (13), "substituția" $y=x\cdot u$ se obține ecuația diferențială echivalentă:

$$(13')\qquad \frac{du}{dx}=\frac{1}{x}(f(u)-u),$$

care este o ecuație cu variabile separate și se integrează prin metoda de la punctul procedent.

OBSERVAȚIE. Ecuațiile diferențiale (13) și (13′) sînt echivalente, în sensul că din orice soluție $y=\varphi(x)$ a ecuației (13) se obține o soluție $u=\frac{\varphi(x)}{x}$ a ecuației (13′) și reciproc.

d) Ecuații diferențiale liniare de ordinul I

O ecuație diferențială de forma

$$(14)\qquad y'=P(x)\cdot y+Q(x),$$

unde $P,Q:I\to\mathbb{R}$ sînt funcții continue ($I=(a,b)\subset\mathbb{R}$) se numește **ecuație liniară neomogenă** (de ordinul întîi). Ecuația diferențială

(15) $\quad y' = P(x)\cdot y$

se numeşte **ecuaţia liniară omogenă** ataşată ecuaţiei (14).

TEOREMA 1.3. Orice soluţie a ecuaţiei liniare omogene (15) **are forma**

(16) $\quad y = Ce^{\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt}$, $(\forall)\, x \in I$, **cu** $x_0 \in I$ **şi** $C \in \mathbb{R}$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $D = I \times (0, +\infty) \subset \mathbb{R}^2$. Pe domeniul D ecuaţia (15) este o ecuaţie cu variabile separate şi orice soluţie a sa se scrie sub forma implicită: $\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}t = \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{y} + C_1$ unde $x_0 \in I$, $y_0 \in (0, +\infty)$ şi $C_1 \in \mathbb{R}$. Se obţine că

$$\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}t - C_1 = \ln\frac{y}{y_0}, \text{ deci } y = y_0 \cdot e^{-C_1} \cdot e^{\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt}.$$

Notînd $y_0 e^{-C_1} = C > 0$, se obţine $y = Ce^{\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt}$.

Analog, pentru domeniul $D_1 = I \times (-\infty, 0)$, se obţine că orice soluţie a ecuaţiei (15) are forma $y = Ce^{\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt}$, unde $x_0 \in I$ şi $C \in \mathbb{R}$, $C < 0$. Observînd că $y = 0$ (funcţia nulă pe I) este soluţie a ecuaţiei (15), rezultă că orice soluţie a acesteia are forma $y = Ce^{\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt}$, $C \in \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.

Remarcăm că orice soluţie a ecuaţiei liniare omogene este definită pe tot intervalul I de definiţie al funcţiei P.

COROLAR. Fie S **mulţimea soluţiilor pe** I **ale ecuaţiei liniare omogene** $y' = P(x)y$. **Atunci** S **este un spaţiu vectorial real de dimensiune** 1.

DEMONSTRAŢIE. Aşadar, $S = \{\varphi : I \to \mathbb{R} \mid \varphi$ derivabilă şi $\varphi'(x) = P(x)\cdot\varphi(x)$, $(\forall)\, x \in I\}$. Se verifică imediat că dacă $\varphi, \psi \in S$ şi $a \in \mathbb{R}$, atunci $\varphi + \psi \in S$, $a\varphi \in S$ deci S este un subspaţiu vectorial al lui $C^1(I)$. În plus, funcţia $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$, $\varphi_0(x) = Ce^{\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt}$ este o soluţie, deci $\varphi_0 \in S$; deoarece φ_0 este un vector nenul din S, el este liniar independent. Teorema 1.3 arată că $\{\varphi_0\}$ formează o bază a lui S, deci $\dim_{\mathbb{R}} S = 1$.

TEOREMA 1.4. (Lagrange). **Ecuaţia liniară neomogenă** (14) **are o soluţie particulară de forma**

(17) $$y_p = \left(\int_{x_0}^{x} Q(t)\, e^{-\int_{x_0}^{t} P(\tau)\,d\tau}\,\mathrm{d}t\right) e^{\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt}, \ (\forall)\, x \in I, \textbf{ unde } x_0 \in I.$$

DEMONSTRAŢIE. Vom folosi metoda "variaţiei constantelor" a lui Lagrange, adică vom căuta o soluţie de forma $y_p = C(x)\cdot e^{\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt}$, unde în

soluția ecuației liniare omogene atașate, în loc de constanta reală C, am introdus o funcție necunoscută $C = C(x)$ de clasă C^1 pe I. Derivînd și înlocuind în ecuația (14) obținem:

$$C'(x)e^{\int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}t} + C(x)\cdot P(x)\cdot e^{\int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}t} = P(x)C(x)e^{\int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}t} + Q(x),$$

deci

$$C'(x) = Q(x)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}t}, \quad (\forall)\, x \in I.$$

Rezultă

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} Q(t)e^{-\int_{x_0}^{t} P(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t,$$

deci avem soluția particulară

$$y_p = \left(\int_{x_0}^{x} Q(t)e^{\int_{x_0}^{t} P(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t\right)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}t}, \quad (\forall)\, x \in I \text{ (cu } x_0 \in I).$$

COROLAR. Fie $\mathscr{S}$ mulțimea soluțiilor (pe I) ale ecuației liniare neomogene $y' = P(x)y + Q(x)$ și S spațiul vectorial al soluțiilor ecuației liniare omogene asociate $y' = P(x)y$. Dacă $y_p \in \mathscr{S}$, atunci $\mathscr{S} = y_p + S$ ($y_p + S$ este prin definiție mulțimea tuturor sumelor $y_p + z$ cu $z \in S$) și în plus, soluția explicită problemei Cauchy $y' = P(x)y + Q(x)$, $y(x_0) = y_0$ ($x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}$) este

$$(18) \qquad y(x) = \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(t)e^{\int_{x_0}^{t} P(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t\right]\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)\,\mathrm{d}t}, \quad x \in I.$$

DEMONSTRAȚIE. Arătăm prin dublă incluziune că $\mathscr{S} = y_p + S$.

Fie $(\forall)\, y \in \mathscr{S}$ deci $y' = P(x)y + Q(x)$. Deoarece $y_p' = P(x)y_p + Q(x)$, rezultă prin scădere că $(y - y_p)' = P(x)(y - y_p)$ deci $y - y_p \in S$ adică $y \in y_p + S$. Apoi, $(\forall)\, y \in y_p + S$, $y = y_p + z \in S$. Avem $y' = y'_p + z' = P(x)y_p + Q(x) + P(x)z = P(x)\cdot y + Q(x)$ deci $y \in \mathscr{S}$. Alegem soluția y_p dată de (17) și aplicînd teorema 1.3 rezultă că orice $y \in \mathscr{S}$ (deci soluția generală a ecuației (14)) este dată de

$$y(x) = Ce^{\int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}t} + \left(\int_{x_0}^{x} Q(t)e^{-\int_{x_0}^{x} P(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t\right)\cdot e^{\int_{x_0}^{x} P(t)\mathrm{d}t}.$$

Punînd condiția $y(x_0) = y_0$ rezultă $C = y_0$ și se obține formula (18).

În practică formula (18) se mai scrie

$$(18') \qquad y(x) = \left[C + \int Q(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]\cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x},$$

unde C este o funcție constantă oarecare și $\int P(x)\mathrm{d}x$ este una din primitivele funcției P.

EXEMPLE. 1) Fie ecuația $y' + \frac{1}{x} y = x^2$ pe intervalul $I = (0, \infty)$. Soluția generală este

$$y(x) = \left[C + \int x^2 e^{\int \frac{1}{x} dx} dx \right] e^{-\int \frac{1}{x} dx} = \frac{C}{x} + \frac{x^3}{4}$$

(am folosit faptul că $e^{\alpha \ln x} = x^{\alpha}$, $(\forall)\ \alpha \in \mathbb{R}, x > 0$).

2) Arătăm că ecuația $x'(t) = -x + f(t)$ unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă și mărginită admite o soluție mărginită, pe $[0, \infty)$. Conform (18), avem

$$x(t) = \left[x(0) + \int_0^t f(\tau) e^{\int_0^{\tau} du} d\tau \right] \cdot e^{-\int_0^{\tau} du} = \left(x(0) + \int_0^t f(\tau) e^{\tau} d\tau \right) e^{-t},\ t \in \mathbb{R}.$$

Fie $M > 0$ astfel încît $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$, $|f(t)| \leq M$. Considerăm soluția $x = x(t)$ verificînd condiția $x(0) = M$; atunci $(\forall)\ t \geq 0$

$$|x(t)| = e^{-t} \left| M + \int_0^t f(\tau) e^{\tau} d\tau \right| \leq e^{-t} \left(M + \int_0^t |f(\tau)| e^{\tau} d\tau \right) \leq e^{-t} \left(M + M \int_0^t e^{\tau} d\tau \right) = M.$$

e) Ecuațiile Bernoulli și Riccati (J. Bernoulli, 1654–1705; C. J. Riccati, 1676–1754). O ecuație diferențială de forma

$$(19) \qquad y' = P(x) \cdot y + Q(x) \cdot y^{\alpha},$$

unde $P, Q : I \to \mathbb{R}$ sînt funcții continue ($I = (a, b) \subset \mathbb{R}$), $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ și $y > 0$, se numește **ecuație Bernoulli**. Pentru $\alpha = 0$ sau $\alpha = 1$, ecuația (19) devine o ecuație liniară. Pentru $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ împărțim ecuația (19) cu y^{α} și obținem

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = P(x) y^{1-\alpha} + Q(x).$$

Efectuăm substituția de funcție $y^{1-\alpha} = z$ și derivăm $z' = (1-\alpha) \frac{y'}{y^{\alpha}}$. Atunci ecuația (19) devine $z' = (1-\alpha) P(x) \cdot z + (1-\alpha) Q(x)$, adică o ecuație liniară neomogenă, care se integrează ca mai sus.

O ecuație diferențială de forma

$$(20) \qquad y' = P(x) y^2 + Q(x) y + R(x),$$

unde $P, Q, R : I \to \mathbb{R}$ sînt funcții continue ($I = (a, b) \subset \mathbb{R}$), se numește **ecuație Riccati**. Dacă se cunoaște o soluție particulară a sa, $y_p : I_1 \to \mathbb{R}$ ($I_1 \subset I$), atunci ecuația Riccati se reduce la o ecuație liniară neomogenă efectuînd substituția de funcție $y = y_p + \frac{1}{z}$. Derivînd și înlocuind în ecuația (20) obținem

$$y_p' - \frac{z'}{z^2} = P(x) \left(y_p^2 + 2 y_p \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \right) + Q(x) \left(y_p + \frac{1}{z} \right) + R(x).$$

Ținînd seama de formula $y_p' = P(x) y_p^2 + Q(x)) y_p + R(x)$, rezultă pentru funcția z ecuația $z' = -(2P(x) y_p(x) + Q(x)) z - P(x)$, adică o ecuație liniară neomogenă.

EXEMPLU. Integrăm ecuația Riccati $3y'+y^2+\frac{2}{x^2}=0$ pe intervalul $I=(0,\infty)$, încercînd o soluție particulară de forma $y_p=\frac{k}{x}$ $(k\in\mathbb{R})$. Punînd condiția ca y_p să fie soluție, rezultă $3\cdot\left(-\frac{k}{x^2}\right)+\frac{k^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}=0$; putem lua $k=1$ deci $y_p=\frac{1}{x}$. Făcînd schimbarea de funcție $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$, $y'=-\frac{1}{x^2}-\frac{z'}{z^2}$, se obține o ecuație liniară în z etc.

f) Ecuațiile Lagrange și Clairaut (J. L. Lagrange, 1736–1813; A. C. Clairaut, 1713–1765). O ecuație diferențială de forma

$$(21)\qquad y=x\cdot\varphi(y')+\psi(y'),$$

unde $\varphi,\psi\in C^1(I)$ $(I=(a,b)\subset\mathbb{R})$ și $\varphi\neq 1_I$, se numește **ecuație Lagrange.**

Remarcăm că ecuația (21) nu are forma **normală,** adică nu are forma $y'=f(x,y)$.

Derivăm ecuația (21) și efectuăm substituția $y'=p$:

$$(22)\qquad p=\varphi(p)+x\varphi'(p)\cdot p'+\psi'(p)\cdot p'.$$

Avem $p=p(x)$ și inversăm local această funcție, adică schimbăm rolul variabilelor $x=x(p)$; atunci $p'=\frac{dp}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dp}}=\frac{1}{x'}$ și obținem ecuația

$$x'=\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}x+\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)},$$

definită pe un interval $I_1\subset I$, care nu conține puctele $p_1,p_2,\ldots\in I$ pentru care $\varphi(p_i)=p_i$ (φ nu coincide cu funcția identică a lui I). Ecuația obținută este o ecuație liniară neomogenă și obținem o soluție oarecare a sa sub forma $x=x(p,C)$, cu $C\in\mathbb{R}$ constantă. Din ecuația (21) rezultă $y=x(p,C)\cdot\varphi(p)+\psi(p)$ și soluțiile ecuației (21) se dau parametric.

În cazul $\varphi(y')\equiv y'$, (adică $\varphi=1_I$), se obține **ecuația Clairaut** $y=xy'+\psi(y')$. Conform (22) rezultă sau $p'=0$ [deci $p=C$ și $y=xC+\varphi(C)$] sau $x=-\psi'(p)$ și din ecuația inițială se obține soluția "singulară" $\begin{cases}x=-\psi'(p)\\ y=-p\psi'(p)+\psi(p)\end{cases}$, care nu se obține din soluția generală $y=Cx+\psi(C)$ pentru nici o valoare a constantei reale C.

EXEMPLE. Fie ecuația Clairaut $y=xy'-\frac{y'^2}{2}$. Procedînd ca mai sus se obțin soluțiile $y=Cx-\frac{C^2}{2}$, $C\in\mathbb{R}$ și soluția singulară $x=-p$, $y=\frac{p^2}{2}$, adică parabola $y=\frac{x^2}{2}$. Se observă că soluția singulară $y=\frac{x^2}{2}$ este înfășurătoarea

familiei de drepte, reprezentînd soluția generală $y = Cx - \frac{C^2}{2}$ (deci în orice punct al curbei $y = \frac{x^2}{2}$ este tangentă o dreaptă din familie; Figura V.5).

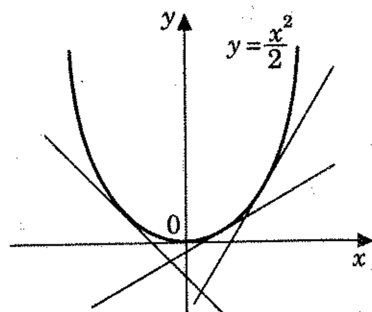


Figura V.5.

OBSERVAȚIE. Există și alte clase de ecuații diferențiale pentru care soluțiile se dau parametric. Pentru o ecuație de forma $x = g(y')$, cu g de clasă C^1, punem $y' = p$ și rezultă $x = g(p)$,

$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = p\mathrm{d}x = pg'(p)\mathrm{d}p$ și curbele integrale vor fi $\begin{cases} x = g(p) \\ y = \int pg'(p)\,\mathrm{d}p + C. \end{cases}$

În mod similar, pentru o ecuație de forma $y = h(y')$, cu h de clasă C^1, punem $y' = p$ și rezultă $y = h(p)$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{p} = \frac{h'(p)}{p}\mathrm{d}p$, de unde $\begin{cases} x = \int \frac{h'(p)}{p}\mathrm{d}p + C \\ y = h(p) \end{cases}$.

EXEMPLU. Ne propunem să determinăm efectiv tractricea (descrisă la începutul acestui capitol). Am văzut că ecuația ei $y = y(x)$ verifică $\frac{y^2}{y'^2} + y^2 = l^2$, $y(0) = l$. Putem presupune $y \geq 0$, $y' \geq 0$ și rezultă $y = l\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$. Să punem $y' = \mathrm{tg}\, t$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și rezultă $y = l \sin t$; apoi $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{tg}\, t} = \frac{l\cos^2 t\,\mathrm{d}t}{\sin t}$ de unde

$$x = l\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t + C = l\left(\ln \mathrm{tg}\frac{t}{2} + \cos t\right) + C.$$

Pentru $t \to \frac{\pi}{2}$ rezultă că y tinde către l și x tinde către C deci $C = 0$.

Ecuațiile parametrice ale tractricei vor fi

$$\begin{cases} x = l\left(\ln \mathrm{tg}\frac{t}{2} + \cos t\right) \\ y = l \sin t, \end{cases} \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Suportul acestei curbe este indicat de Figura V.6. Simetricul acesteia față de Oy are aceleași ecuații parametrice, cu $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Se adaugă și punctul $(0, l)$, obținut pentru $t = \frac{\pi}{2}$.

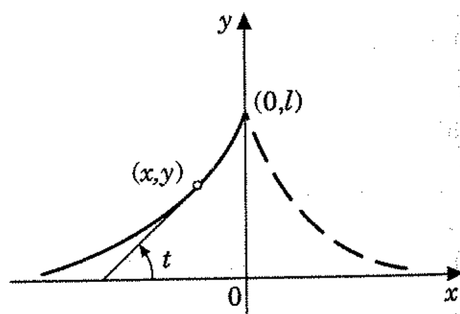


Figura V.6.

Este de remarcat că suprafaţă născută prin rotirea tractricei în jurul axei Ox se numeşte **pseudosfera de parametru** l, care a constituit pimul model pentru geometria lobacevskiană (hiperbolică), datorat lui E. Beltrami (1835–1900). Precizăm pe scurt o proprietate interesantă a pseudosferei.

Pentru a obţine ecuaţiile parametrice ale pseudosferei, considerăm în planul xOz tractricea

$$\begin{cases} x = l\sin u \\ y = 0 \\ z = l\left(\ln tg\dfrac{u}{2} + \cos u\right), \qquad 0 < u < \pi. \end{cases}$$

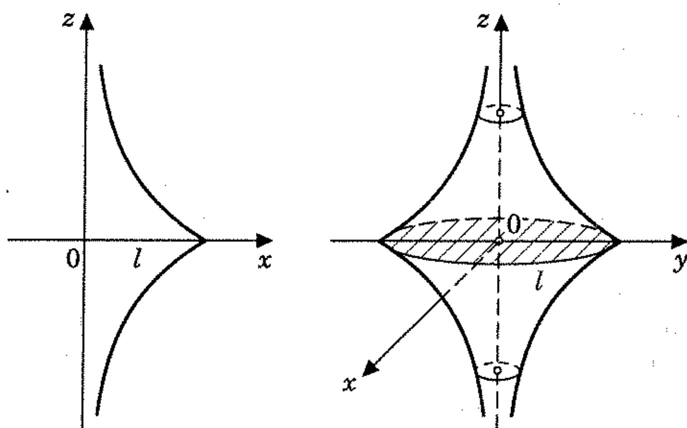


Figura V.7.

Suprafaţa obţinută prin rotirea tractricei în jurul lui Oz (fig. V.7) va avea parametrizarea

$$\begin{cases} x = l\sin u\cos v \\ y = l\sin u\sin v \\ z = l\left(\ln \mathrm{tg}\dfrac{u}{2} + \cos u\right), \; 0 < u < \pi, \; 0 \le v < 2\pi. \end{cases}$$

În acest caz notînd $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, avem $E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = l^2 \,\mathrm{ctg}^2 u$, $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0$, $G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = l^2 \sin^2 u$, $L = -l \,\mathrm{ctg}\, u$, $M = 0$, $N = l^2 \,\mathrm{ctg}\, u \cdot \sin^2 u$ şi curbura Gauss totală va fi $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\dfrac{1}{l^2}$, după calcule uşoare. Aşadar, curbura Gauss a pseudosferei este constantă şi negativă.

Se poate arăta că orice suprafaţă de clasă C^2 avînd curbura totală Gauss $K = K_0$ constantă este **local** izometrică sau cu un plan (dacă $K_0 = 0$), sau cu o sferă de rază $\dfrac{1}{\sqrt{K_0}}$ (dacă $K_0 > 0$) sau cu o pseudosferă de parametru

$l = \frac{1}{\sqrt{-K_0}}$ (dacă $K_0 < 0$). Aceste trei situații corespund respectiv geometriei plane euclidiene, geometriei neeuclidiene eliptice (a lui Riemann) și geometriei neeuclidiene hiperbolice (a lui Lobacevski – Bolyai).

1.3. Teoreme fundamentale pentru sisteme diferențiale

În acest paragraf vom demonstra, urmînd textul devenit clasic al lui V. Arnold [1], cîteva rezultate de bază: teorema de existență și unicitate a soluției $x = x(t)$ a unei probleme Caychy $x(t_0) = x_1$, pentru un sistem de forma $x' = v(t, x)$ și teoremele de continuitate și derivabilitate a soluțiilor în raport cu parametrii și cu condițiile inițiale. Vom introduce mai întîi cîteva noțiuni și rezultate preliminare.

Fie $f: M_1 \to M_2$ o aplicație între două spații metrice. Se spune că f satisface **condiția R. Lipschitz**, (1882–1903) (cu constanta L) dacă există $L > 0$ astfel încît $(\forall)\, x, y \in M_1$, $\mathrm{d}(f(x), f(y)) \le L\, \mathrm{d}(x, y)$.

Fie $f: U \to \mathbb{R}^n$ o aplicație de clasă C^1 pe domeniul U din $\mathbb{R}^m$. Pentru orice punct $x \in U$ diferențiala $f_{*x} = df(x)$ a lui f în x, $f_{*x}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ este o aplicație liniară, identificată cu aplicația tangentă a lui f în x. Aplicația $f_*: U \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $x \to f_*(x) = \mathrm{d}f(x)$, este o aplicație continuă de la domeniul $U \subset \mathbb{R}^m$ la spațiul metric complet $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{mn}$.

Considerăm pe acesta din urmă distanța definită cu ajutorul normei

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|,\ (\forall)\, A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$

Remarcăm că pentru orice $x \in \mathbb{R}^m$, avem $\|A(x)\| \le \|A\| \cdot \|x\|$.

LEMA 1.5. Orice aplicație de clasă C^1 pe domeniul $U \subset \mathbb{R}^m$, $f: U \to \mathbb{R}^n$, satisface pe orice compact convex $V \subset U$, condiția Lipschitz cu constanta L, unde $L = \sup_{x \in V} \|f_{*x}\|$.

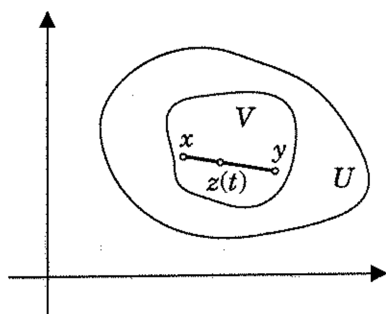


Figura V.8.

DEMONSTRAȚIE. Deoarece aplicația $f_*: U \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, este continuă și $V \subset U$ este compact, rezultă că $L = \sup_{x \in V} \|f_*(x)\| = \sup_{x \in V} \|f_{*x}\|$ există și este finit. Fie $x, y \in V$ două puncte oarecare; deoarece V este convex putem uni în V punctele x și y prin segmentul de ecuații parametrice $z(t) = x + t(y - x)$, $0 \le t \le 1$ (Figura V.8).

Aplicînd formula Leibniz–Newton putem scrie

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(f(z(\tau))\mathrm{d}\tau = \int_0^1 f_{*z(\tau)}(z'(\tau))\mathrm{d}\tau.$$

Deoarece $z'(\tau) = y - x$, rezultă

$$\|f(y) - f(x)\| \le \int_0^1 \|f_{*z(\tau)}\| \cdot \|y - x\| d\tau \le L \cdot \|y - x\|,$$

adică f satisface pe V condiția Lipschitz cu constanta L și lema 1.5 este demonstrată.

Fie U un domeniu al spațiului euclidian real $\mathbb{R}^{n+1}$ cu coordonatele $t, x_1, ..., x_n$ și $v : U \to \mathbb{R}^n$ un cîmp vectorial de clasă C^r ($r \ge 1$) pe U. Fie

$$(1) \qquad \dot{x} = v(t, x)$$

sistemul diferențial asociat și $(t_0, x_0) \in U$ un punct fixat. Deoarece U este deschis există numerele reale strict pozitive a și b astfel încît "cilindrul" compact $S = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t - t_0| \le a, \; |x - x_0| \le b\}$ să fie inclus în U.

Notăm tot cu v_* diferențiala lui v în raport cu x (t fixat) și fie

$$C = \underset{(t, x) \in S}{C} \|v(t, x)\|, \quad L = \sup_{(t, x) \in S} \|v_{*(t, x)}\|.$$

Există numărul real strict pozitiv a' astfel încît "conul"

$$K_0 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t - t_0| \le a', \; |x - x_0| \le C\,|t - t_0|\}$$

să fie inclus în interiorul cilindrului S. De asemenea, există numărul real strict pozitiv b' astfel încît conul K_{x_1}, obținut din comul K_0 printr-o translație a vîrfului (t_0, x_0) în punctul (t_0, x_1), unde $|x_1 - x_0| \le b'$, să fie inclus în interiorul cilindrului S (Figura V.9). Vom căuta soluția diferențială (1) verificînd condițiile inițiale Cauchy:

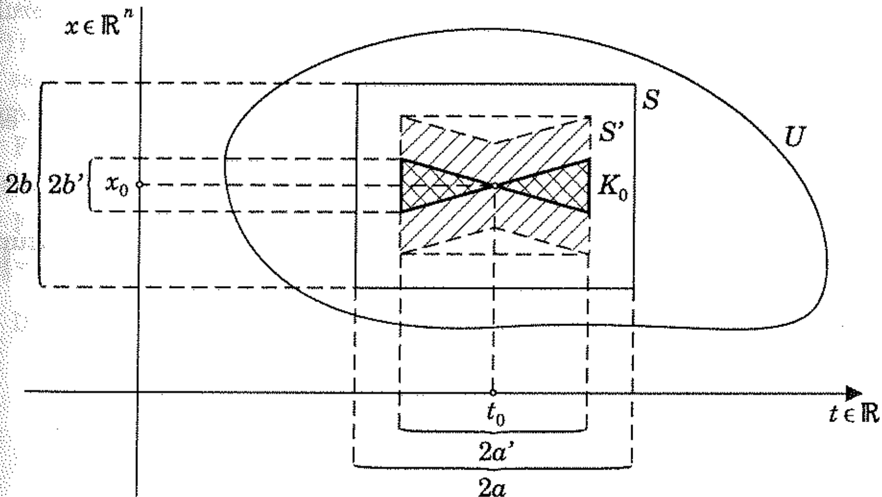


Figura V.9.

$$(2) \qquad x(t_0) = x_1, \text{ unde } |x_1 - x_0| \le b'.$$

(Aici x_1 nu reprezintă prima componentă a lui x.) Dacă $v_1, ..., v_n$ sînt componentele aplicației v, atunci sistemul (1) se scrie explicit

$$\begin{cases} x_1' = v_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_n' = v_n(t, x_1, \dots, x_n), (t, x_1, \dots, x_n) \in U, \end{cases}$$

iar condiția (2) devine $x_1(t_0) = a_1, \dots, x_n(t_0) = a_n$ unde $x_1 = (a_1, \dots, a_n)$.

Fie $S' \subset S$ cilindrul

$$S' = \{(t, x_1) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t - t_0| \le a', |x_1 - x_0| \le b'\}$$

şi fie $M = \{h : S' \to \mathbb{R}^n \mid h$ continuă şi $|h(t, x_1)| \le C|t - t_0|, (\forall)(t, x_1) \in S'\}$; în particular $(\forall)\, h \in M$, $h(t_0, x_1) = 0$. Definim pe M metrica

$$d(h_1, h_2) = \|h_1 - h_2\| = \sup_{(t, x_1)\in S'} |h_1(t, x_1) - h_2(t, x_1)|.$$

Lema 1.6. (M, d) **este un spațiu metric complet**

Demonstrație. Faptul că d este o metrică (adică distanță) este evident. Convergența în M față de această metrică este convergența uniformă şi limita unui şir Cauchy de funcții din M (care există!) rezultă o funcție continuă. În plus, dacă toate funcțiile şirului verifică inegalitatea

$$(3) \qquad |h(t, x_1)| \le C|t - t_0|, (\forall)\,(t, x_1) \in S',$$

atunci şi funcția limită verifică această inegalitate, deci se află în M.

Definim acum aplicația $\mathcal{A} : M \to M$ prin

$$(4) \qquad (\mathcal{A}h)(t, x_1) = \int_{t_0}^{t} v(\tau, x_1 + h(\tau, x_1))d\tau, \ (\forall)\, h \in M.$$

Deoarece $|\tau - t_0| \le |t - t_0| \le a'$ şi $|x_1 + h(\tau, x_1) - x_1| \le C \cdot |t - t_0|$, rezultă că $(\tau, x_1 + h(\tau, x_1)) \in K_{x_1} \subset S'$.

Avem că $|(\mathcal{A}h)(t, x_1)| \le \left|\int_{t_0}^{t} v(\tau, x_1 + h(\tau, x_1))\,d\tau\right| \le C \cdot |t - t_0|$, şi cu $\mathcal{A}h$ este continuă, rezultă că $\mathcal{A}h \in M$.

Lema 1.7. În ipotezele şi notațiile de mai sus, dacă $a' < \frac{1}{L}$, **atunci** $\mathcal{A} : M \to M$ **este o contradicție.**

Demonstrație. Trebuie să arătăm că

$$d(\mathcal{A}h_1, \mathcal{A}h_2) \le \lambda d(h_1, h_2), (\forall)\, h_1, h_2 \in M, \text{ unde } 0 \le \lambda < 1.$$

Avem $(\mathcal{A}h_1 - \mathcal{A}h_2)(t, x_1) = \int_{t_0}^{t} \big(v(\tau, x_1 + h_1(\tau, x_1)) - v(\tau, x_1 + h_2(\tau, x_1))\big)d\tau.$

Conform lemei 1.5 funcția $v(t,x)$ satisface condiția Lipschitz cu constanta L în raport cu argumentul x, adică

$$|v(\tau, x_1 + h_1(\tau, x_1)) - v(\tau, x_1 + h_2(\tau, x_1))| \le L\,|h_1(\tau, x_1) - h_2(\tau, x_1)|,$$

$(\forall)\,(\tau, x_1) \in S'$. Atunci rezultă că

$$|v(\tau, x_1 + h_1(\tau, x_1)) - v(\tau, x_1 + h_2(\tau, x_1))| \le L \cdot \|h_1 - h_2\|,$$

de unde

$$|(\mathscr{A}h_1 - \mathscr{A}h_2)(t, x_1)| \le \left|\int_{t_0}^{t} L\|h_1 - h_2\| d\tau\right| \le La'\|h_1 - h_2\|,$$

deci $\|\mathscr{A}h_1 - \mathscr{A}h_2\| \le La'\|h_1 - h_2\|$, adică $d(\mathscr{A}h_1, \mathscr{A}h_2) \le \lambda \cdot d(h_1, h_2)$, unde $0 \le \lambda = La' < 1$. Deci $\mathscr{A}$ este o contracție.

TEOREMA 1.8. (de existență și unicitate a soluției problemei Cauchy (1) + (2)). Presupunem că funcția v din sistemul diferențial (1) este de clasă C^1 pe domeniul U. Atunci există o soluție $x = \varphi(t)$ a sistemului diferențial (1), definită în vecinătatea $I = \{t \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| < a'\}$ a lui t_0, care verifică condițiile inițiale (2). Orice două soluții ale sistemului diferențial (1) care verifică condițiile inițiale Cauchy (2) coincid într-o vecinătate a lui t_0.

DEMONSTRAȚIE. În notațiile anterioare, conform lemelor 1.6 și 1.7, contracția $\mathscr{A} : M \to M$ are un punct fix $h \in M$, adică $\mathscr{A}h = h$. Atunci, pentru orice $(t, x_1) \in S'$ avem

$$h(t, x_1) = \int_{t_0}^{t} v(\tau, x_1 + h(\tau, x_1))\, d\tau.$$

Definim $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ prin $\varphi(t) = x_1 + h(t, x_1)$, $(\forall)\ t \in I$, adică

$$\varphi(t) = x_1 + \int_{t_0}^{t} v(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau. \tag{5}$$

Din formula (5) rezultă că φ este derivabilă pe I și avem că $\dot\varphi(t) = v(t, \varphi(t))$, $(\forall)\ t \in I$, deci φ este soluție a sistemului diferențial (1). În plus, $\varphi(t_0) = x_1$, deci φ satisface și condițiile inițiale Cauchy (2), existența unei soluții fiind demonstrată.

Fie $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ o altă soluție a sistemului diferențial (1) care verifică și condițiile inițiale (2), unde $I_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| < \alpha\}$.

Fie $\alpha' = \min\{\alpha, a'\}$, $0 < \alpha'' < \alpha'$ și $I_2 = \{t \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| \le \alpha''\}$. Notăm $\|\varphi\| = \sup_{t \in I_2} |\varphi(t)|$ și $\|\varphi_1\| = \sup_{t \in I_2} |\varphi_1(t)|$.

Din formulele $\dot\varphi_1(t) = v(t, \varphi_1(t))$, $(\forall)\ t \in I_2$ și $\varphi_1(t_0) = x_1$, obținem formula

$$\varphi_1(t) = x_1 + \int_{t_0}^{t} v(\tau, \varphi_1(\tau))\, d\tau,\ (\forall)\ t \in I_2. \tag{6}$$

Scăzînd (5) și (6) obținem $\varphi(t) - \varphi_1(t) = \int_{t_0}^{t} \big(v(\tau, \varphi(\tau)) - v(\tau, \varphi_1(\tau))\big) d\tau$, de unde $\|\varphi - \varphi_1\| \le L\alpha'' \cdot \|\varphi - \varphi_1\|$. Dar $L\alpha'' < La' < 1$, deci $\|\varphi - \varphi_1\| = 0$, de unde rezultă că $\varphi(t) = \varphi_1(t)$, $(\forall)\ t \in I_2$, deci unicitatea locală a soluției.

COROLAR. Soluția sistemului diferențial (1) care verifică condițiile inițiale Cauchy (2) depinde continuu de punctul inițial x_1.

DEMONSTRAȚIE. Din demonstrația teoremei anterioare am văzut că soluția căutată este dată de formula $\varphi(t) = x_1 + h(t,x_1)$, $(\forall)\, t \in I$ (unde $h \in M$).

Dar h este continuă în raport cu x_1 deci soluția φ depinde continuu de punctul inițial x_1.

OBSERVAȚII. 1) În general sistemele diferențiale nu pot fi rezolvate efectiv, adică exprimînd soluțiile prin funcții elementare. Totuși este important să știm dacă un sistem dat admite, sau nu, soluții sau dacă acestea sînt unice. În acest sens, teorema 1.8 arată că dacă funcția v este de clasă C^1 pe U, atunci problema (1) + (2) admite **local** o soluție și aceasta este unică.

Teorema 1.8 nu are loc pentru orice v. Astfel, ecuația $x' = 2\sqrt{|x|}$ cu condiția Cauchy $x(t_0) = 0$ admite cel puțin două soluții distincte (soluții pe $\mathbb{R}$), anume, să luăm $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite astfel

$$\varphi_1(t) = 0;\ \varphi_2(t) = \begin{cases} -(t-t_0)^2, & t \le t_0 \\ (t-t_0)^2, & t > t_0 \end{cases}$$

În acest exemplu avem $n = 1$, $U = \mathbb{R}^2$ și funcția $v(t,x) = 2\sqrt{|x|}$ nu este de clasă C^1 pe U.

Teorema 1.8. se aplică, așa cum vom vedea în paragraful următor, pentru sisteme liniare, în care v este liniară în raport cu $x_1, \ldots, x_n$ deci pentru sisteme de forma $x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + b_i(t)$, $1 \le i \le n$, cu a_{ij}, b_i funcții de clasă C^1 pe intervale conținute în $\mathrm{pr}_1(U)$.

2) În condițiile teoremei 1.8, pentru orice $(t_0, x_0) \in U$ există o soluție $x = \varphi(t)$ a sistemului (1) cu $\varphi(t_0) = x_0$, definită într-o vecinătate a lui t_0. Această vecinătate poate fi extinsă pînă la un interval deschis maximal. Precizăm în ce sens. O soluție $x = \varphi(t)$ definită pe un interval deschis I se zice o **prelungire** a soluției $x = \psi(t)$ definită pe un interval deschis $J \subset I$ dacă $(\forall)\, t \in J$, $\varphi(t) = \psi(t)$; în particular, orice soluție este prelungirea ei înseși. O soluție care

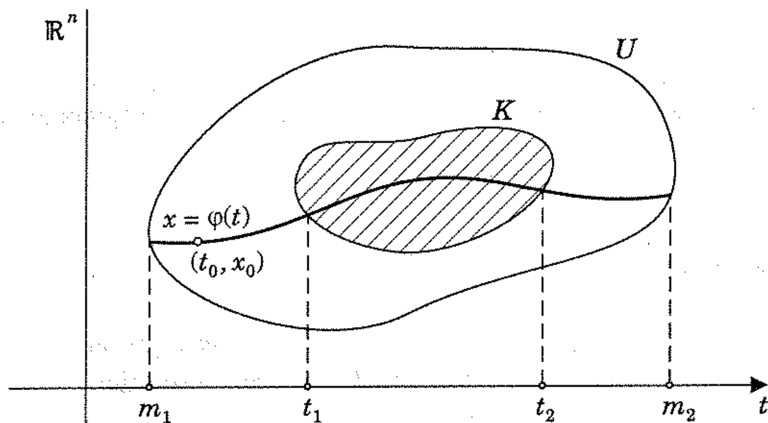


Figura V.10.

nu admite ca altă prelungire decît pe ea însăşi se zice **neprelungibilă**. Se poate arăta că $(\forall)$ $(t_0, x_0) \in U$ există o soluţie $x = \varphi(t)$, $t \in (m_1, m_2)$, a lui (1), neprelungibilă, cu $\varphi(t_0) = x_0$; în plus, pentru orice compact $K \subset U$ există t_1, t_2 astfel încît $m_1 < t_1 < t_2 < m_2$ şi dacă $t \in (m_1, t_1) \cup (t_2, m_2)$, atunci $(t, \varphi(t)) \notin K$; v. Figura V.10.

3) Pentru demonstraţia teoremei 1.8 s-ar fi putut considera spaţiul metric complet $\tilde{M} = \{\varphi : I \to \mathbb{R}^n \mid \varphi \text{ continuă}\}$ $(I = \{t \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| \leq a'\})$ şi aplicaţia

$$\tilde{\mathscr{A}} : \tilde{M} \to \tilde{M}, \text{ definite prin } (\tilde{\mathscr{A}}\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau, \varphi(\tau))\mathrm{d}\tau, \ (\forall)\, t \in I.$$

Pentru a' suficient de mic, aplicaţia $\tilde{\mathscr{A}}$ devine o contracţie şi soluţia problemei Cauchy $x(t_0) = x_0$ se putea obţine ca fiind punctul fix al contracţiei $\tilde{\mathscr{A}}$, obţinut ca limita **şirului aproximaţiilor succesive** al lui E. Picard (1856–1941): $\varphi_0, \tilde{\mathscr{A}}\varphi_0, \tilde{\mathscr{A}}^2\varphi_0, \ldots$ (φ_0 ales arbitrar).

Demonstraţia dată prezintă însă avantajul că rezolvă orice fel de problemă Cauchy $x(t_0) = x_1$ cu x_1 într-o vecinătate a lui x_0 şi va permite în plus deducerea dependenţei continue a soluţiei de punctul iniţial x_1.

Vom nota soluţia sistemului (1) care satisface condiţiile iniţiale (2) prin $g(t, x_1) = x_1 + h(t, x_1)$, pentru a pune în evidenţă dependenţa de data iniţală x_1.

EXEMPLU. Rezolvăm ecuaţia diferenţială $x' = t^2 + x^2$ cu condiţia $x(0) = 1$ prin metoda aproximaţiilor succesive a lui Picard. Notăm cu $\tilde{M}$ mulţimea funcţiilor continue pe un interval conţinînd originea şi fie operatorul

$$\tilde{\mathscr{A}} : \tilde{M} \to \tilde{M} \text{ definit prin } (\tilde{\mathscr{A}}\varphi)(t) = 1 + \int_0^t \left[\tau^2 + \varphi(\tau)^2\right]\mathrm{d}\tau.$$

Alegem $\varphi_0 \equiv 1$ şi calculăm succesiv $\varphi = \tilde{\mathscr{A}}\varphi_0$ deci

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t (\tau^2 + 1)\mathrm{d}\tau = \frac{t^3}{3} + t + 1; \ \varphi_2 = \tilde{\mathscr{A}}\varphi_1 = \tilde{\mathscr{A}}^2\varphi_0,$$

deci

$$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t \left[\tau^2 + \varphi_1(\tau)^2\right]\mathrm{d}\tau = 1 + \int_0^t \left[\tau^2 + \left(\frac{\tau^3}{3} + \tau + 1\right)^2\right]\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{t^7}{63} + \frac{2t^5}{15} + \frac{t^4}{6} + \frac{2t^3}{3} + \frac{2t^2}{2} + t + 1; \ \varphi_3 = \tilde{\mathscr{A}}\varphi_2 = \tilde{\mathscr{A}}^3\varphi_0, \text{ etc.}$$

Soluţia "exactă" va fi $\varphi(t) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(t)$; în practică $\varphi \simeq \varphi_N$ cu $N >> 1$ convenabil.

DEFINIŢIA 1.9. Fie $\dot{x} = v(t, x)$ un sistem diferenţial unde $v : I \times U \to \mathbb{R}^n$ un cîmp de vectori de clasă $C^2, U \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu şi $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Fie $v_*(t, x) : T_x U \to T_{v(t,x)}\mathbb{R}^n$ diferenţiala lui v în raport cu x (t fixat). Sistemul diferenţial

$$(7)\qquad \begin{cases} \dot{x} = v(t,x), & x \in U \subset \mathbb{R}^n \\ \dot{y} = v_*(t,x)y, & y \in T_xU = \mathbb{R}^n \end{cases}$$

se numeşte **sistemul de ecuații în variații** asociat sistemului diferențial (1); el este liniar relativ la vectorul tangent y.

Vom considera de asemenea şi sistemul diferențial

$$(7')\qquad \begin{cases} \dot{x} = v(t,x), & x \in U \subset \mathbb{R}^n \\ \dot{z} = v_*(t,x)z, \end{cases}$$

$z : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fiind o aplicație liniară; acesta este obținut din (7) prin înlocuirea vectorului y cu transformarea liniară z.

TEOREMA 1.9 **(de diferențiabilitate a soluției). Fie cîmpul** v **din sistemul diferențial** (1) **de clasă** C^2 **într-o vecinătate a punctului** (t_0, x_0). **Atunci soluția** $g(t, x_1)$ **a sistemului** (1) **cu condiția inițială** $g(t_0, x_1) = x_1$ **depinde de condiția inițială** x_1 **continuu diferențiabil, cînd** t **şi** x_1 **variază într-o vecinătate (eventual mai mică) a punctului** (t_0, x_0).

DEMONSTRAȚIE. Evident $v \in C^2 \Rightarrow v_* \in C^1$. Atunci sistemul de ecuații în variații (7′) satisface condiția din teorema 1.8 şi şirul de aproximații Picard (al contracției respective) converge uniform către soluția sistemului (7′) într-o vecinătate mică a lui t_0. Alegem condițiile inițiale $\varphi_0 = x_1$ (într-o vecinătate mică a lui x_0) şi $\psi_0 = Id$ (aplicația identică). Notăm cu φ_k aproximațiile Picard (pentru x) şi cu ψ_k (pentru z), deci

$$(8)\qquad \varphi_{k+1}(t, x_1) = x_1 + \int_{t_0}^{t} v(\tau, \varphi_k(\tau, x_1))\,d\tau,$$

$$(9)\qquad \psi_{k+1}(t, x_1) = Id + \int_{t_0}^{t} v_*(\tau, \varphi_k(\tau, x_1)) \cdot \psi_k(\tau, x_1)\,d\tau.$$

Evident $\varphi_{0*} = \psi_0$. Presupunem că $\varphi_{k*} = \psi_k$ şi derivăm pe (8):

$$\varphi_{k+1*}(t, x_1) = Id + \int_{t_0}^{t} v_*(\tau, \varphi_k(\tau, x_1)) \cdot \varphi_{k*}(\tau, x_1)\,d\tau =$$

$$= Id + \int_{t_0}^{t} v_*(\tau, \varphi_k(\tau, x_1)) \cdot \psi_k(\tau, x_1)\,d\tau = \psi_{k+1}(t, x_1),$$

deci $\varphi_{k+1*} = \psi_{k+1}$, ținînd seama de (9). Atunci şirul $\{\psi_k\}$ este şirul derivatelor şirului $\{\varphi_k\}$ şi ambele şiruri converg uniform pentru $|t - t_0|$ suficient de mic.

Rezultă că funcția limită $g(t, x_1) = \lim\limits_{k \to \infty} \varphi_k(t, x_1)$ este continuu diferențiabilă în raport cu x_1.

Reținem deci că pentru v de clasă C^2, g este de clasă C^1 în variabila x_1.

COROLAR. **Diferențiala** g_* **a unei soluții a sistemului** (1) **cu condiția inițială** x_1 **satisface sistemul de ecuații în variații** (7′) **cu condiția inițială** $z(t_0) = Id$, **adică**

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t, x_1) = v(t, g(t, x_1))$$

$$\frac{\partial}{\partial t} g_*(t, x_1) = v_*(t, g(t, x_1)) \cdot g_*(t, x_1),$$

$$g(t_0, x_1) = x_1, \ g_*(t_0, x_1) = Id.$$

DEMONSTRAȚIE. Rezultă direct din demonstrația teoremei 1.9.

TEOREMA 1.10. Fie cîmpul v din sistemul diferențial (1) de clasă C^r ($r \geq 2$) într-o vecinătate a punctului (t_0, x_0). Atunci soluția $g(t, x_1)$ a sistemului (1) cu condiția inițială $g(t_0, x_1) = x_1$ este de $r-1$ continuu diferențiabilă în raport cu condiția inițială x_1, cînd t și x_1 variază într-o vecinătate (eventual mai mică) a punctului (t_0, x_0) [deci $v \in C^r \Rightarrow g \in C_{x_1}^{r-1}$].

DEMONSTRAȚIE. Inducție după r. Cazul $r = 2$ s-a demonstrat în teorema 1.9. Deoarece $v \in C^r \Rightarrow v_* \in C^{r-1}$, rezultă că sistemului de ecuații în variații (7') i se poate aplica ipoteza de inducție. Rezultă deci că

$$g_* \in C_{x_1}^{r-2} \Rightarrow g \in C_{x_1}^{r-1}.$$

LEMA 1.11. Fie $U \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu, $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$, $f \in C_x^r$, $f \in C^{r-1}$. Atunci funcția

$$F(t, x) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, x)\, d\tau, \ [t_0, t] \subset I \text{ și } x \in U,$$

este de clasă C^r în raport cu t și x simultan.

DEMONSTRAȚIE. Orice derivată parțială de ordin r a lui F în raport cu variabilele x_i și t (care, evident, există), care conține derivata în raport cu t, se exprimă în funcție de f și derivatele parțiale ale lui f, de ordin mai mic decît r și este prin urmare, continuă, deci F este de clasă C^r.

COROLARUL 1. În condițiile teoremei 1.10 avem că

$$v \in C^r \Rightarrow g \in C^{r-1}.$$

DEMONSTRAȚIE. Deoarece avem

$$g(t, x_1) = x_1 + \int_{t_0}^{t} v(\tau, g(\tau, x_1))\, d\tau$$

și cum $g \in C^0$ (vezi teorema 1.8 și corolarul ei), din lema 1.11 rezultă

$$g \in C^1 \Rightarrow g \in C^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow g \in C^{r-1},$$

aplicînd teorema 1.10 în mod repetat.

COROLARUL 2. În condițiile teoremei 1.10, dacă $v \in C^\infty$, atunci $g \in C^\infty$.

OBSERVAȚII. 1) Se poate demonstra că dacă v este o funcție analitică, atunci și soluția g este analitică.

2) Se poate demonstra (mai greu!) că dacă de fapt are loc rezultatul mai tare: $v \in C^r \Rightarrow g \in C^r$.

TEOREMA 1.12. (de dependență a soluției de parametri). Fie familia de sisteme diferențiale

$$(10) \qquad \dot{x} = v(t, x, \alpha),\ x \in U \subset \mathbb{R}^n,\ \alpha \in A \subset \mathbb{R}^m,\ t \in I \subset \mathbb{R}$$

definită în spațiul de faze U de cîmpul vectorial v de clasă C^r $(r \geq 2)$ (în raport cu t și x), care depinde diferențiabil de clasă C^r de parametrul $\alpha \in A$, unde A este un domeniu. Atunci soluția $\varphi(t)$ a sistemului diferențial (10), cu condiția inițială $\varphi(t_0) = x_1$, este funcție diferențiabilă (de clasă C^{r-1}) de t, x_1 și α pentru valori suficient de mici ale lui $|t - t_0|$; $|x_1 - x_0|$ și $|\alpha - \alpha_0|$ ($\alpha_0 \in A$ fixat).

DEMONSTRAȚIE. Vom considera în domeniul $U \times A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ cîmpul de vectori $(v(t, x, \alpha), 0)$ și sistemul diferențial

$$(11) \qquad \begin{cases} \dot{x} = v(t, x, \alpha) \\ \dot{\alpha} = 0, \end{cases}$$

asociat lui. Conform teoremei 1.10 și corolarului 1, soluția acestui sistem diferențial, care verifică condiția inițială $(x(t_0), \alpha(t_0)) = (x_1, \alpha)$, este funcție diferențială de clasă C^{r-1} de t, x_1 și α pentru $|t - t_0|$, $|x_1 - x_0|$ și $|\alpha - \alpha_0|$ suficient de mici. Dar soluția respectivă este $(\varphi(t), \alpha)$, unde $\varphi(t)$ este soluția sistemului diferențial (10) cu condiția inițială $\varphi(t_0) = x_1$. Rezultă că și $\varphi(t)$ depinde diferențiabil de t, x_1 și α.

COROLAR. Fie $\dot{x} = v(t, x)$ un sistem diferențial, unde $v : I \times U \to \mathbb{R}^n$ este un cîmp de vectori de clasă $C^r (r \geq 2)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu și $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Fie condiția inițială $(t_0, x_1) \in I \times U$. Atunci soluția $\varphi(t)$ a sistemului diferențial, cu condiția inițială $\varphi(t_0) = x_1$, este funcție diferențială de clasă C^{r-1} și de t_0.

DEMONSTRAȚIE. Fie $t = \tau + t_0$. Pentru $|\tau|$ suficient de mic $t \in I$ și fie atunci $\tilde{v}(\tau, x, t_0) = v(\tau + t_0, x)$.

Soluția $\psi(\tau)$ a sistemului diferențial cu parametrul t_0, $\dot{x} = \tilde{v}(\tau, x, t_0)$, care verifică condiția inițială $\psi(0) = x_1$, este funcție diferențială de clasă C^{r-1} de parametrul t_0. Dar funcția $\varphi(t) = \psi(t - t_0)$ este soluția sistemului diferențial $\dot{x} = v(t, x)$ cu condiția inițială $\varphi(t_0) = x_1$, deci este funcție diferențială de clasă C^{r-1} de parametrul t_0.

OBSERVAȚIE. Ținînd seama de observația anterioară, rezultă că, de fapt, soluția sistemului diferențial este chiar funcție de clasă C^r în raport cu parametrii și cu condițiile inițiale.

§ 2. Sisteme diferențiale liniare

2.1. Sisteme diferențiale liniare cu coeficienți oarecare

Teoria ecuațiilor liniare este utilă atît prin aplicațiile ei directe în probleme liniare, cît și în calitate de primă aproximație în studierea problemelor neliniare. Această teorie are marele avantaj de a fi definitivă; de exemplu, ea permite rezolvarea tuturor ecuațiilor liniare autonome.

Fie $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un interval şi pentru $(\forall) t \in I$ fie $A(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ operatorul liniar definit de matricea $A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \le i, j \le n}$, unde $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ sînt funcții continue. Fie $b(t) = (b_i(t))_{1 \le i \le n}$, unde $b_i : I \to \mathbb{R}$ sînt funcții continue.

Sistemul diferențial cu spațiul fazelor $\mathbb{R}^n$, dat de cîmpul de vectori $v(t,x) = A(t)x + b(t)$, adică

$$(1) \qquad \dot{x} = A(t)x + b(t),$$

se numeşte **sistem diferențial liniar neomogen (de ordinul întîi), cu coeficienți variabili.** Dacă $b(t) \equiv 0$, sistemul diferențial

$$(2) \qquad \dot{x} = A(t)x,$$

se numeşte **sistem diferențial omogen, cu coeficienți variabili.**

Sistemul diferențial (1) poate fi scris sub forma scalară

$$(1') \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t). \end{cases}$$

În cazul sistemelor diferențiale liniare se poate întări teorema 1.8 (de existență şi unicitate) în sensul că soluțiile sînt globale, definite pe tot intervalul I (deci prelungibile la întreg I).

TEOREMA 2.1. **Pentru sistemul diferențial** (1) **există şi este unică o soluție** $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, **care verifică condițiile inițiale**

$$(3) \qquad x(t_0) = x_0, \text{ cu } t_0 \in I \text{ şi } x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ fixate arbitrar.}$$

DEMONSTRAȚIE. Raționamentul este în linii mari acelaşi ca în teorema 1.8, doar că nu vom mai obține o contracție. Fie intervalul $I_1 = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ astfel încît $a < \alpha < t_0 < \beta < b$ şi fie $M = \{h : I \to \mathbb{R}^n \mid h \text{ continuă}\}$. Definim operatorul $\mathscr{A} : M \to M$ prin

$$(4) \qquad (\mathscr{A}h)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(\tau)h(\tau) + b(\tau)]\, d\tau.$$

Diferențiala în raport cu x a funcției $v(t, x) = A(t)x + b(t)$ este $v_*(t, x) = A(t)$.

Pe intervalul compact I_1 funcțiile $a_{ij}(t)$ sînt mărginite, deci există o constantă L astfel încît $|A(t) \cdot h(t)| \le L \cdot |h(t)|$, $(\forall) t \in I_1$.

Fie $\varphi_0 \in M$ o funcție oarecare şi $\varphi_1 = \mathscr{A}\varphi_0 \in M$. Pe intervalul compact I_1 funcțiile φ_0 şi φ_1 sînt mărginite, deci există o constantă C astfel încît

$$|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| \le C, \quad (\forall) t \in I_1.$$

Construim şirul aproximațiilor Picard, $\varphi_0, \varphi_1 = \mathscr{A}\varphi_0, \dots, \varphi_{i+1} = \mathscr{A}\varphi_i, \dots$ şi avem pentru $(\forall) t \in I_1$:

$$|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| = \left| \int_{t_0}^{t} A(\tau)(\varphi_1(t) - \varphi_0(\tau))\, d\tau \right| \le \left| \int_{t_0}^{t} |A(\tau)| \cdot |(\varphi_1(t) - \varphi_0(\tau))|\, d\tau \right| \le (LC)|t - t_0|;$$

$$|\varphi_3(t) - \varphi_2(t)| \le \left| \int_{t_0}^{t} |A(\tau)| \cdot |(\varphi_2(t) - \varphi_1(\tau))|\, d\tau \right| \le (L^2C)\frac{|t - t_0|^2}{2!};$$

. . . .

$$\left|\varphi_{i+1}(t)-\varphi_i(t)\right| \le \left|\int_{t_0}^{t} |A(\tau)|\cdot|(\varphi_i(\tau)-\varphi_{i-1}(\tau))|\,d\tau\right| \le (L^i C)\frac{|t-t_0|^i}{i!};$$

Dacă notăm pentru orice $h \in M$ cu $\|h\| = \sup_{t\in I_1} |h(t)|$, obținem inegalitățile:

$$(5) \qquad \|\varphi_{i+1}-\varphi_i\| \le C\frac{(L(\beta-\alpha))^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots .$$

Scriind șirul $\{\varphi_i\}_{i\le 0}$ sub forma $\varphi_i = \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + \dots + (\varphi_i - \varphi_{i-1})$ rezultă că φ_i este termenul general al șirului sumelor parțiale ale seriei

$\varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty}(\varphi_{k+1} - \varphi_k)$. Din inegalitățile (5) rezultă că această serie de funcții este majorată pe intervalul I_1 de seria numerică convergentă

$$\|\varphi_0\| + \sum_{k=0}^{\infty} C\cdot\frac{(L(\beta-\alpha))^k}{k!}.$$

Atunci, din criteriul Weierstrass, rezultă că seria de funcții $\varphi_0 + \sum_{k=0}^{\infty}(\varphi_{k+1} - \varphi_k)$, adică șirul $\{\varphi_i\}_{i\ge 0}$ converge uniform pe intervalul I_1 la o funcție continuă $\varphi(t)$, definită pe I_1. Putem scrie pentru $t \in I_1$:

$$\|\mathscr{A}\varphi_i - \mathscr{A}\varphi\| \le \sup_{t\in I_1}\left|\int_{t_0}^{t}|A(\tau)|\cdot|\varphi_i(\tau)-\varphi(\tau)|\,d\tau\right| \le L(\beta-\alpha)\cdot\|\varphi_i-\varphi\|.$$

Rezultă că șirul $\{\mathscr{A}\varphi_i\}_{i\ge 0}$ converge uniform pe intervalul I_1 la funcția $\mathscr{A}\varphi$. Trecînd la limită în egalitatea $\varphi_{i+1} = \mathscr{A}\varphi_i$, obținem

(6) $\quad \varphi = \mathscr{A}\varphi.$

Deoarece I_1 a fost ales arbitrar cu condițiile $a < \alpha < t_0 < \beta < b$, rezultă că șirul $\{\varphi_i\}_{i\ge 0}$ converge în orice punct al intervalului $I = (a, b)$, deci funcția $\varphi(t)$ este definită și continuă pe tot intervalul I. Atunci, pentru orice $t \in I$, egalitatea (6) se scrie:

$$(7) \qquad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t}[A(\tau)\varphi(\tau) + b(\tau)]\,d\tau.$$

La fel ca în demonstrația teoremei 1.8, rezultă că φ este de clasă C^1 pe I, este soluție a sistemului (1), verifică condițiile inițiale (3) și este unică.

TEOREMA 2.2. Fie $x' = A(t)x$ un sistem diferențial liniar omogen cu coeficienți variabili, $A(t) = (a_{ij}(t))_{1\le i,j\le n}$, unde $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ sînt continue.

Fie $S = \{x : I \to \mathbb{R}^n \mid x$ soluție a sistemului $x' = A(t)\,x\}$ mulțimea soluțiilor sistemului diferențial liniar omogen. Atunci avem:

a) **S este spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$.**

b) **Fie $t_0 \in I$ fixat și $x \in S$ cu $x(t_0) = 0$. Rezultă $x \equiv 0$.**

c) **Fie $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)} \in S$ şi $t_0 \in I$ fixat. Soluțiile $\{x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}\}$ sînt liniar independente dacă şi numai dacă vectorii $\{x^{(1)}(t_0), x^{(2)}(t_0), ..., x^{(k)}(t_0)\}$ sînt liniar independenți în $\mathbb{R}^n$.**

d) $\dim_{\mathbb{R}} S = n$.

DEMONSTRAȚIE. a) Mulțimea $V = \{f : I \to \mathbb{R}^n\}$ este, evident, un spațiu vectorial real şi $S \subset V$. Vom arăta că S este un subspațiu vectorial al lui V.

Pentru $(\forall)\, x, y \in S$ avem

$$x'(t) = A(t)\, x\,(t) \text{ şi } y'(t) = A(t)y(t), (\forall)\, t \in I,$$

deci

$$(x - y)'(t) = A(t)(x - y)(t), (\forall)\, t \in I, \text{ adică } x - y \in S.$$

Pentru $(\forall)\, x \in S$ şi $(\forall)\, \alpha \in \mathbb{R}$ avem $(\alpha x)'(t) = A(t)(\alpha x)(t)$, $(\forall)\, t \in I$, deci $\alpha x \in S$. Conform criteriului subspațiului, rezultă că S este un spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$.

b) Sistemul $x' = A(t)x$ are, evident, soluția nulă care verifică condiția inițială $0(t_0) = 0 = x(t_0)$. Din unicitatea soluției rezultă $x \equiv 0$.

c) Presupunem că $\{x^{(1)}(t_0), x^{(2)}(t_0), ..., x^{(k)}(t_0)\}$ este un sistem liniar independent de vectori în $\mathbb{R}^n$ şi fie $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^{(i)} = 0$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, o combinație liniară nulă între funcțiile $\{x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}\}$. În particular, obținem $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^{(i)}(t_0) = 0$, de unde rezultă că $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, ..., k$, deci soluțiile $\{x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}\}$ sînt liniar independente.

Reciproc, fie $\{x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}\}$ un sistem liniar independent de soluții şi fie

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^{(i)}(t_0) = 0, \ \alpha_i \in \mathbb{R}$$

o combinație liniară nulă între vectorii $\{x^{(1)}(t_0), x^{(2)}(t_0), ..., x^{(k)}(t_0)\}$. Funcția $y = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^{(i)} \in S$ (conform punctului a)) şi $y(t_0) = 0$, deci $y \equiv 0$ (conform punctului b)). Deci avem $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^{(i)} = 0$, de unde rezultă că $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, ..., k$, adică vectorii $\{x^{(1)}(t_0), x^{(2)}(t_0), ..., x^{(k)}(t_0)\}$ sînt liniar independenți.

d) Fie $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$ şi $t_0 \in I$ fixat. Notăm cu $x^{(i)} \in S$ soluția sistemului diferențial omogen care verifică condiția inițială $x(t_0) = e_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Deoarece $\{x^{(1)}(t_0), x^{(2)}(t_0), ..., x^{(n)}(t_0)\} = \mathscr{B}$ este un sistem liniar independent de vectori în $\mathbb{R}^n$ rezultă, conform punctului c) că soluțiile $\{x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}\}$ sînt liniar independente în S. Aplicînd din nou punctul c) şi faptul că orice sistem cu mai mult de n vectori în $\mathbb{R}^n$ este liniar dependent, rezultă că orice mulțime din S cu mai mult de n soluții este liniar dependentă, deci $\dim_{\mathbb{R}} S = n$.

DEFINIȚIA 2.1. Orice bază a spațiului S al soluțiilor sistemului diferențial liniar omogen $x' = A(t)x$ se numeşte **sistem fundamental de soluții**.

Fie $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\} \subset S$ un sistem fundamental de soluții

$$x^{(j)}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(j)}(t) \\ x_2^{(j)}(t) \\ \vdots \\ x_n^{(j)}(t) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

unde $x_k^{(j)} : I \to \mathbb{R}$ sînt funcții de clasă C^1 (de fapt de clasă C^r dacă a_{ij} sînt funcții de clasă C^r).

DEFINIȚIA 2.2. Matricea de funcții

$$X(t) = \left(x^{(1)}(t) \mid x^{(2)}(t) \mid \cdots \mid x^{(n)}(t)\right) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) & x_2^{(2)}(t) & \cdots & x_2^{(n)}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{(1)}(t) & x_n^{(2)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

se numește **matrice fundamentală** a sistemului diferențial și determinantul ei, $\det X(t) = W(t)$, se numește **wronskianul** sistemului fundamental $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\}$, după numele lui J. M. H. Wronski, 1778–1853.

COROLAR. Fie $X(t) \in M_n(C_I^1)$ o matrice fundamentală a sistemului diferențial liniar omogen $x' = A(t)x$. Atunci orice soluție $x \in S$ are forma $x(t) = X(t) \cdot C$, unde $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soluția problemei Cauchy $x' = A(t)x$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, are forma $x(t) = X(t) \cdot (X(t_0))^{-1}x_0$.

DEMONSTRAȚIE. Deoarece coloanele matricei fundamentale $X(t)$, $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\} \subset S$ formează o bază a lui S, pentru orice $x \in S$ există constantele reale $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ astfel încît $x = c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + \ldots + c_nx^{(n)}$.

Rezultă că $(\forall)\, t \in I$ avem $x(t) = X(t) \cdot C$, unde $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Impunînd condiția $x(t_0) = x_0$ soluției oarecare $x(t) = X(t) \cdot C$, obținem sistemul algebric liniar

$$(8) \qquad X(t_0) \cdot C = x_0.$$

Deoarece $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\}$ este un sistem fundamental de soluții, coloanele matricei $X(t_0)$ sînt liniar independente, deci rang $X(t_0) = n$, adică $W(t_0) = \det X(t_0) \neq 0$. Atunci sistemul algebric liniar (8) are soluția unică $C = (X(t_0))^{-1} \cdot x_0$, deci soluția problemei Cauchy este $x(t) = X(t_0) \cdot (X(t_0))^{-1} \cdot x_0$.

OBSERVAȚIE. Soluția $x(t) = X(t) \cdot C$, cu $C \in M_{n,1}(\mathrm{R})$ se mai numește și **soluția generală** a sistemului diferențial omogen.

TEOREMA 2.3. (J. LOUVILLE, 1809–1882). **Dacă $W(t)$ este wronskianul sistemului fundamental de soluții $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\}$ al sistemului diferențial liniar omogen $x' = A(t)x$, atunci**

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}\, A(\tau)\, d\tau},$$

unde $\mathrm{Tr}\, A(t) = a_{11}(t) + a_{22}(t) + \ldots + a_{nn}(t)$ **este urma matricei** $A(t)$ **și** $t_0 \in I$ **este fixat.**

DEMONSTRAȚIE. Fie $W(t) = \det X(t)$. Scriind $W(t)$ cu ajutorul definiției determinantului și derivînd în raport cu t, obținem că

$$W(t) = W_1(t) + W_2(t) + \ldots + W_n(t),$$

unde

$$W_i(t) = i \cdots \begin{vmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_i'^{(1)}(t) & x_i'^{(2)}(t) & \cdots & x_i'^{(n)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^{(1)}(t) & x_n^{(2)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{vmatrix},$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$, are aceleași linii ca și $W(t)$ cu excepția liniei i–a, în care apar derivatele funcțiilor $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(n)}$. Deoarece coloanele matricei $X(t)$ sînt soluții ale sistemului $x' = A(t)x$, obținem relațiile

$$x_i^{(j)'}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) \cdot x_k^{(j)}(t);\ i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Înlocuind pe $x_i^{(j)'}(t)$ în $W_i(t)$ obținem că $W_i(t)$ este egal cu suma a n determinanți, dintre care $n - 1$ au cîte două coloane proporționale, deci

$$W_i(t) = a_{ii}(t) \cdot W(t),\ (\forall)\ t \in I.$$

Rezultă atunci că $W'(t) = \mathrm{Tr}\, A(t) \cdot W(t)$, $(\forall)\ t \in I$, adică funcția $W(t)$ satisface o ecuație diferențială liniară omogenă. Aplicînd teorema 1.3 rezultă

$$W(t) = C \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}\, A(\tau)\, d\tau}, \text{ cu } C \in \mathbb{R} \text{ constantă.}$$

Pentru $t = t_0$ obținem $C = W(t_0)$, deci

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}\, A(\tau)\, d\tau}.$$

OBSERVAȚIE. Din teorema 2.3 rezultă că wronskianul unui sistem fundamental de soluții nu depinde de sistemul fundamental de soluții decît prin intermediul constantei multiplicative nenule $W(t_0)$. Se observă că din condiția $W(t_0) \neq 0$, rezultă că $W(t) \neq 0$ pentru orice $t \in I$.

LEMA 2.4. Fie S **mulțimea soluțiilor sistemului diferențial liniar omogen** $x' = A(t)x$ **și** $\mathscr{S}$ **mulțimea soluțiilor sistemului diferențial liniar neomogen** $x' = A(t)x + b(t)$, **unde** $A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \le i,j \le n}$, $b(t) = (b_i(t))_{1 \le i \le n}$, $a_{ij}, b_i : I \to \mathbb{R}$ **sînt funcții continue. Dacă** $x_p \in \mathscr{S}$ **este o soluție fixată (particulară), atunci avem** $\mathscr{S} = S + x_p = \{x + x_p \mid x \in S\}$.

DEMONSTRAȚIE. Atît soluțiile din S cît și soluțiile din $\mathscr{S}$ sînt definite pe tot intervalul real $I = (a, b)$, deci în egalitatea $\mathscr{S} = S + x_p$ adunarea funcțiilor și egalitatea funcțiilor se consideră pe intervalul I.

Pentru orice $x \in S$ avem $x'(t) = A(t)x(t)$ şi adunînd cu relația $x_p'(t) = A(t)x_p(t) + b(t)$ obținem $(x + x_p)'(t) = A(t)(x + x_p)(t) + b(t)$, $(\forall)\, t \in I$, deci $S + x_p \subset \mathscr{S}$. Reciproc, pentru orice $y \in \mathscr{S}$ avem $y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$, de unde $(y - x_p)'(t) = A(t)(y - x_p)(t)$, $(\forall)\, t \in I$, adică $y - x_p = x \in S$, deci $y = x + x_p \in S + x_p$ şi $\mathscr{S} \subset S + x_p$.

Remarcăm de asemenea că dacă $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ sînt respectiv soluții ale sistemelor $\dot{x} = A(t)x + b_1(t)$, $\dot{x} = A(t)x + b_2(t)$, atunci $x_1(t) + x_2(t)$ este soluție a sistemului $\dot{x} = A(t)x + b_1(t) + b_2(t)$.

TEOREMA 2.5 (Lagrange). **Fie $X(t) \in M_n(C_I^1)$ o matrice fundamentală a sistemului diferențial liniar omogen $x' = A(t)x$. Atunci orice soluție $x \in \mathscr{S}$ are forma**

$$x(t) = X(t)\left(C + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right),$$

unde $t_0 \in I$ este fixat şi $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Soluția problemei Cauchy $x' = A(t)x + b(t)$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ are forma

$$x(t) = X(t)\left(X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

DEMONSTRAȚIE. Din lema anterioară rezultă că este suficient să aflăm o soluție particulară $x_p \in \mathscr{S}$. Vom aplica metoda "variației constantelor" a lui Lagrange, adică vom căuta o soluție particulară de forma

$$x_p(t) = X(t) \cdot C(t) = c_1(t) \cdot x^{(1)}(t) + c_2(t) \cdot x^{(2)}(t) + \ldots + c_n(t)x^{(n)}(t),$$

unde constantele $c_1, c_2, \ldots, c_n$ din "soluția generală" a sistemului omogen au fost înlocuite cu funcțiile necunoscute de clasă C^1, $c_i : I \to \mathrm{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Calculăm derivata

$$x_p'(t) = c_1'(t)x^{(1)}(t) + \ldots + c_n'(t)x^{(n)}(t) + c_1(t) \cdot x^{(1)'}(t) + \ldots + c_n(t)x^{(n)'}(t).$$

Impunem condiția ca x_p să fie soluție a sistemului diferențial neomogen $x' = A(t)x + b(t)$ şi ținem seamă de faptul că $x^{(j)}$, $j = 1,2,\ldots,n$, sînt soluții ale sistemului diferențial omogen, adică $x^{(j)'}(t) = A(t) \cdot x^{(j)'}(t), j = 1, 2, \ldots, n$.

Rezultă egalitatea:

$$c_1'(t)x^{(1)}(t) + \ldots + c_n'(t)x^{(n)}(t) + c_1(t) \cdot x^{(1)'}(t) + \ldots + c_n(t)x^{(n)'}(t) =$$
$$= c_1(t)A(t)x^{(1)}(t) + \ldots + c_n(t)A(t)x^{(n)}(t) + b(t),$$

deci $c_1'(t)x^{(1)}(t) + \ldots + c_n'(t)x^{(n)}(t) = b(t)$, $(\forall)\, t \in I$. Putem scrie egalitatea de mai sus sub forma $X(t) \cdot C'(t) = b(t)$, unde

$$C'(t) = \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\operatorname{rang} X(t) = n$ rezultă că $W(t) = \det X(t) \neq 0$, deci $X(t)$ este inversabilă. Atunci avem $C'(t) = X^{-1}(t) \cdot b(t)$, $(\forall)\, t \in I$.

Integrînd pe fiecare componentă obținem, în scriere vectorială

$$C(t)=\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)b(\tau)\,d\tau,$$

deci soluția particulară are forma

$$x_p(t)=X(t)\cdot\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)b(\tau)\,d\tau,\ (\forall)\ t\in I.$$

Atunci o soluție oarecare $x\in \mathcal{S}$ va avea forma

$$x(t)=X(t)\left(C+\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)b(\tau)\,d\tau\right),\ (\forall)\ t\in I.$$

Impunînd condiția $x(t_0)=x_0$ obținem, ca și în demonstrația corolarului anterior, sistemul algebric liniar $X(t_0)C=x_0$, cu soluția unică $C=X^{-1}(t_0)x_0$.

Atunci, soluția problemei Cauchy are forma

$$x(t)=X(t)\left(X^{-1}(t_0)x_0+\int_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)b(\tau)\,d\tau\right),\ (\forall)\ t\in I.$$

OBSERVAȚIE. Reținem că rezolvarea unui sistem diferențial liniar neomogen revine la aflarea unui sistem fundamental de soluții pentru sistemul diferențial liniar omogen, o dată cu aflarea unei soluții particulare a sistemului neomogen. În general, este dificil de aflat un sistem fundamental de soluții pentru un sistem liniar cu coeficienți variabili. În cazul coeficienților constanți vom folosi, așa cum vom vedea în continuare, rezultate profunde de algebră matriceală.

Interpretare sistemică

Să considerăm un sistem diferențial de ordin I, $\dot{x}=A(t)\cdot x$, liniar și omogen (cu coeficienți continui pe un interval I). Fixăm $t_0\in I$ și definim aplicația $\varphi_{t_0}:\mathbb{R}^n\to S$, care asociază oricărui $x_0\in\mathbb{R}^n$ acea unică soluție $x(t)$ pentru care $x(t_0)=x_0$. Pentru orice $t\in I$, aplicația $\varphi_{t_0t}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $x_0\to\varphi_{t_0}(x_0)(t)$ se numește **operatorul de tranziție** de la t_0 la t. Se arată ușor că aplicația φ_{t_0t} este liniară și matricea ei asociată în baza canonică $\{e_1,\dots,e_n\}$ a lui $\mathbb{R}^n$, $\Phi(t_0,t)=(x_i^{(j)}(t))_{1\le i,j\le n}$, este definită prin aceea că $\varphi_{t_0t}(e_j)=\sum_{i=1}^{n}x_i^{(j)}(t)\cdot e_i$, $1\le j\le n$. Deoarece $\varphi_{t_0t}(e_j)=\varphi_{t_0}(e_j)(t)=$ valoarea în t a soluției ce satisface $x(t_0)=e_j$, rezultă că în **matricea de tranziție** $\Phi(t_0,t)$ coloanele sînt soluțiile $x^{(1)}(t),\dots,x^{(n)}(t)$ care pentru t_0 iau respectiv valorile $e_1,\dots,e_n$. Aceeași proprietate o are matricea $X(t)\cdot X(t_0)^{-1}$, oricare ar fi matricea fundamentală a sistemului $x = A(t)x$. Deci $\Phi(t_0,t)=X(t)\cdot X(t_0)^{-1}$.

Ca o consecință a teoremei 2.5, se obține următorul

COROLAR. Soluția problemei Cauchy $x' = A(t)x + b(t)$, $x(t_0) = x_0$ **este**

$$x(t) = \Phi(t_0, t)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau, t) \cdot b(\tau)\, d\tau,\ (\forall)\ t \in I.$$

Aşadar, cunoscînd legea diferențială de evoluție $x' = A(t)x + b(t)$ a unui sistem dinamic Σ şi vectorul de stare x_0 la un moment dat t_0, se poate determina explicit starea sistemului Σ la orice moment $t \in I$ (ceea ce justifică termenul de matrice de tranziție).

Matricea de tranziție are următoarele proprietăți, uşor de verificat:

1. $\Phi(t, t) = 1_{\mathbb{R}^n}$, $(\forall)\ t \in I$;

2. $\Phi(t, s) \cdot \Phi(s, u) = \Phi(t, u)$, $(\forall)\ t, s, u \in I$;

3. Pentru orice $t, s \in I$, matricea $\Phi(t, s)$ este inversabilă şi $\Phi(t, s)^{-1} = \Phi(s, t)$;

4. $\dfrac{d\Phi(t_0, t)}{dt} = A(t) \cdot \Phi(t_0, t)$;

5. Soluția generală a sistemului $x'(t) = A(t)\, x$ este $x(t) = \Phi(t_0, t) \cdot C$ cu $t_0 \in I$ fixat şi C vector–coloană constant;

6. Soluția sistemului $x' = A(t)x + b(t)$ care verifică $x(t_0) = x_0$ este

$$x(t) = \underbrace{\Phi(t_0,\ t)x_0}_{\text{partea liberă}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \Phi(s, t)b(s)\, ds}_{\text{partea forțată}}$$

În particular, soluția sistemului omogen $x' = A(t) \cdot x$ cu condiția $x(t_0) = x_0$ este $x(t) = \Phi(t_0, t) \cdot x_0$.

Vom avea ulterior că, în cazul cînd matricea A este constantă, matricea de tranziție pentru sistemul $x' = Ax$ se exprimă explicit prin exponențiala matricei At.

2.2. Sisteme diferențiale liniare cu coeficienți constanți

Fie $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ operatorul liniar definit de matricea $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n} \in M_n(\mathbb{R})$. Sistemul diferențial autonom cu spațiul fazelor R^n, dat de cîmpul de vectori $v(x) = Ax$, adică

$$(1) \qquad \dot{x} = Ax,$$

se numeşte **sistem diferențial liniar omogen cu coeficienți constanți.**

Deoarece elementele a_{ij} $(1 \le i, j \le n)$ sînt constante, din teorema 2.1 rezultă că soluțiile sistemului (1) sînt definite pe intervalul $I = (-\infty, +\infty)$. Deoarece cîmpul vectorial $v(x) = Ax$ este de clasă C^∞, din corolarul 2 al teoremei 1.10 rezultă că soluțiile sistemului (1) sînt funcții de clasă C^∞ pe $\mathbb{R}$.

PROPOZIȚIA 2.6. Fie $\dot{x} = Ax$ **un sistem diferențial liniar omogen cu coeficienți constanți** $(A \in M_n(\mathbb{R}))$ **şi fie** S **spațiul vectorial real al soluțiilor sale.**

a) **Dacă** $x \in S$ **atunci** $x' \in S$.

b) **Fie** $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ **şi** $x_0 \in V_\lambda$. **Fie** $t_0 \in \mathbb{R}$ **fixat şi fie** $x \in S$ **soluția care verifică condiția inițială** $x(t_0) = x_0$. **Atunci** $x(t) \in V_\lambda$ **pentru orice** $t \in \mathbb{R}$.

c) **Fie $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ și $u \in V_\lambda$. Atunci funcția $x(t) = e^{\lambda t} \cdot u$, $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$ este soluție a sistemului** (1).

DEMONSTRAȚIE. a) Fie $x \in S$; atunci $x' = Ax$ și deoarece x este funcție de clasă C^∞ putem deriva relația anterioară: $x'' = A'x + A \cdot x'$ sau $(x')' = Ax'$, deci $x' \in S$.

b) Dacă $x_0 = 0$ atunci $x(t) = 0$, $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$, (teorema 2.2, b)) deci $x(t) \in V_\lambda$. Fie $x_0 \neq 0$; din $x_0 \in V_\lambda$ rezultă că $Ax_0 = \lambda x_0$. Funcția $y = Ax - \lambda x = x' - \lambda x \in S$ și $y(t_0) = Ax_0 - \lambda x_0 = 0$, deci $y(t) = 0$, $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$, adică $Ax(t) = \lambda x(t)$, de unde rezultă că $x(t) \in V_\lambda$, $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$.

c) Avem $x'(t) = \lambda e^{\lambda t} \cdot u$; $Ax(t) = e^{\lambda t}Au = \lambda e^{\lambda t} \cdot u$, deci $x'(t) = Ax(t)$, $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$, adică $x \in S$.

TEOREMA 2.7. Fie $x' = Ax$ un sistem diferențial liniar omogen cu coeficienți constanți, astfel încît matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$ este diagonalizabilă peste $\mathbb{R}$ și fie $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ o bază în $\mathbb{R}^n$ formată cu vectori proprii ai matricei A. Atunci mulțimea de soluții $\{x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}\} \subset S$, unde $x^{(i)}(t) = e^{\lambda_i t} \cdot u_i$, cu $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $(i = 1, 2, ..., n)$ valorile proprii ale lui A, este un sistem fundamental de soluții.

DEMONSTRAȚIE. Din propoziția anterioară punctul c) rezultă că $x^{(i)}$, $i = 1, 2, ..., n$, este soluție a sistemului diferențial $x' = Ax$. Pentru $t = 0$ obținem $x^{(i)}(0) = u_i$, deci $\{x^{(1)}(0), x^{(2)}(0), ..., x^{(n)}(0)\} = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ este sistem liniar independent de vectori în $\mathbb{R}^n$. Conform teoremei 2.2, c) mulțimea $\{x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}\} \subset S$ este sistem liniar independent. Deoarece $\dim_{\mathbb{R}} S = n$ (teorema 2.2, d), rezultă că $\{x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}\}$ este bază în S, deci este sistem fundamental de soluții.

OBSERVAȚII. În concluzie, în cazul cînd matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$ este diagonalizabilă peste $\mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ sînt valorile sale proprii și $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ este o bază în $\mathbb{R}^n$ formată cu vectori proprii corespunzători, atunci o matrice fundamentală a sistemului diferențial $x' = Ax$ este

$$X(t) = \left(e^{\lambda_1 t} \cdot u_1 \middle| e^{\lambda_2 t} \cdot u_2 \middle| \cdots \middle| e^{\lambda_n t} \cdot u_n\right).$$

Să studiem acum cazul cînd matricea sistemului diferențial (1) nu este diagonalizabilă, dar are proprietatea că toate valorilor sale proprii sînt reale, deci polinomul caracteristic al matricei A se descompune în factori liniari peste $\mathbb{R}$. În acest caz matricea A poate fi adusă la forma canonică Jordan peste $\mathbb{R}$ (teorema I.3.20 din capitolul 1), deci există $T \in M_n(\mathbb{R})$, T nesingulară astfel încît $T^{-1}AT = J$, unde J este matrice canonică Jordan. Vom folosi forma canonică Jordan pentru rezolvarea sistemului diferențial (1).

PROPOZIȚIA 2.8. Fie $x' = Ax$ un sistem diferențial liniar omogen cu coeficienți constanți, astfel încît matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$ să aibă toate valorile proprii reale. Atunci rezolvarea sistemului diferențial $x' = Ax$ se reduce la rezolvarea unui număr finit de sisteme diferențiale

liniare omogene cu coeficienți constanți de forma $y' = J_r(\lambda)$, **unde** $J_r(\lambda)$ **este o celulă Jordan** (de ordin $r \geq 1$).

DEMONSTRAȚIE. Fie $T \in M_n(\mathbb{R})$, T nesingulară astfel încît $J = T^{-1}AT$ este matrice canonică Jordan. Efectuăm schimbarea de funcții $x = Ty$, deci: $x' = T'y + Ty' = Ty'$. Sistemul diferențial (1) se scrie echivalent sub forma $Ty' = ATy$, sau $y' = T^{-1}ATy$, deci sub forma

$$(2) \qquad y' = Jy.$$

Deoarece $J = \operatorname{diag}(J_{r_1}(\lambda_1), J_{r_2}(\lambda_2), \ldots, J_{r_k}(\lambda_k))$ unde $J_{r_i}(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, sînt celule Jordan, iar k este numărul de celule Jordan din matricea J, rezultă că sistemul diferențial (2), este echivalent cu k sisteme diferențiale de forma

$$(3) \qquad y' = J_{r_i}(\lambda_i)y,$$

unde am notat tot cu y vectorul de funcții obținut cu o parte din funcțiile necunoscute $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Dacă rezolvăm sistemele diferențiale de tipul (3) atunci aflăm soluțiile sistemului diferențial (2) și din formula $x = Ty$, obținem soluțiile sistemului diferențial inițial (1).

Trecem acum la rezolvarea sistemelor diferențiale de tipul (3).

TEOREMA 2.9. Fie $y' = J_r(\lambda)y$ **un sistem diferențial liniar omogen cu coeficienți constanți, unde** $J_r(\lambda)$ **este o celulă Jordan de ordinul** r **și** $\lambda \in \mathbb{R}$. **Atunci o matrice fundamentală a sistemului este următoarea:**

$$(4) \qquad Y(t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t/1! & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ t^2/2! & t/1! & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t^{r-1}/(r-1)! & t^{r-2}/(r-2)! & t^{r-3}/(r-3)! & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

DEMONSTRAȚIE. Scriem sistemul diferențial (3) sub formă scalară:

$$(5) \qquad \begin{cases} y_1' = \lambda y_1 \\ y_2' = y_1 + \lambda y_2 \\ y_3' = y_2 + \lambda y_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_r' = y_{r-1} + \lambda y_r. \end{cases}$$

Ecuația $y_1' = \lambda y_1$ este o ecuație diferențială liniară omogenă și are soluția $y_1(t) = C_1 e^{\lambda t}$ (vezi teorema 1.3). Înlocuind pe y_1 în ecuația a doua a sistemului (5) obținem ecuația liniară neomogenă $y_2' = \lambda y_2 + C_1 e^{\lambda t}$, care are soluția $y_2(t) = C_2 e^{\lambda t} + C_1 t e^{\lambda t}$ (vezi corolarul teoremei 1.4). Înlocuind acum pe y_2 în ecuația a treia a sistemului (5) obținem ecuația liniară neomogenă.

$$y_3' = \lambda y_3 + (C_2 e^{\lambda t} + C_1 t e^{\lambda t}),$$

care are soluția $y_3(t) = C_3 e^{\lambda t} + C_2 t/1!\, e^{\lambda t} + C_1 t^2/2!\, e^{\lambda t}$.

Presupunem că am aflat funcția necunoscută

$y_{r-1}(t) = C_{r-1}e^{\lambda t} + C_{r-2}t/1!e^{\lambda t} + \ldots + C_2 t^{r-3}/(r-3)!e^{\lambda t} + C_1 t^{r-2}/(r-2)!e^{\lambda t}$.

Înlocuind pe y_{r-1} în ecuația a r–a a sistemului (5) obținem din nou o ecuație neomogenă, care (conform corolarului teoremei 1.4) are soluția $y_r(t) = C_r e^{\lambda t} + C_{r-1}t/1!e^{\lambda t} + \ldots + C_2 t^{r-2}/(r-2)!e^{\lambda t} + C_1 t^{r-1}/(r-1)!e^{\lambda t}$.

În final, obținem soluția sistemului (5) sub forma

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \ldots \\ y_r(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t/1! & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ t^2/1! & t/1! & 1 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ t^{r-1}/(r-1)! & t^{r-2}/(r-2)! & & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \ldots \\ c_r \end{pmatrix}$$

deci o matrice fundamentală a sistemului (3) are forma indicată în formula (4).

OBSERVAȚIE. Pentru sistemul diferențial (2), obținem o matrice fundamentală sub forma

$$(6) \qquad Y(t) = \operatorname{diag}(Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_k(t)),$$

unde fiecare $Y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, are forma (4). Atunci, o matrice fundamentală pentru sistemul diferențial (1) are forma $X(t) = T \cdot Y(t)$.

Din rezultatele de mai sus se observă rolul important pe care îl joacă valorile proprii ale matricei unui sistem diferențial liniar cu coeficienți constanți.

Cazul cînd valorile proprii sînt complexe se tratează similar; exponențială unei matrice permite o tratare unitară.

2.3. Exponențiala unei matrice; aplicații la sisteme diferențiale

Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice oarecare, $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$; ea se poate identifica deci cu punctul $(a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{nn})$ din $\mathbb{C}^{n^2}$ și are loc izomorfismul de spații vectoriale complexe $M_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2}$. În particular, structura de spațiu Banach de pe $\mathbb{C}^{n^2}$ se poate transfera la $M_n(\mathbb{C})$. Mai precis, definind

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2},$$

se obține o normă pe $M_n(\mathbb{C})$; se verifică imediat că dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ și dacă $x \in \mathbb{C}^n$ (x vector–coloană), atunci $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$, $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$ și $\|A^k\| \le \|A\|^k$, $(\forall)\, k \in \mathbb{N}^*$.

PROPOZIȚIA 2.10. Fie o serie de puteri peste $\mathbb{C}$,

$$f(x) = \sum_{k \ge 0} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

cu raza de convergență $R > 0$.

Atunci pentru orice matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încît $\|A\| < R$, seria de matrice

$$(1) \qquad \sum_{k \ge 0} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots$$

este o serie convergentă în spaţiul Banach $M_n(\mathbb{C})$. (Suma ei se notează cu $f(A)$ şi se numeşte funcţia de matricea A definită de f).

Demonstraţie. Alegem $r > 0$ astfel încît $\|A\| < r < R$. Se ştie din teoria seriilor de puteri că seria numerică $\sum_{k\geq 0} a_k r^k$ este absolut convergentă, deci seria de numere reale pozitive $\sum_{k\geq 0} |a_k| \cdot r^k$ este convergentă. Avem pentru orice $k \geq 0$,

$$\|a_k A^k\| = |a_k| \cdot \|A^k\| \leq |a_k| \cdot \|A\|^k < |a_k| r^k.$$

Conform criteriului de comparaţie rezultă că seria $\sum_{k\geq 0} \|a_k A^k\|$ este convergentă, adică seria de matrice $\sum_{k\geq 0} a_k A^k$ este absolut convergentă. Atunci rezultă că seria $\sum_{k\geq 0} a_k A^k$ este convergentă în spaţiul Banach $M_n(\mathbb{C})$.

Propoziţia 2.11. În condiţiile propoziţiei 2.10 matricea $f(A)$ se poate exprima ca o combinaţie liniară de $I_n, A, \ldots, A^{n-1}$ cu coeficienţi complecşi.

Demonstraţie. Conform corolarului 1 al teoremei I.3.2 a lui Hamilton–Cayley, puterile $A^k, k \geq n$, sînt combinaţii liniare de puterile $I_n, A, \ldots, A^{n-1}$. Fie $V \subset M_n(\mathbb{C})$ subspaţiul vectorial generat de $\{I_n, A, \ldots, A^{n-1}\}$.

Din cele de mai sus rezultă că orice polinom de matricea A aparţine subspaţiului V. Deoarece $f(A)$ este limita sumelor parţiale ale seriei (1), adică limită de polinoame de matricea A, rezultă că $f(A) \in V$, fiindcă $V \subset M_n(\mathbb{C})$ este închis în $M_n(\mathbb{C})$, ca orice subspaţiu finit dimensional al unui spaţiu Banach.

Definiţia 2.3. Fie seria de puteri $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ avînd raza de convergenţă $R = \infty$. Pentru orice matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ condiţia $\|A\| < R$ este îndeplinită şi aplicînd propoziţia 2.10, rezultă că seria de matrice

$I_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots$ este convergentă. Suma acestei serii se notează e^A sau $\exp A$ şi se numeşte **exponenţiala matricei** A.

Aşadar, $e^A \in M_n(\mathbb{C})$ şi

$$(2) \qquad e^A = I_n + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{k!}A^k + \ldots.$$

Proprietăţile exponenţialei de matrice sînt date în următoarea:

Teorema 2.12. a) $e^{0_n} = I_n$; $e^{\lambda I_n} = e^{\lambda} I_n$, $(\forall)\, \lambda \in \mathbb{C}$.

b) **Dacă** $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in M_n(\mathbb{C})$, **atunci** $e^A = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_n})$.

c) **Dacă** $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ **şi** $AB = BA$, **atunci** $e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A = e^{A+B}$.

d) **Pentru orice** $A \in M_n(\mathbb{C})$, **matricea** e^A **este nesingulară şi** $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

e) **Fie** $A \in M_n(\mathbb{C})$ **şi** $T \in M_n(\mathbb{C})$, **nesingulară; atunci** $e^{T^{-1}AT} = T^{-1} \cdot e^A \cdot T$.

f) **Dacă** $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_p) \in M_n(\mathbb{C})$, **atunci**

g) Dacă

$$J_r(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \lambda & & 0 & 0\\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & & \lambda & 0\\ 0 & 0 & & 1 & \lambda\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{C})$$

este o celulă Jordan, atunci

$$e^{J_r(\lambda)}=e^{\lambda}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1/1! & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1/2! & 1/1! & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ 1/(n-1)! & 1/(n-2)! & 1/(n-3)! & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

h) **Dacă $A\in M_n(\mathbb{C})$ şi $t\in\mathbb{R}$, atunci $(e^{tA})'=A\cdot e^{tA}$ (derivarea unei matrice de funcții înseamnă derivarea fiecărui element al matricei).**

DEMONSTRAȚIE. a) rezultă direct din formula (2); b) rezultă din formula (2) deoarece $A^k=\operatorname{diag}(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\ldots,\lambda_n^k)$, $(\forall)\, k\in\mathbb{N}^*$.

c) Avem

$$e^{A+B}=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}(A+B)^k=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\left(\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!(k-l)!}A^l\cdot B^{k-l}\right),$$

din formula binomului lui Newton care se aplică şi la matrice care comută (în cazul de față $AB=BA$). Atunci rezultă

$$e^{A+B}=\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{\substack{0\leq l,m\leq k\\ l+m=k}}\frac{1}{l!}A^l\cdot\frac{1}{m!}B^m\right)=\left(\sum_{l\geq 0}\frac{1}{l!}A^l\right)\left(\sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}B^m\right)=e^A\cdot e^B.$$

Ultima relație rezultă din teorema lui Mertens asupra produsului de serii, care se extinde direct şi la serii de matrice.

d) $A(-A)=(-A)\cdot A$ şi aplicînd punctul c) rezultă $e^A\cdot e^{-A}=e^{A+(-A)}=e^{0_n}=I_n$.

e) Pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$ avem relația $(T^{-1}AT)^k=T^{-1}A^kT$. Atunci

$$T^{-1}e^AT=T^{-1}\left(\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}A^k\right)T=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}(T^{-1}AT)^k=e^{T^{-1}AT}.$$

f) Rezultă din nou direct din formula (2), deoarece

$$A^k=\operatorname{diag}(A_1^k,A_2^k,\ldots,A_p^k).$$

g) Avem

$$e^{J_r(\lambda)}=e^{\lambda I_r+H_r}=e^{\lambda I_r}\cdot H_r=e^{\lambda}\cdot e^{H_r},$$

deoarece $(\lambda I_r)H_r=H_r(\lambda I_r)$ şi aplicăm punctul (c), unde

$$H_r = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_r(\mathbb{C})$$

Avem

$$H_r^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

deci, din formula (2) obținem:

$$e^{H_r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!}\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} + \ldots + \frac{1}{(r-1)!}\begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix},$$

adică

$$e^{H_r} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ 1/1! & 1 & & & \\ 1/2! & 1/1! & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 1/(r-1)! & & 1/2! & 1/1! & 1 \end{pmatrix} \text{ și } e^{J_r(\lambda)} = e^{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ 1/1! & 1 & & & \\ 1/2! & 1/1! & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 1/(r-1)! & & 1/2! & 1/1! & 1 \end{pmatrix}$$

h) Aplicînd teorema de derivare a seriilor rezultă că putem deriva termen cu termen seria

$$e^{tA} = I_n + \frac{1}{1!}(tA) + \frac{1}{2!}(t^2A^2) + \ldots + \frac{1}{k!}(t^kA^k) + \ldots$$

Obținem

$$(e^{tA})' = A + \frac{1}{1!}tA^2 + \frac{1}{2!}t^2A^3 + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}A^k + \ldots =$$

$$= A\left(I_n + \frac{1}{1!}(tA) + \frac{1}{2!}(tA)^2 + \ldots\right) = Ae^{tA}.$$

Observație. Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ atunci, evident, $e^A \in M_n(\mathbb{R})$ și chiar $e^A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Teorema 2.13. a) Fie $A \in M_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$). Atunci soluția sistemului $\dot{x} = Ax$, care verifică condiția inițială $x(t_0) = x_0 \in K^n$, este $x(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot x_0$, $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$.

b) Soluția sistemului neomogen $\dot{x} = Ax + b(t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, care verifică și condiția inițială $x(t_0) = x_0 \in K^n$, $t_0 \in I$, este

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A} \cdot b(\tau)\, d\tau.$$

DEMONSTRAȚIE. a) Avem

$$\dot{x}(t) = (e^{(t-t_0)A})' \cdot x_0 = Ae^{(t-t_0)A} \cdot x_0 = Ax(t),\ (\forall)\, t \in \mathbb{R},$$

deci $x(t)$ verifică sistemul. Apoi $x(t_0) = e^{0 \cdot A} \cdot x_0 = I_n x_0 = x_0$, deci conform teoremei de existență și unicitate a soluțiilor, $x(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot x_0$ este soluția problemei Cauchy date.

b) Avem

$$\dot{x}(t) = Ae^{(t-t_0)A} \cdot x_0 + Ae^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-\tau A} \cdot b(\tau)\, d\tau + e^{tA} \cdot e^{-tA} \cdot b(t) = Ax(t) + b(t),$$

$(\forall)\, t \in I$, deci $x(t)$ verifică sistemul. Apoi $x(t_0) = x_0 + 0 = x_0$, deci

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A} \cdot b(\tau)\, d\tau$$

este soluția problemei Cauchy date.

COROLAR. a) **Matricea e^{tA} este o matrice fundamentală a sistemului $\dot{x} = Ax$.**

b) **Matricea $\Phi(t_0, t) = e^{(t-t_0)A}$ este matricea de tranziție de la t_0 la t.**

Interpretare sistemică. Să presupunem că $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ este vectorul de stare al unui sistem dinamic a cărui lege diferențială de evoluție este $\dot{x} = A \cdot x + b(t)$ cu $b(t)$ vector-coloană de funcții continue pe un interval I.

Atunci formula din teorema 2.13, b) permite determinarea vectorului de stare la orice moment $t \in I$ din cunoașterea lui la un moment t_0. Aceasta este una din cele mai frumoase și importante formule de matematică, arătînd totodată utilitatea exponențialei unei matrici.

Dacă în sistemul $\dot{x} = Ax + b(t)$ se face schimbarea de funcții $x = Ty$ cu T matrice nesingulară, atunci $\dot{x} = T\dot{y}$ și sistemul devine $\dot{y} = T^{-1}ATy + T^{-1} \cdot b(t)$.

Alegînd T convenabil, $T^{-1}AT = J$ (forma Jordan) și notînd $T^{-1}b(t) = b_1(t)$, sistemul devine $\dot{y} = Jy + b_1(t)$. Dar $J = \mathrm{diag}\,(J_1, \ldots, J_r)$ cu $J_1, \ldots, J_r$ celule Jordan. Sistemul se "decuplează" în r subsisteme de forma $\dot{z} = Jz + b_2(t)$ cu J celulă Jordan. Această decuplare este folosită intensiv în teoria sistemelor liniare.

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$; pentru orice $t \in \mathbb{R}$ să considerăm aplicația $g^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definită prin $g^t(x) = e^{tA} \cdot x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}^n$.

TEOREMA 2.14. **Perechea $(\mathbb{R}^n, \{g^t\})$ este un curent definit de un grup cu un parametru de difeomorfisme ale lui $\mathbb{R}^n$ și orice mișcare $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(t) = g^t(x)$ a unui punct $x \in \mathbb{R}^n$ este o soluție a sistemului diferențial $\dot{x} = Ax$.**

DEMONSTRAȚIE. Aplicația $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g(t, x) = e^{tA} \cdot x$, $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}^n$ este diferențiabilă și în plus,

$$g^{t+s}(x) = e^{(t+s)A} \cdot x = e^{tA} \cdot e^{sA} \cdot x = (g^t \circ g^s)(x),$$

iar $g^0(x) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$. Aşadar, $(\mathbb{R}^n, \{g^t\})$ este un curent definit de un grup cu un parametru de difeomorfisme ale lui $\mathbb{R}^n$. Aplicînd teorema 1.1 este suficient să calculăm cîmpul vectorial al vitezelor curentului în punctul $x \in \mathbb{R}^n$. Avem

$$v(x) = \left.\frac{\mathrm{d}g^t x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tA} \cdot x)\right|_{t=0} = Ax,$$

deci orice mişcare este o soluţie a sistemului $\dot{x} = Ax$.

COROLAR. Soluţiile unui sistem $\dot{x} = Ax$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ definesc un curent global pe $\mathbb{R}^n$.

Acest rezultat generalizează exemplul care urmează teoremei 1.1.

EXEMPLE (relativ la calculul lui e^{tA}).

1) Calculul lui e^{tA} se poate face folosind forma Jordan a matricei A şi proprietăţile din teorema 2.12. Atunci el se reduce la calculul lui $e^{tJ_r(\lambda)}$ unde $J_r(\lambda)$ este celulă Jordan. Procedînd ca în demonstraţia teoremei 2.12 g), se obţine formula

$$e^{tJ_r(\lambda)} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/1! & 1 & 0 & 0 \\ t^2/1! & 1/1! & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ t^{r-1}/(r-1)! & t^{r-2}/(r-2)! & 1/1! & 1 \end{pmatrix}$$

care este aceeaşi cu matricea fundamentală (4) din teorema 2.8.

În cazul cînd valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ale matricei A sînt simple există o formulă directă pentru calculul lui e^{tA}, fără a apela la jordanizare; anume

$$(*)\ e^{tA} = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k t} \cdot \frac{(A-\lambda_1 I_n)\ldots\overset{\smile}{(A-\lambda_k I_n)}\ldots(A-\lambda_n I_n)}{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots\overset{\smile}{(\lambda_k-\lambda_k)}\ldots(\lambda_k-\lambda_n)}$$

(simbolul "$\smile$" semnifică eliminarea factorului respectiv). Într-adevăr, să alegem cîte un vector propriu v_k pentru $\lambda_k \in \sigma(A)$, $1 \le k \le n$. Conform prop. 2.11, există $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ astfel încît $e^{tA} = \alpha_0 I_n + \alpha_1 tA + \ldots + \alpha_{n-1}t^{n-1}A^{n-1}$. Dar $A \cdot v_k = \lambda_k v_k$ deci $A^p \cdot v_k = \lambda_k^p v_k$ pentru orice întreg $p \ge 0$ şi ca atare

$$e^{tA} \cdot v_k = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p A^p}{p!} v_k = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^p t^p}{p!} \cdot v_k = e^{\lambda_k t} \cdot v_k.$$

Înmulţind relaţia $e^{tA} = \alpha_0 I_n + \alpha_1 tA + \ldots + \alpha_{n-1}t^{n-1}A^{n-1}$ la dreapta cu v_k, rezultă $e^{\lambda_k t} = \alpha_0 + \alpha_1 t\lambda_k + \ldots + \alpha_{n-1}t^{n-1}\lambda_k^{n-1}$, $1 \le k \le n$ şi rezolvînd acest sistem relativ la $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, se obţine formula anterioară (*).

Ca un exemplu, fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; atunci $\sigma(A) = \{1, 2\}$ şi conform (*), avem

$$e^{tA} = e^t \cdot \frac{A - 2I_2}{1-2} + e^{2t} \cdot \frac{A - I_2}{2-1} = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{2t} - 2e^t \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

2) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & -4 & -3 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$. Conform exemplelor date în capitolul I, după prezentarea algoritmului de jordanizare , avem $\sigma_A = \{-1, 2\}$ şi luînd $T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ avem $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{diag}(B_1, B_2)$, unde $B_1 = (-1)$ şi $B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Conform teoremei 2.12 e, f, rezultă $T^{-1} \cdot e^{At} \cdot T = \text{diag}\,(e^{-t}, e^{B_2 t})$.

Dar $e^{B_2 t} = e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ deci $e^{At} = T \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot T^{-1}$.

3) Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Conform exemplelor amintite anterior $\sigma_A = \{1\}$ şi

luînd $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ rezultă $T^{-1}AT = J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ deci

$$e^{At} = Te^{Jt} \cdot T^{-1} = T \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ te^t & e^t & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2} e^t & te^t & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot T^{-1}.$$

3) Să presupunem că o particulă materială se află la momentul t în punctul $(x_1(t), x_2(t))$, astfel încît $\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2$, $\dot{x}_2 = 2x_2$, iar la momentul $t = 0$ ea se află în punctul $(1, 7)$. Ne propunem să determinăm la ce moment ea se va găsi pe dreapta $x_2 = 14$.

Aşadar, $\dot{x} = Ax$ unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ deci $x(t) = e^{tA} \cdot x(0) = (14e^{2t} - 13e^t, 7e^{2t})^T$.

Rezultă $7e^{2t} = 14$ şi $t = \frac{1}{2}\ln 2$, momentul cerut.

2.4. Ecuații diferențiale de ordin superior

Se numește **ecuație diferențială de ordinul** n orice ecuație de forma

$$(1) \qquad x^{(n)} = F(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}),$$

unde $F : U \to \mathbb{R}$ este o funcție diferențiabilă (de clasă C^r, $r \geq 1$) pe domeniul $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Forma (1) se mai numește și **forma normală** a ecuației diferențiale. Uneori se consideră ecuații diferențiale de ordinul n și sub **formă implicită**, adică

$$(2) \qquad \Phi(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}, x^{(n)}) = 0,$$

unde $\Phi : D \to \mathbb{R}$ este o funcție diferențiabilă (de clasă C^r, $r \geq 1$) pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$.

DEFINIȚIA 2.4. Se numește **soluție a ecuației** (1) o aplicație de clasă C^n, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ definită pe un interval $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, pentru care:

a) punctul $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t))$ aparține lui U, $(\forall)\ t \in I$;

b) pentru orice $t \in I$, $\varphi^{(n)}(t) = F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t))$.

Se numește **dată inițială** orice punct $(t_0, u_1, \ldots, u_n)$ din U; problema Cauchy corespunzătoare constă în a determina o soluție $\varphi(t)$ definită pe o vecinătate a lui t_0 astfel încît $\varphi(t_0) = u_1$, $\varphi'(t_0) = u_2$, ..., $\varphi^{(n-1)}(t_0) = u_n$, deci funcția φ și primele ei $n - 1$ derivate au valori prescrise în t_0.

TEOREMA 2.15. Ecuația diferențială (1) **este echivalentă cu sistemul diferențial de** n **ecuații de ordinul I**

$$(3) \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dot{x}_n = F(t, x_1, \ldots, x_n), \end{cases}$$

în sensul că dacă φ **este o soluție a ecuației** (1), **atunci vectorul format din derivate** $(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \ldots, \varphi^{(n-1)})$ **este soluție a sistemului** (3), **iar dacă** $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ **este soluție a sistemului** (3) **atunci** φ_1 **este soluție a ecuației** (1).

DEMONSTRAȚIE. Fie φ soluție a ecuației (1) și notăm $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \dot{\varphi}$, ..., $\varphi_n = \varphi^{(n-1)}$. Atunci $\dot{\varphi}_1 = \varphi_2$, $\dot{\varphi}_2 = \varphi_3$, ..., $\dot{\varphi}_{n-1} = \varphi_n$ și $\dot{\varphi}_n = F(t, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, deci vectorul de funcții $(\varphi, \dot{\varphi}, \ldots, \varphi^{(n-1)})$ este soluție a sistemului (3). Reciproc, fie $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ o soluție a sistemului (3) și notăm $\varphi_1 = \varphi$. Din ecuația întîia a sistemului (3) obținem $\dot{\varphi} = \varphi_2$, din ecuația a doua avem $\ddot{\varphi} = \varphi_3, \ldots$, din ecuația a $(n - 1)$–a rezultă $\varphi^{(n-1)} = \varphi_n$ și, în sfîrșit, din ecuația a n–a obținem $\varphi^{(n)} = F(t, \varphi, \dot{\varphi}, \ldots, \varphi^{(n-1)})$, adică $\varphi = \varphi_1$ este soluție a ecuației diferențiale (1).

Observație. Fie $(t_0, u_1, ..., u_n) \in U$ un punct fixat. Soluția φ a ecuației (1) satisface condițiile inițiale

$$(4) \qquad \varphi(t_0) = u_1,\ \dot{\varphi}(t_0) = u_2,\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(t_0) = u_n,$$

dacă și numai dacă soluția corespunzătoare $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ a sistemului (3) satisface condițiile inițiale

$$\varphi_1(t_0) = u_1,\ \varphi_2(t_0) = u_2, \ldots,\ \varphi_n(t_0) = u_n,$$

ceea ce rezultă evident din demonstrația teoremei 2.15.

Așadar, corespondența între ecuațiile (1) și sistemele (3) conservă soluțiile unor probleme Cauchy formulate corespunzător.

Corolar. Fie $(t_0, u_1, ..., u_n) \in U$ un punct fixat. Atunci soluția ecuației (1) cu condiția inițială (4) există și este unică într-o vecinătate a lui t_0 (de fapt orice două soluții cu această condiție inițială coincid pe intersecția intervalelor de definiție).

Demonstrație. Se aplică teoremele 2.15 și 1.8.

Exemple. 1) Legea a doua a dinamicii conduce la ecuații diferențiale de forma $m\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$, unde $x(t)$ este poziția unei particule de masă m la momentul t într-o mișcare rectilinie, sub acțiunea unei forțe f. Se obține astfel o ecuație de ordin II. Punînd $x_1 = x$ și $x_2 = \dot{x}$, rezultă $\dot{x}_1 = x_2$ și $\dot{x}_2 = \ddot{x} = \frac{1}{m} f(t, x_1, x_2)$, deci ecuația este echivalentă cu sistemul de ordinul întîi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{m} f(t, x_1, x_2). \end{cases}$$

Problema Cauchy pentru ecuația anterioară revine la a fixa un moment t_0, două numere u_1, u_2 și a determina soluția $x(t)$ pentru care $x(t_0) = u_1$, $\dot{x}(t_0) = u_2$ (cu alte cuvinte, a determina poziția particulei la orice moment cunoscînd poziția și viteza ei la momentul t_0). De fapt prima problemă Cauchy a apărut în mecanică.

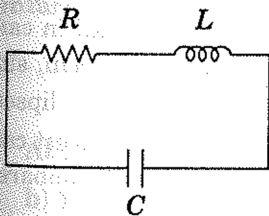


Figura V.11.

2) Fie un circuit electric R–L–C (figura V.11). Notînd cu q sarcina electrică care trece de la o placă la cealaltă a condensatorului și cu $i = \frac{dq}{dt}$ curentul, rezultă $L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0$. Presupunînd cunoscute $q_0 = q(0)$ și $i_0 = q(0)$, se obține o problemă Cauchy pentru ecuația $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$.

Introducînd notațiile $x_1 = q$, $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{q} = i$, această problemă este echivalentă cu rezolvarea unei probleme Cauchy pentru sistemul liniar

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{1}{CL}x_1 - \dfrac{R}{L}x_2 \end{cases}; \ x_1(0) = q_0, \ x_2(0) = i_0,$$

care este de forma $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$, unde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{CL} & -\dfrac{R}{L} \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} q_0 \\ i_0 \end{pmatrix}$.

Tipuri particulare de ecuații diferențiale de ordin superior

Modificăm notațiile (fie și pentru evitarea automatismelor) și considerăm cîteva tipuri de ecuații de forma $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, cu necunoscuta $y(x)$, $x \in I \subset \mathbb{R}$.

a) $y^{(n)} = f(x)$ cu $f : I \to \mathbb{R}$ funcție continuă. Această ecuație se rezolvă prin n integrări succesive; soluția generală depinde de n constante arbitrare.

EXEMPLU. Fie ecuația $y''' = x - \cos x$. Atunci

$$y''(x) = \frac{x^2}{2} - \sin x + C_1, \ y'(x) = \frac{x^3}{6} + \cos x + C_1 x + C_2 \text{ și}$$

$y(x) = \dfrac{x^4}{24} + \sin x + C_1 \dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$ cu C_1, C_2, C_3 constante arbitrare (aici se poate lua $I = \mathbb{R}$).

b) O ecuație de forma $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$ în care lipsesc explicit $y, y', ..., y^{(k-1)}$ își reduce ordinul cu k unități, punînd $y^{(k)} = z$.

EXEMPLU. Fie ecuația de ordinul IV : $y^{(IV)} - y''' = x$; punînd $y''' = z$ se obține ecuația de ordinul întîi $z' - z = x$.

c) **Ecuații omogene în** $y, y', ..., y^{(n)}$. În acest caz se notează $u = \dfrac{y'}{y}$ (adică se face schimbarea de funcție $y(x) \to u(x)$); rezultă $y' = u \cdot y$, $y'' = u'y + u \cdot y' = u' \cdot y + u^2 \cdot y = (u' + u^2) \cdot y$ etc. și ecuația își scade ordinul cu o unitate.

EXEMPLU. Fie ecuația omogenă $y \cdot y'' - 2y'^2 = 0$. Punînd $y' = u \cdot y$, rezultă $y \cdot (u' + u^2) \cdot y - 2u^2y^2 = 0$, deci $y \equiv 0$ sau $u' - u^2 = 0$, de unde

$$\frac{du}{dx} = u^2, \ \frac{du}{u^2} = dx, \ -\frac{1}{u} = x + C_1, \ -\frac{y}{y'} = x + C_1, \ \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x + C_1} \text{ și } y(x) = \frac{C_2}{x + C_1}.$$

d) **Ecuații autonome (invariante în timp).** Acestea sînt ecuații în care lipsește explicit variabila independentă; revenind la notațiile mai vechi, sînt ecuații de forma $F(x, \dot{x}, ..., x^{(n)}) = 0$, în care necunoscuta este $x(t)$ dar t lipsește explicit. Majoritatea legilor fizice diferențiale sînt de acest tip. În acest caz, se notează $\dot{x} = p$ și de consideră ca necunoscută $p(x)$ deci se face schimbarea $x(t) \to p(x)$; avem

$$\dot{x} = p, \ \ddot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dp}{dx}\dot{x} = p \cdot p',$$

$$\dddot{x} = \frac{d\ddot{x}}{dt} = \frac{d\ddot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dx}\right) \cdot p = p(p'^2 + pp'') \text{ etc.}$$

Ecuaţia iniţială îşi reduce ordinul cu o unitate.

Justificarea denumirii de ecuaţie invariantă în timp provine de la faptul că dacă $x(t)$ este soluţie, atunci pentru orice $\tau \neq 0$, funcţia $x(t) = x(t + \tau)$ este de asemenea soluţie.

e) Ecuaţiile liniare de ordinul n (de gradul întîi în funcţia necunoscută şi în derivatele acesteia) vor fi studiate în detaliu în paragraful următor.

Printre ecuaţiile de acest tip menţionăm: ecuaţiile cu coeficienţi constanţi, ecuaţiile Euler, ecuaţiile Bessel, Legendre, Lagrange, Schrödinger, Mathieu, Airy etc., unele studiate la cursul de fizică sau la cursurile de specialitate.

Asupra unora dintre ele vom reveni ulterior (de exemplu în capitolul de funcţii speciale).

2.5. Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n ($n \geq 1$)

Folosind echivalenţa dată de teorema 2.15, vom studia acum ecuaţia diferenţială de ordinul n, cu ajutorul rezultatelor de la sisteme diferenţiale liniare de ordinul I. Forma generală a ecuaţiei diferenţiale **liniare neomogene de ordinul n, cu coeficienţi variabili** este

$$(5) \qquad a_0(t)x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{x} + a_n(t)x = b(t),$$

unde $a_i, b : I \to \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$, sînt funcţii continue pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$ şi $a_0 \not\equiv 0$.

Dacă $b \equiv 0$ (adică $b(t) = 0$, $(\forall)\, t \in I$), atunci ecuaţia (5) se numeşte **omogenă.**

Micşorînd eventual I, putem presupune că $a_0(t) \neq 0$, $(\forall)\, t \in I$ şi atunci ecuaţia (5) poate fi adusă la forma normală

$$(6) \qquad x^{(n)} = -\frac{a_n(t)}{a_0(t)}x - \frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)}x' - \ldots - \frac{a_1(t)}{a_0(t)}x^{(n-1)} + \frac{b(t)}{a_0(t)}.$$

Din teoremele 2.15 şi 2.1 rezultă că soluţiile ecuaţiei (5) sînt definite pe tot intervalul $I \subset \mathbb{R}$.

TEOREMA 2.16. **a) Fie S mulţimea soluţiilor ecuaţiei diferenţiale liniare omogene**

$$(7) \qquad x^{(n)} = -\frac{a_n(t)}{a_0(t)}x - \frac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)}x' - \ldots - \frac{a_1(t)}{a_0(t)}x^{(n-1)}.$$

Atunci S este un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$ şi $\dim_{\mathbb{R}} S = n$.

b) Fie $\mathscr{S}$ mulţimea soluţiilor ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene (6) **şi** $x_p \in \mathscr{S}$ **o soluţie fixată (particulară). Atunci** $\mathscr{S} = S + x_p$.

DEMONSTRAŢIE. a) Faptul că S este spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$ este evident şi se demonstrează ca în teorema 2.2 (a). Sistemul diferenţial (3) se scrie în cazul ecuaţiei (7) sub forma

$$(8)\qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = -\dfrac{a_n(t)}{a_0(t)}x_1 - \dfrac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)}x_2 - \dots - \dfrac{a_1(t)}{a_0(t)}x_n \end{cases}$$

şi este un sistem diferenţial liniar cu matricea

$$(9)\qquad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\dfrac{a_n(t)}{a_0(t)} & -\dfrac{a_{n-1}(t)}{a_0(t)} & \dots & \dots & -\dfrac{a_1(t)}{a_0(t)} \end{pmatrix}$$

Fie $\tilde{S}$ spaţiul vectorial peste $\mathbb{R}$ al soluţiilor sistemului liniar (8) şi fie $\theta : \tilde{S} \to S$, aplicaţia dată de teorema 2.15, $\theta(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = \varphi_1$. Din teorema 2.15 rezultă că θ este bijectivă şi cum este evident liniară, rezultă că θ este un izomorfism de spaţii vectoriale. Aplicînd teorema 2.2 (d), rezultă că $\dim_{\mathbb{R}} S = n$.

b) Demonstraţia este imediată şi se face la fel ca în lema 2.4.

Definiţia 2.5. a) Orice bază în spaţiul vectorial S al soluţiilor ecuaţiei omogene (7) se numeşte **sistem fundamental de soluţii.**

b) Fie $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (7).

Se numeşte **wronskianul ecuaţiei** (7) wronskianul sistemului asociat (8) şi are forma

$$(10)\qquad W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Pe baza rezultatelor de la sisteme diferenţiale liniare obţinem următoarele:

Observaţii. 1) Din teorema 2.3 (Liouville) rezultă că

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} -\frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)}\,d\tau}.$$

2) Din teorema 2.16 rezultă că orice soluţie $x \in S$ are forma

$$x = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \dots + C_n\varphi_n,\ C_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, n,$$

(C_i constante), unde $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ este un sistem fundamental de soluţii.

3) Aplicînd metoda "variaţiei constantelor" (teorema 2.5), se poate afla o soluţie particulară $x_p \in \mathscr{S}$ pentru ecuaţia neomogenă (6). Se caută

$$x_p(t) = C_1(t)\varphi_1(t) + C_2(t)\varphi_2(t) + \ldots + C_n(t)\varphi_n(t).$$

Ca în demonstraţia teoremei 2.5 (Lagrange) se obţine, pentru funcţiile $C_1', C_2', \ldots, C_n'$, sistemul algebric liniar:

$$\begin{cases} C_1'\varphi_1 + C_2'\varphi_2 + \ldots + C_n'\varphi_n = 0 \\ C_1'\varphi_1' + C_2'\varphi_2' + \ldots + C_n'\varphi_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'\varphi_1^{(n-1)} + C_2'\varphi_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'\varphi_n^{(n-1)} = \dfrac{b(t)}{a_0(t)}, \end{cases}$$

cu determinantul nenul $W(t)$, sistem care se poate deci rezolva.

4) Dacă pentru ecuaţia (5) se cunoaşte o soluţie particulară $x_p(t)$, atunci punînd $x = x_p \cdot y$, se obţine o ecuaţie în $y(t)$ în care coeficientul lui y este identic nul; ca atare, punînd $\dot{y} = z$, ordinul ecuaţiei scade cu o unitate.

2.6. Cazul coeficienţilor constanţi

Se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi omogenă** o ecuaţie de forma

$$(11) \qquad x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = 0,$$

unde $a_i \in K$ ($K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$). Aplicînd teorema 2.15 şi rezultatele de la sisteme diferenţiale, rezultă că soluţiile ecuaţiei (11) sînt definite pe $\mathbb{R}$ şi sînt funcţii de clasă C^∞. Folosind teoremele de la sisteme diferenţiale cu coeficienţi constanţi am putea da forma soluţiilor ecuaţiei (11), dar vom face aceasta printr-o metodă directă.

DEFINIŢIA 2.6. Polinomul $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n \in K[X]$, asociat ecuaţiei diferenţiale (11), se numeşte **polinomul caracteristic** al ecuaţiei diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi omogene.

OBSERVAŢIE. Se verifică imediat că $P(X)$ este polinomul caracteristic al matricei A a sistemului diferenţial asociat ecuaţiei (11) (vezi formula (9)).

Ne vom situa în cazul $K = \mathbb{C}$ şi fie

$$(12) \qquad P(X) = (X-\lambda_1)^{n_1}(X-\lambda_2)^{n_2}\ldots(X-\lambda_p)^{n_p},\ n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n,$$

descompunerea polinomului caracteristic $P(X)$ în factori liniari peste $\mathbb{C}$.

Notăm cu D **operatorul de derivare în raport cu** t

$$D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}),$$

şi cu $\mathbf{I}$ aplicaţia identică a spaţiului $C^\infty(\mathbb{R})$ (funcţii cu valori complexe).

Asociem polinomului caracteristic $P(X)$ **operatorul diferenţial**

$$P(D) : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}),\ P(D) = (D - \lambda_1\mathbf{I})^{n_1} \circ (D - \lambda_2\mathbf{I})^{n_2} \circ \ldots \circ (D - \lambda_p\mathbf{I})^{n_p}.$$

LEMA 2.17. Pentru orice $x \in C^\infty(\mathbb{R})$ avem

$$(13) \qquad P(D)x = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x,$$

deci x este soluţie a ecuaţiei (11) dacă şi numai dacă $P(D)x = 0$.

DEMONSTRAȚIE. Vom demonstra afirmația în cazul $n = 2$, cazul general rezultînd în mod analog folosind relațiile lui Viète. Fie deci $x \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ şi

$$P(D) = (D - \lambda_1\mathbf{I}) \circ (D - \lambda_2\mathbf{I}).$$

Atunci

$$P(D) = (D - \lambda_1\mathbf{I})((D - \lambda_2\mathbf{I})x) = (D - \lambda_1\mathbf{I})\ (Dx - \lambda_2 x) =$$
$$= (D - \lambda_1\mathbf{I})(\dot{x} - \lambda_2 x) = (\dot{x} - \lambda_2 x)' - \lambda_1(\dot{x} - \lambda_2 x) =$$
$$= \ddot{x} - (\lambda_1 + \lambda_2)\dot{x} + \lambda_1\lambda_2 x = \ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2 x.$$

Remarcăm că avem şi relația

$$(D - \lambda_1\mathbf{I}) \circ (D - \lambda_2\mathbf{I}) = (D - \lambda_2\mathbf{I}) \circ (D - \lambda_1\mathbf{I}),$$

deci operatorii $(D - \lambda_1\mathbf{I})$, $(D - \lambda_2\mathbf{I})$ comută între ei.

LEMA 2.18. Avem

$$(D - \lambda\mathbf{I})^k (e^{\lambda t} x(t)) = e^{\lambda t} \cdot x^{(k)}(t).$$

DEMONSTRAȚIE. Aplicăm inducția după k. Pentru $k = 1$ avem

$$(D - \lambda\mathbf{I})(e^{\lambda t}x(t)) = (e^{\lambda t}x(t))' - \lambda e^{\lambda t}x(t) = \lambda e^{\lambda t}x(t) + e^{\lambda t}x'(t) - \lambda e^{\lambda t}x(t) = e^{\lambda t}x'(t).$$

Presupunem afirmația adevărată pentru $k - 1 \geq 1$ şi rezultă că

$$(D - \lambda\mathbf{I})^k (e^{\lambda t}x(t)) = (D - \lambda\mathbf{I}) \circ (D - \lambda\mathbf{I})^{k-1}(e^{\lambda t}x(t)) =$$
$$= (D - \lambda\mathbf{I})(e^{\lambda t}x^{(k-1)}(t)) = e^{\lambda t}x^{(k)}(t).$$

LEMA 2.19. Fie λ_i o rădăcină de multiplicitate n_i a polinomului caracteristic $P(X)$. Fie $Q \in \mathbb{C}[X]$ cu grad $Q \leq n_i - 1$. Atunci funcția $e^{\lambda_i t}Q(t)$ este soluție a ecuației diferențiale (11).

DEMONSTRAȚIE. Din lema 2.18 avem

$$(D - \lambda_i\mathbf{I})^{n_i}(e^{\lambda_i t}Q(t)) = e^{\lambda_i t}Q^{(n_i)}(t) = 0,\ (\forall)\ t \in \mathbb{R}.$$

Aplicînd lema 2.17, obținem

$$P(D)(e^{\lambda_i t}Q(t)) = (D - \lambda_1\mathbf{I})^{n_1} \circ \ldots \circ (D - \lambda_p\mathbf{I})^{n_p}(D - \lambda_i\mathbf{I})^{n_i}(e^{\lambda_i t}Q(t)) = 0,$$

$(\forall)\ t \in \mathbb{R}$, deci funcția $e^{\lambda_i t}Q(t)$ este soluție a ecuației (11).

TEOREMA 2.20. Fie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ cu multiplicitățile $n_1, n_2, \ldots, n_p$ rădăcinile polinomului caracteristic (12) **al ecuației omogene cu coeficienți constanți** (11). **Atunci mulțimea cu $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_p$ funcții**

$$x_1 = e^{\lambda_1 t},\ x_2 = te^{\lambda_1 t},\ \ldots,\ x_{n_1} = t^{n_1 - 1}e^{\lambda_1 t};$$
$$x_{n_1+1} = e^{\lambda_2 t},\ x_{n_1+2} = te^{\lambda_2 t},\ \ldots,\ x_{n_1+n_2} = t^{n_2-1}e^{\lambda_2 t};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n_1+\ldots+n_{p-1}+1} = e^{\lambda_p t},\ \ldots,\ x_n = t^{n_p-1}e^{\lambda_p t},$$

este un sistem fundamental de soluții al ecuației (11).

DEMONSTRAȚIE. Conform lemei 2.19 toate cele n funcții sînt soluții ale ecuației (11). Deoarece spațiul soluțiilor S are dimensiunea n (teorema 2.16 (a)) este suficient să verificăm că sistemul celor n funcții este liniar independent. O combinație liniară a acestora ne dă o relație de forma:

$$(13)\qquad Q_1(t)e^{\lambda_1 t} + Q_2(t)e^{\lambda_2 t} + \ldots + Q_p(t)e^{\lambda_p t} = 0,\ (\forall)\ t \in \mathbb{R},$$

unde grad $Q_i = n_i - 1$ $(i = 1, 2, ..., p)$. Facem observația că derivata unei funcții de forma $Q(t)e^{\lambda t}$ cu $\lambda \neq 0$ are forma $\tilde{Q}(t)e^{\lambda t}$, unde $\operatorname{grad}\tilde{Q} = \operatorname{grad} Q$. Într-adevăr, derivînd obținem

$$(Q(t)e^{\lambda t})' = Q'(t)e^{\lambda t} + \lambda Q(t)e^{\lambda t} = (Q'(t) + \lambda Q(t))e^{\lambda t},$$

deci $\tilde{Q}(t) = \lambda Q(t) + Q'(t)$ și, cum $\lambda \neq 0$, rezultă că $\operatorname{grad}\tilde{Q} = \operatorname{grad} Q$.

Scriem acum relația (13) sub forma

$$Q_1(t) + Q_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + ... + Q_p(t)e^{(\lambda_p - \lambda_1)t} = 0,\ (\forall)\ t \in \mathbb{R},$$

și derivăm de atîtea ori pînă dispare $Q_1(t)$. Obținem o relație de forma

$$\tilde{Q}_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + ... + \tilde{Q}_p(t)e^{(\lambda_p - \lambda_1)t} = 0,\ (\forall)\ t \in \mathbb{R},$$

unde $\operatorname{grad}\tilde{Q}_i = \operatorname{grad} Q_i$, $i = 2, ..., p$. Repetînd procedeul obținem în final o relație de forma

$$Q_p^*(t)e^{(\lambda_p - \lambda_{p-1})t} = 0,\ (\forall)\ t \in \mathbb{R},$$

unde $\operatorname{grad} Q_p^* = \operatorname{grad} Q_p$. De aici rezultă $Q_p^* \equiv 0$, de unde avem $Q_p \equiv 0$ și relația (13) devine

$$(13') \quad Q_1(t)e^{\lambda_1 t} + ... + Q_{p-1}(t)e^{\lambda_{p-1} t} = 0,\ (\forall)\ t \in \mathbb{R}.$$

Repetînd raționamentul rezultă analog că

$$Q_{p-1} \equiv 0,\ Q_{p-2} \equiv 0,\ ...,\ Q_1 \equiv 0,$$

deci sistemul celor n funcții din enunțul teoremei este liniar independent.

COROLAR. Presupunem că polinomul caracteristic al ecuației (11) **are coeficienți reali,** $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, **și fie** (12) **descompunerea sa în factori liniari peste** $\mathbb{C}$. **Atunci din sistemul fundamental de soluții dat în teorema** 2.20, **se poate obține un sistem fundamental de soluții reale pentru ecuația** (11).

DEMONSTRAȚIE. Deoarece $P(X)$ are coeficienți reali, rădăcinile sale nereale se grupează în perechi complex conjugate. Atunci și funcțiile din teorema 2.20 se grupează în perechi complex conjugate.

OBSERVAȚIE. Trebuie reținut că în expresia soluțiilor unor ecuații diferențiale sau sisteme diferențiale ($x' = A \cdot x$) cu coeficienți constanți, apar numai polinoame, exponențiale $e^{\lambda t}$, funcții trigonometrice $\cos \beta t, \sin \beta t$ și produse ale acestora.

EXEMPLE. 1) Să considerăm o ecuație liniară și omogenă de ordinul doi cu coeficienți constanți $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Polinomul ei caracteristic este $P(X) = X^2 + aX + b$. Dacă rădăcinile lui, notate λ_1, λ_2, sînt reale și distincte, atunci un sistem fundamental de soluții este $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$ și soluția generală a ecuației va fi $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ (pe $\mathbb{R}$), cu C_1, C_2 constante arbitrare. Dacă $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$, atunci $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t}$, iar dacă $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, atunci $x(t) = C_1 e^{(\alpha + \beta i)} + C_2 e^{(\alpha - \beta i)t} = e^{\alpha t}(C_1 e^{i\beta t} + C_2 e^{-i\beta t})$. Deci

$x(t) = (D_1 \cos \beta t + D_2 \sin \beta t)e^{\alpha t}$ cu D_1, D_2 constante reale arbitrare.

2) Determinăm efectiv soluția generală pentru ecuațiile $\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0$ și respectiv $4\ddot{x} + 4\dot{x} + x = 0$; în primul caz $P(X) = X^2 + 2X - 3 = (X - 1)(X + 3)$ și în

al doilea caz $P(X) = (2X + 1)^2$. Soluția generală va fi $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-3t}$ [respectiv $x(t) = C_1e^{-\frac{1}{2}t} + C_2te^{-\frac{1}{2}t}$], cu C_1, C_2 constante arbitrare.

3) Pentru ecuația pendulului $\ddot{x} + \omega^2x = 0$ $(\omega > 0)$ avem $P(X) = X^2 + \omega^2$ și $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ deci soluția generală va fi $x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$, $t \in \mathbb{R}$. Iar pentru ecuația $y'' + 2y' + 7y = 0$ cu necunoscuta $y(x)$ avem $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{6}$ și $y(x) = e^{-x}(C_1 \cos x\sqrt{6} + C_2 \sin x\sqrt{6})$.

4) Determinăm soluția generală a ecuației $x^{IV} - 2\dddot{x} + \ddot{x} = 0$; în acest caz, $P(X) = X^4 - 2X^3 + X^2 = X^2(X-1)^2$ și $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4} = 1$ deci
$x(t) = C_1 + C_2t + C_3e^t + C_4te^t$ cu C_k, $1 \le k \le 4$, constante arbitrare.

OBSERVAȚIE. Fie

$$(14) \qquad x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \ldots + a_nx = b(t),\ t \in I \subset \mathbb{R},$$

o **ecuație diferențială neomogenă,** cu coeficienți constanți a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ ($a_i \in K$; $K = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$). Pentru calculul unei soluții particulare a sa putem aplica metoda variației constantelor. În cazul unor funcții particulare $b(t)$ se poate aplica metoda "coeficienților nedeterminați". Indicăm cîteva asemenea cazuri particulare:

I) $b(t) = Ae^{\alpha t}$; $A, \alpha \in \mathbb{C}$.

a) Dacă $\alpha \ne \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$, atunci se poate afla o soluție particulară $x_p(t) = Ce^{\alpha t}$ și înlocuind în ecuația (14) se determină constanta $C \in K$.

b) Dacă $\alpha = \lambda_{j_0}$, atunci se poate afla o soluție particulară $x_p(t) = Ct^{n_{j_0}}e^{\alpha t}$, $C \in K$.

II) $b(t) = A_1 \cos \beta t + A_2 \sin \beta t$; $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}$.

a) Dacă $i\beta \ne \lambda_j, j = 1, 2, \ldots, p$, atunci se poate afla o soluție particulară

$$x_p(t) = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t,\ C_1, C_2 \in K.$$

b) Dacă $i\beta = \lambda_{j_0}$, atunci se poate afla o soluție particulară

$$x_p(t) = t^{n_{j_0}}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t),\ C_1, C_2 \in K.$$

III) $b(t)$ = polinom de gradul k cu coeficienți în K.

a) Dacă $0 \ne \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$, atunci se poate afla o soluție particulară $x_p(t) = Q(t)$, polinom de gradul k cu coeficienți nedeterminați din K, care se află prin verificare.

b) Dacă $0 = \lambda_{j_0}$, atunci se poate afla o soluție particulară $x_p(t) = t^{n_{j_0}}Q(t)$, Q polinom de gradul k.

EXEMPLE. Determinăm soluția generală a ecuației liniare
$\ddot{x} + \dot{x} = 5t + \cos 3t$. Soluția generală a ecuației omogene este $x_0(t) = C_1 + C_2e^{-t}$; există o soluție particulară de forma $x_p(t) = (At + B) \cdot t + C \cos 3t + D \sin 3t$.

Scriind că $\ddot{x}_p(t) + \dot{x}_p(t) = 5t + \cos 3t$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$, rezultă $2A + B = 0$, $2A = 5$, $3D - 9C = 1$, $3C + 9D = -1$ și se determină A, B, C, D, iar soluția căutată va fi $x(t) = x_0(t) + x_p(t)$.

2) Determinăm soluția generală a ecuației $\ddot{x} + 4x = \frac{1}{\cos 2t}$. Soluția generală a ecuației omogene este $x_0(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$. O soluție particulară se poate obține doar prin metoda "variației constantelor"; anume

$$x_p(t) = C_1(t) \cos 2t + C_2(t) \sin 2t, \text{ unde } C_1' \cos 2t + C_2' \sin 2t = 0,$$

$$C_1'(-2\sin 2t) + C_2'(2\cos 2t) = \frac{1}{\cos 2t}, \text{ etc.}$$

APLICAȚII. (1) **Metoda eliminării** pentru sisteme diferențiale liniare omogene cu coeficienți constanți.

Fie $\dot{x} = Ax$, $A \in M_n(K)$, un sistem diferențial. Folosind operatorul de derivare $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, extins pe componente, putem scrie sistemul $\dot{x} = Ax$ sub forma $Ax - Dx = 0$ sau $(A - D \cdot \mathbf{I}_n)x = 0$.

Aplicînd "regula lui Cramer" (în forma în care o prezentăm este valabilă și în inele, nu numai în corpuri), obținem:

$$\det(A - D \cdot \mathbf{I}_n)(x_1) = 0, \ldots, \det(A - D \cdot \mathbf{I}_n)(x_n) = 0,$$

unde $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Dacă $P(X) \in K[X]$ este polinomul caracteristic al matricei A, atunci $\det(A - D\cdot \mathbf{I}_n) = (-1)^n \cdot P(D)$, deci am obținut ecuațiile diferențiale liniare omogene cu coeficienți constanți (de ordinul n) pentru componentele vectorului de funcții x:

$$P(D)x_1 = 0, P(D)x_2 = 0, \ldots, P(D)x_n = 0.$$

Rezolvînd una dintre ecuații, de exemplu $P(D)x_1 = 0$ și substituind x_1 în sistem, obținem un sistem cu $n - 1$ funcții necunoscute, dar neomogen.

Procedînd ca în cazul algebric (cu Cramer) se poate aplica procedeul și pentru sisteme neomogene.

EXEMPLU. Fie sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 = 7x_1 + x_3. \end{cases}$$

Derivînd prima ecuație și ținînd cont de ecuațiile date rezultă

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = (x_1 + x_2) + (x_1 - x_2 - x_3) = 2x_1 - x_3;$$

derivînd încă o dată,

$$\dddot{x}_1 = 2\dot{x}_1 - \dot{x}_3 = 2(x_1 + x_2) - (7x_1 + x_3) = -5x_1 + 2x_2 - x_3.$$

Eliminînd x_2, x_3 din ecuațiile $\dot{x}_1 = x_1 + x_2$, $\ddot{x}_1 = 2x_1 - x_3$ și $\dddot{x}_1 = -5x_1 + 2x_2 - x_3$, rezultă o ecuație diferențială cu necunoscuta $x_1(t)$.

Anume, avem $x_2 = \dot{x}_1 - x_1$, $x_3 = 2x_1 - \ddot{x}_1$ și înlocuind în ultima,

$$\dddot{x}_1 - \ddot{x}_1 - 2\dot{x}_1 + 9x_1 = 0.$$

Metoda derivării și eliminării permite reducerea sistemelor de ordinul I la ecuații de ordin superior. Așadar, sistemele de ordinul I sînt esențialmente echivalente cu ecuațiile de ordin superior. În plus se vede ușor că sistemele diferențiale ordinare de orice ordin se pot reduce la sisteme de ordinul I prin

mărirea corespunzătoare a numărului de ecuații și necunoscute. De exemplu, sistemul

$$\begin{cases} y''-z''-y'^2+2x=0 \\ z''+y'=0 \end{cases}$$

se reduce la un sistem de ordin I punînd $y'=u$, $z'=v$ deci $u'-v'=u^2-2x$, $v'=-u$ și se obține un sistem cu 4 ecuații și 4 necunoscute $y(x)$, $z(x)$, $u(x)$, $v(x)$.

(2) **Rezolvarea ecuațiilor Euler.**

Se numește **ecuație Euler** o ecuație diferențială liniară cu coeficienți variabili, de forma

$$(15)\ x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=b(x),$$

unde $a_i \in K$, $i=1,\ldots,n$, $b: I \to K$ și $0 \notin I$. O ecuație Euler se poate transforma într-o ecuație cu coeficienți constanți prin schimbarea de variabilă $|x|=e^t$.

Vom analiza cazul $x>0$; cazul $x<0$ se tratează analog. Avem:

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dot{y}e^{-t},$$

$$y''=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=e^{-t}\cdot\frac{\mathrm{d}(\dot{y}e^{-t})}{\mathrm{d}t}=e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y}).$$

Presupunem că $y^{(k)}=e^{-kt}\cdot P_k(D)(y)$, unde P_k este polinom de gradul k cu coeficienți constanți (din K) și $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ (operatorul de derivare). Atunci obținem:

$$y^{(k+1)}=\frac{\mathrm{d}y^{(k)}}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y^{(k)}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=e^{-t}\,\frac{\mathrm{d}(e^{-kt}P_k(D)(y))}{\mathrm{d}t}=e^{-(k+1)t}\cdot P_{k+1}(D)(y),$$

unde P_{k+1} este un polinom de gradul $k+1$ cu coeficienți constanți. Rezultă că pentru orice $k=1,2,\ldots,n$ avem $x^ky^{(k)}=P_{k+1}(D)(y)$, deci ecuația (15) devine o ecuație liniară cu coeficienți constanți.

EXEMPLE. 1) Fie ecuația Euler $x^2y''+2xy'=\cos(\ln x)$. Făcînd schimbarea de variabilă $x=e^t$, rezultă ecuația $e^{2t}\cdot e^{-2t}(\ddot{y}-\dot{y})+2\cdot e^t\cdot e^{-t}\dot{y}=\cos t$, adică $\ddot{y}+\dot{y}=\cos t$; soluția generală a acesteia este

$$y(t)=C_1+C_2e^{-t}+\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t,$$

iar soluția generală a ecuației inițiale este

$$y(x)=C_1+\frac{C_2}{x}+\frac{1}{2}\sin(\ln x)-\frac{1}{2}\cos(\ln x),$$

pe intervalul $I=(0,\infty)$.

2) Determinăm soluțiile $R(r)$, mărginite pentru $0<r<1$, ale ecuației

$$r^2\cdot R''+rR'-R=0.$$

Punînd $r=e^t$ ecuația devine $e^{2t}\cdot e^{-2t}(\ddot{R}-\dot{R})+e^t\cdot e^{-t}\cdot\dot{R}-R=0$, adică $\ddot{R}-R=0$, de unde $R(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}$ și $R(r)=C_1r+\frac{C_2}{r}$ cu C_1, C_2 constante arbitrare. Pentru a obține soluții mărginite pentru $0<r<1$, în mod necesar $C_2=0$ și se obține $R(r)=C_1\cdot r$, cu C_1 constantă arbitrară.

§ 3. Integrale prime pentru sisteme diferențiale

3.1. Integrale prime și legi de conservare

Să considerăm sistemul diferențial de ordinul I

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1. \end{cases}$$

Se observă că în lungul oricărei curbe integrale $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ avem $x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1x_2 + x_2(-x_1) = 0$ deci $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1^2 + x_2^2) = 0$, adică $x_1^2 + x_2^2 =$ constant. Așadar, funcția $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ care evident nu este constantă, devine constantă în lungul oricărei soluții (curbe integrale) a sistemului considerat. Se mai spune că ψ este o integrală primă, iar relația $\psi(x_1, x_2) = C$ (constant) este o lege de conservare pentru sistemul considerat.

Dacă x_1, x_2 sînt interpretați ca parametri de stare ai unui anumit sistem fizic, atunci funcția ψ este numită funcție de stare.

Să considerăm un exemplu poate mai convingător. Fie un corp de masă m aflat în cădere liberă sub acțiunea gravitației $F = mg$. Atunci mișcarea corpului este descrisă de sistemul $\dot{x} = w$, $\dot{w} = -g$, unde w este viteza lui și x distanța față de suprafața pămîntului (parametri de stare). Funcția de stare $E = mgx + \frac{mw^2}{2}$ este constantă în lungul traiectoriei, deoarece

$$\dot{E} = mg\dot{x} + mw\dot{w} = mgw + mw(-g) = 0.$$

Recunoaștem aici legea conservării energiei. Cu notații schimbate, punînd $x_1 = x$, $x_2 = w$, sistemul este asociat cîmpului de vectori $v(x_1, x_2) = (x_2, -g)$.

Existența legilor de conservare (în lungul evoluțiilor) ale sistemelor dinamice descrise prin sisteme diferențiale este un fenomen deosebit de important și va fi analizat în continuare.

Să considerăm un sistem diferențial autonom $\dot{x} = v(x)$, asociat unui cîmp de vectori $v : U \to \mathbb{R}^n$ de clasă C^r $(r \geq 1)$, definit într-un domeniu $U \subset \mathbb{R}^n$. În mod explicit sistemul se scrie

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1(x_1, \dots, x_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dot{x}_n = v_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases}$$

unde $v_1, \dots, v_n$ sînt componentele cîmpului v. În exemplul anterior avem $n = 2$,

$$U = \mathbb{R}^2 \text{ și } v_1(x_1, x_2) = x_2,\ v_2(x_1, x_2) = -x_1.$$

Sistemul anterior se poate scrie "sub formă simetrică" astfel

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{v_1} = \dots = \frac{\mathrm{d}x_n}{v_n} (= \mathrm{d}t).$$

Revenind la notațiile anterioare, cîmpul v asociază fiecărui punct $x \in U$ un vector tangent $v(x) \in T_xU \simeq \mathbb{R}^n$. Dacă $f(x_1, \dots x_n)$, $f : U \to \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^1 pe U, atunci pentru orice $x \in U$ se poate considera derivata lui f în

punctul x şi în direcţia vectorului $v(x)$, notată $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}(x)$ sau $L_v f\,|_x$. Reamintim de la cursul de analiză că aceasta este definită prin $L_v f|_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\cdot v_i(x)$, unde $v_1, ..., v_n$ sînt componentele lui v.

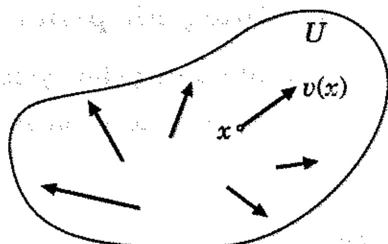


Figura V.12

DEFINIŢIA 3.1. Se numeşte **derivata funcţiei** $f: U \to \mathbb{R}$ **în direcţia cîmpului de vectori** v, funcţia $L_v f: U \to \mathbb{R}$, $x \to L_v f\,|_x$, deci

$$(1) \qquad L_v f(x) = L_v f\,|_x, \text{ pentru orice } x \in U.$$

EXEMPLE. 1°). Dacă s este un versor ($\|s\| = 1$) şi $a \in U$, atunci $L_s f(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}(a)$. Funcţia $L_s f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}: U \to \mathbb{R}$ astfel definită este derivata lui f pe direcţia lui s. Dacă $s = (s_1, ..., s_n)$, atunci reamintim că

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = s_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + s_n\frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

2°). Fie e_1 cîmpul de vectori standard dat de prima coordonată; aşadar, $e_1(x) = (1, 0, ..., 0)$, pentru orice $x \in U$. În acest caz, $L_{e_1}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1}$.

Dacă funcţia f şi cîmpul v sînt de clasă C^r ($r \geq 1$), atunci funcţia

$$(2) \qquad L_v f = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}v_i \text{ rezultă de clasă } C^{r-1}.$$

DEFINIŢIA 3.2. Fie $v: U \to \mathbb{R}^n$ un cîmp de vectori şi $f: U \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^1(U)$. Funcţia f se numeşte o **integrală primă a sistemului diferenţial**

$$(3) \qquad \dot{x} = v(x),\ x \in U,$$

dacă derivata sa în direcţia cîmpului de vectori v este nulă în fiecare punct din U, adică

$$(4) \qquad L_v f = 0.$$

Putem enunţa proprietatea unei funcţii f de a fi o integrală primă pentru sistemul diferenţial $\dot{x} = v(x)$ sub forma echivalentă următoare: o funcţie diferenţiabilă $f: U \to \mathbb{R}$ este o integrală primă pentru sistemul diferenţial autonom $\dot{x} = v(x) \leftrightarrow f$ este constantă în lungul oricărei soluţii $x = \varphi(t)$, $\varphi: I \to U$ (adică funcţia compusă $f \circ \varphi$ este constantă pe I); într-adevăr, $(\forall)\ t \in I$, $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = v(\varphi(t))$ şi

$$(5) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \varphi)\Big|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(t_0)}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0} = \sum\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\varphi(t_0)}\cdot v^i(\varphi(t_0)) = (L_v f)(\varphi(t_0)).$$

Se mai scrie uneori $f(x_1, ..., x_n) = C$, constant. De aceea se mai spune că integralele prime reprezintă **legi de conservare.**

EXEMPLE. 1) Fie $n = 2$, $U = \mathbb{R}^2$ şi $v(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$, atunci sistemul (3) asociat este

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

şi o integrală primă a acestui sistem este funcția $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$;

într-adevăr, $L_v(f) \overset{cf.(2)}{=} 2x_1x_2 + 2x_2(-x_1) = 0$; se mai scrie $x_1^2 + x_2^2 = C$, constant.

Pentru determinarea integralelor prime ale unor sisteme concrete $\dot{x} = v(x)$ se recomandă scrierea acestora sub forma simetrică

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \dots = \frac{dx_n}{v_n}$$

şi găsirea (prin aplicarea proprietăților rapoartelor egale) a unui raport de forma $\frac{df}{0}$ egal cu rapoartele precedente. Atunci f va fi o integrală primă (deoarece rezultă că $df = 0$ deci $f =$ constant în lungul curbelor integrale). În cazul anterior,

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{-x_1} = \frac{x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2}{0} = \frac{\frac{1}{2}d(x_1^2 + x_2^2)}{0}, \text{ deci } x_1^2 + x_2^2 = C.$$

Similar, pentru $v(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_3, x_1 + x_3)$ avem

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{-x_3} = \frac{dx_3}{x_1 + x_3} = \frac{dx_1 - dx_2 - dx_3}{0} = \frac{d(x_1 - x_2 - x_3)}{0}$$

şi ca atare funcția $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 - x_3$ este o integrală primă.

2) Fie H o funcție diferențiabilă de clasă C^r $(r \geq 2)$ de $2n$ variabile $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ definită pe un domeniu $U \subset \mathbb{R}^{2n}$. Sistemul de ecuații

$$(6) \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \; \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \; 1 \leq i \leq n$$

se numeşte **sistem de ecuații canonice în sens Hamilton.**

PROPOZIȚIA 3.1. Funcția $H : U \to \mathbb{R}$ (numită hamiltonian) **este o integrală primă a sistemului de ecuații canonice** (6).

DEMONSTRAȚIE. Este suficient să observăm că în acest caz $x_i = p_i$, $x_{n+i} = q_i$ şi

$$v_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \; v_{n+i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \; (1 \leq i \leq n) \text{ deci}$$

$$L_v H \overset{cf.(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] = 0.$$

Aşadar, $H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = C$, constant, reprezintă o lege de conservare a sistemului (6).

3) **Cîmpuri conservative.** Presupunem că o particulă de masă m se mişcă în $\mathbb{R}^3$ sub acțiunea unei forțe $\vec{F} = -\operatorname{grad} V$ cu V funcție de clasă C^1 (cîmpul $\vec{F}$ se mai numeşte **conservativ** iar V este un **potențial scalar** al mişcării).

Fie $x = (x_1, x_2, x_3)$ coordonatele poziției particulei la momentul t deci

$m\ddot{x} = -\operatorname{grad} V$ şi pe componente $m\ddot{x}_1 = -\dfrac{\partial V}{\partial x_1}$, $m\ddot{x}_2 = -\dfrac{\partial V}{\partial x_2}$, $m\ddot{x}_3 = -\dfrac{\partial V}{\partial x_3}$.

Atunci

$$m(\dot{x}_1\ddot{x}_1 + \dot{x}_2\ddot{x}_2 + \dot{x}_3\ddot{x}_3) = -\frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 - \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 - \frac{\partial V}{\partial x_3}\dot{x}_3$$

adică

$$\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)).$$

Notînd

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) = \frac{1}{2}m\left\|\dot{\vec{r}}\right\|^2 = \frac{1}{2}mv^2 \text{ (energia cinetică a particulei),}$$

atunci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V$$

deci $T + V = \text{constant}$. Aşadar, în lungul oricărei curbe integrale, suma $T + V$ este constantă şi este numită integrala primă a energiei (constanta diferă de la o curbă integrală la alta).

Un cîmp de vectori conservativ $\vec{v}$ se numeşte **central** dacă există o funcţie $\varphi(r)$, $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, astfel încît $\vec{v} = -\operatorname{grad}\varphi(r)$. [Un exemplu tipic îl constituie cîmpul atracţiilor newtoniene $\vec{v} = -k\dfrac{\vec{r}}{r^3} = \operatorname{grad}\left(\dfrac{k}{r}\right)$]. Mişcarea unei particule de masă m sub acţiunea unei forţe centrale este plană; într-adevăr dacă $\vec{r} = \vec{r}(t)$ este vectorul de poziţie al particulei la momentul t, atunci

$$m\ddot{\vec{r}} = -\operatorname{grad}\varphi(r) = -\frac{\varphi'(r)}{r^2}\vec{r}$$

deci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0 + \vec{r} \times \left(-\frac{\varphi'(r)}{mr^2}\vec{r}\right) = 0.$$

Aşadar, $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{C}$, vector constant şi ca atare $\vec{r} \perp \vec{C}$, adică mişcarea se face într-un plan perpendicular pe vectorul $\vec{C}$.

4) Să considerăm mişcarea unui satelit artificial S al pămîntului P la înălţimi mici (neglijînd atracţia Soarelui sau a altor plante, rezistenţa atmosferei Pămîntului etc.). Alegem un sistem de coordonate carteziene cu originea O în centrul Pămîntului (presupus fix în raport cu stelele). Asimilăm satelitul cu un punct material de masă constantă m şi notăm $\vec{r} = \overrightarrow{OS}$ (figura V.13). Forţa de atracţie a satelitului de către Pămînt fiind $\vec{F} = -\dfrac{k \cdot m\vec{r}}{r^3}$ ($k > 0$ constant), rezultă $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$; mişcarea fiind plană, putem presupune că $\vec{r} = (x_1, x_2, 0)$ şi ca atare $\ddot{x}_1 = -\dfrac{k}{r^3}x_1$, $\ddot{x}_2 = -\dfrac{k}{r^3}x_2$ unde $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

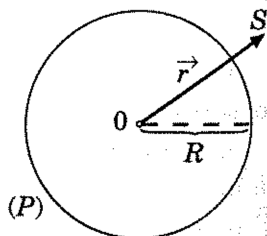


Figura V.13.

De aici rezultă $\dot{x}_1\ddot{x}_1 + \dot{x}_2\ddot{x}_2 = -\frac{k}{r^3}(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2)$ şi integrînd, $\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} - \frac{k}{r} = C$ (constant); se obţine astfel o integrală primă a mişcării; notînd cu v_0 viteza la suprafaţa Pămîntului ($r = R$), rezultă $\frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} - \frac{k}{r} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{k}{R}$. Se observă că dacă satelitul se îndepărtează oricît de mult (adică $r \to \infty$ pentru $t \to \infty$), atunci viteza va satisface condiţia $\frac{v_0^2}{2} - \frac{k}{R} \geq 0$ deci $v_0 \geq \sqrt{\frac{2k}{R}} \simeq 11{,}2 \text{ km/s}$ (aceasta din urmă fiind numită **a doua viteză cosmică**).

3.2. Existenţa integralelor prime

În general, pentru un sistem diferenţial autonom pot să nu existe integrale prime globale, adică definite pe întreg domeniul $U \subset \mathbb{R}^n$. Vom vedea însă, după ce vom demonstra cîteva rezultate preliminare, că există integrale prime locale (adică definite într-o vecinătate a oricărui punct $x_0 \in U$).

DEFINIŢIA 3.2. Fie U, $V \subset \mathbb{R}^n$ două domenii, $v : U \to \mathbb{R}^n$ un cîmp de vectori şi $F : U \to V$ un difeomorfism. Se numeşte **imaginea cîmpului de vectori** v **prin difeomorfismul** F, cîmpul de vectori F_*v, ai cărui vectori se obţin din vectorii $v(x)$ prin acţiunea diferenţialei $F_*|_x$:

$$(F_*v)\,(F(x)) = F_*|_x\, v(x) \in T_{F(x)}V.$$

PROPOZIŢIA 3.2. Fie $F : U \to V$ un difeomorfism. Atunci sistemul diferenţial care are spaţiul fazelor U şi este dat de cîmpul de vectori v

$$(3) \qquad \dot{x} = v(x),\ x \in U$$

este echivalent cu sistemul diferenţial care are spaţiul fazelor V şi este dat de cîmpul de vectori F_*v

$$(7) \qquad \dot{y} = (F_*v)(y),\ y \in V$$

[adică, $\varphi : I \to U$ este soluţie a sistemului (3) **dacă şi numai dacă $F \circ \varphi : I \to V$ este soluţie a sistemului** (7)].

DEMONSTRAŢIE. Fie $\varphi : I \to U$ o soluţie a sistemului (3); $(\forall)\, t_0 \in I$ şi $\varphi(t_0) = x_0 \in U$, notăm cu $y_0 = F(x_0)$. Atunci avem:

$$\left.\frac{d(F \circ \varphi)}{dt}\right|_{t=t_0} = F_*|_{x_0}\left(\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=t_0}\right) = F_*|_{x_0}(v(x_0)) = (F_*v)(y_0),$$

deci $F \circ \varphi : I \to V$ este soluţie a sistemului (7). Reciproc, se aplică acelaşi raţionament pentru $F^{-1} : V \to U$.

DEFINIŢIA 3.4. Fie V un spaţiu vectorial real finit dimensional. Două subspaţii vectoriale W_1, $W_2 \hookrightarrow V$ se numesc **transversale** dacă $W_1 + W_2 = V$.

Avem următoarele două rezultate simple despre transversalitate.

LEMA 3.3. Pentru orice subspaţiu W_1 de dimensiune k al lui $\mathbb{R}^n$ există un subspaţiu W_2 de dimensiune $n - k$ al lui $\mathbb{R}^n$ astfel încît W_1, W_2 să fie transversale.

DEMONSTRAȚIE. Se poate alege drept W_2 complementul ortogonal $W_1^{\perp}$ (corolarul 2 al teoremei II.1.3).

LEMA 3.4. Dacă operatorul liniar $A : V \to V$ transformă două subspații transversale în două subspații transversale, atunci A este un izomorfism.

DEMONSTRAȚIE. Fie $V = W_1 + W_2$; atunci avem

$$A(V) = A(W_1) + A(W_2) = V,$$

adică A este surjectiv. Aplicînd corolarului 2 al teoremei I.2.15 rezultă că A este un izomorfism.

Vom demonstra acum, cu ajutorul teoremelor fundamentale pentru sisteme diferențiale, următoarea **"teoremă de îndreptare" a cîmpurilor vectoriale autonome.**

TEOREMA 3.5. Fie $v : U \to \mathbb{R}^n$ un cîmp de vectori de clasă C^r $(r \geq 2)$ pe domeniul $U \subset \mathbb{R}^n$ și fie $x_0 \in U$ un punct nesingular al cîmpului ($v(x_0) \neq 0$). Atunci există o vecinătate $W \subset U$ a punctului x_0 și un difeomorfism $F : W \to V$ al vecinătății W pe un domeniu $V \subset \mathbb{R}^n$, astfel încît $F_* v = e_n$ (unde e_n este cîmpul de vectori constant, $e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$.

DEMONSTRAȚIE. Considerăm sistemul diferențial autonom

$$(3) \qquad \dot{x} = v(x), \ \ x \in U$$

și fie $v_0 = v(x_0) \neq 0$. Fie $W_1 = \{v_0\}$ subspațiul vectorial de dimensiune 1 generat de v_0 în spațiul vectorial $T_{x_0}U \equiv \mathbb{R}^n$. Conform lemei 3.3, există un subspațiu vectorial W_2 de dimensiune $n - 1$ în $T_{x_0}U$, care este transversal la W_1 (cu alte cuvinte există un hiperplan $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, care trece prin punctul x_0 și este transversal la direcția dată de vectorul v_0).
Definim aplicația $G : V_0 \to \mathbb{R}^n$, prin $G(\xi, t) = g(\xi, t)$, unde $g(\xi, t)$ este valoarea soluției sistemului (3) cu condiția inițială $\varphi(0) = \xi$, unde $\xi \in \mathbb{R}^{n-1} \cap U_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ este hiperplanul de mai sus, iar U_0 este vecinătatea lui x_0 dată de teorema 1.8 de existență a soluțiilor), unde $t \in I_0$ (intervalul de existență al soluțiilor), iar $V_0 = (\mathbb{R}^{n-1} \cap U_0) \times I_0 \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$. Evident, punctul $(\xi = x_0, 0) \in V_0$. Vom arăta că micșorînd, eventual, vecinătatea V_0 a acestui punct, G este un difeomorfism și $F = G^{-1}$ este difeomorfismul căutat.

Din teorema 1.10 rezultă că G este diferențiabilă ($G \in C^{r-1}$) pe un domeniu mai mic V_1. Apoi G transformă cîmpul vectorial constant e_n în v. Într-adevăr, avem

$$(G_* e_n)(\xi, t) = G_*\big|_{(\xi,t)} e_n = \frac{\mathrm{d}g(\xi, t)}{\mathrm{d}t} = v(\xi, t).$$

Vom arăta că $G_*\big|_{(x_0,0)}$ este un izomorfism și pentru aceasta vom calcula acest operator liniar pe subspațiile transversale $\mathbb{R}^{n-1}$ și $\mathbb{R}^1$. Din forma soluției $g(x, t)$ (vezi teorema 1.8), rezultă că

$$G_*\big|_{\mathbb{R}^{n-1}} = Id, \ \ (G_*\big|_{\mathbb{R}^1})(e) = v_0,$$

deci $G_*|_{(x_0,0)}$ transformă o pereche de subspații transversale într-o pereche de subspații transversale şi, conform lemei 3.4 este un izomorfism. Aplicînd teorema funcției inverse, rezultă că G este un difeomorfism pe o vecinătate $V \to W$, iar $F = G^{-1} : W \to V$ este difeomorfismul căutat.

Corolar. Sistemul diferențial autonom

$$(3) \qquad \dot{x} = v(x),\ x \in U$$

este echivalent într-o vecinătate suficient de mică W **a punctului nesingular** $x_0 \in U$ $(v(x_0) \neq 0)$ **cu sistemul diferențial**

$$(8) \qquad \dot{y} = e_n,\ y \in V,$$

adică cu sistemul: $\dot{y}_1 = 0, \ldots, \dot{y}_{n-1} = 0, \dot{y}_n = 1.$

DEMONSTRAȚIE. Din teorema 3.5. rezultă că există difeomorfismul local $F : W \to V$ astfel încît $F_* v = e_n$. Aplicînd propoziția 3.2 rezultă că, local, sistemul (3) este echivalent cu sistemul (8):

$$\dot{y}_1 = 0, \ldots, \dot{y}_{n-1} = 0, \dot{y}_n = 1.$$

Putem acum să enunțăm teorema de existență locală a integralelor prime.

TEOREMA 3.6. **Fie** $v : U \to \mathbb{R}^n$ **un cîmp de vectori de clasă** C^r $(r \geq 2)$ **pe domeniul** $U \subset \mathbb{R}^n$ **şi fie** $x_0 \in U$ **un punct nesingular al cîmpului** $(v(x_0) \neq 0)$. **Atunci există o vecinătate** W **a lui** x_0 **în** U **astfel încît sistemul diferențial autonom**

$$(3) \qquad \dot{x} = v(x),\ x \in W$$

are, în domeniul W, $n - 1$ **integrale prime funcțional independente** $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ **şi orice integrală primă a sistemului** (3) **în domeniul** W **este funcție de** $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$.

DEMONSTRAȚIE. Remarcînd că proprietatea unei funcții de a fi integrală primă cît şi independența funcțională nu depind de sistemul de coordonate (adică sînt invariante la un difeomorfism) rezultă că este suficient să demonstrăm afirmațiile teoremei în cazul sistemului (8) dat de corolarul teoremei 3.5.

În acest caz este evident că funcțiile de coordonate $y \to y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, sînt $n - 1$ integrale prime funcțional independente, şi că orice integrală primă este funcție diferențiabilă de coordonatele $y_1, \ldots, y_{n-1}$, adică este funcție de cele $n - 1$ integrale prime.

OBSERVAȚIE. Pentru sistemele diferențiale neautonome

$$(9) \qquad \dot{x} = v(x, t),\ t \in \mathbb{R}, x \in U,$$

o funcție $f : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferențiabilă va fi **integrală primă dependentă de timp** dacă ea este integrală primă pentru sistemul autonom care se obține din (9) prin adăugarea ecuației $\dot{t} = 1$:

$$(10) \qquad \dot{X} = V(X), X \in U \times \mathbb{R}, X = (x, t), V(X) = (v(x, t), 1).$$

Cîmpul de vectori V nu se anulează şi se poate aplica teorema 3.6.

3.3. Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi liniare

Fie $v : U \to \mathbb{R}^n$ un cîmp de vectori de clasă C^r $(r \geq 2)$ pe domeniul $U \subset \mathbb{R}^n$ şi fie $v_1, v_2, \ldots, v_n : U \to \mathbb{R}$ componentele sale. Se numeşte **ecuație cu derivate parțiale de ordinul întîi liniară omogenă** pentru funcția necunoscută $u : U \to \mathbb{R}$, u de clasă C^1, egalitatea

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{n} v_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in U.$$

Funcția $u : U \to \mathbb{R}$, de clasă C^1, care verifică relația (11) pentru $(\forall)\, x \in U$ se numeşte **soluție** a ecuației (11) pe domeniul U. Există o strînsă legătură între ecuația (11) şi sistemul diferențial autonom (3) şi anume:

TEOREMA 3.7. Orice integrală primă pe U a sistemului autonom (3) **este soluție pe U a ecuației** (11) **şi, reciproc, orice soluție pe U a ecuației** (11) **este integrală primă pe U a sistemului** (3).

DEMONSTRAȚIE. Fie $u : U \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 care este integrală primă a sistemului diferențial $\dot{x} = v(x)$, $x \in U$. Din formulele (2) şi (4) obținem $0 = (L_v u)(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \cdot v_i(x)$, $(\forall)\, x \in U$, deci funcția u este soluție a ecuației cu derivate parțiale de ordinul întîi omogenă (11).

Reciproc, fie $u : U \to \mathbb{R}$ o soluție a ecuației (11) şi fie $\varphi : I \to U$ o soluție oarecare a sistemului diferențial (3). Pentru $(\forall)\, t \in I$ avem din (11):

$$\sum_{i=1}^{n} v_i(\varphi(t)) \frac{\partial u}{\partial x_i}(\varphi(t)) = 0.$$

Dar $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = v(\varphi(t))$, deci rezultă relația $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\varphi(t)) \frac{\mathrm{d}\varphi_i}{\mathrm{d}t} = 0$, $(\forall)\, t \in I$, sau echivalent $\frac{\mathrm{d}(u \circ \varphi)}{\mathrm{d}t} = 0$, $(\forall)\, t \in I$, adică $u \circ \varphi =$ constantă pe I, şi atunci funcția u este integrală primă a sistemului diferențial autonom (3).

OBSERVAȚIE. Pentru orice punct $x_0 \in U$ cu $v(x_0) \neq 0$ din teorema 3.6 rezultă că există o vecinătate W a lui x_0 în U şi $n - 1$ integrale prime ale sistemului (3) $f_1, \ldots, f_{n-1} : W \to \mathbb{R}$. Din teoremele 3.6 şi 3.7 rezultă că orice soluție a ecuației (11) pe domeniul W este dată de o funcție de clasă C^1 de funcțiile $f_1, \ldots, f_{n-1}$.

EXEMPLE. 1) Fie ecuația $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$. În acest caz, $v(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ şi sistemul diferențial asociat este $\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{x_2}$. Deoarece $\ln|x_1| = \ln|x_2| + \ln|C|$ rezultă că funcția $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$ este o integrală primă (în deschisul $x_1 x_2 \neq 0$). Soluția generală a ecuației date este $u = \Phi\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ cu Φ funcție arbitrară de clasă C^1.

2) Pentru ecuația $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+(z-\sqrt{x^2+y^2+z^2})\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$ sistemul diferențial asociat este $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{\mathrm{d}z}{z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. O integrală primă este evidentă: $f_1(x,y,z)=\dfrac{x}{y}$. Scriind $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=\dfrac{(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}z}{-x^2-y^2}$, rezultă $x\,\mathrm{d}x+y\,dy+(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}z=0$ deci $\dfrac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\mathrm{d}z=0$ și se obține încă o integrală primă $f_2(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z$. Soluția generală a ecuației considerate este $u=\Phi\left(\dfrac{x}{y},\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z\right)$, cu Φ funcție arbitrară de clasă C^1.

Se numește **ecuație cu derivate parțiale de ordinul întîi cvasiliniară** egalitatea

$$(12)\qquad \sum_{i=1}^{n} g_i(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=g(x_1,\dots,x_n,u),$$

unde g_i $(i=1,\dots,n)$, $g:D\to\mathbb{R}$ sînt de clasă C^1 pe domeniul $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$. Se numește **soluție** a ecuației (12) orice funcție de clasă C^1 definită pe un domeniu $U\subset\mathbb{R}^n$, $u:U\to\mathbb{R}$, astfel încît $(\forall)\,x\in U$ să avem $(x,u(x))\in D$ și

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x,u(x))\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)=g(x,u(x)),\ (\forall)\,x\in U.$$

Pentru rezolvarea ecuației (12) procedăm astfel: căutăm soluția u sub formă implicită $F(x_1,\dots,x_n,u)=0$, unde $F:D\to\mathbb{R}$ este de clasă C^1 și $\dfrac{\partial F}{\partial u}\neq 0$ pe D. Atunci rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=-\frac{\partial F}{\partial x_i}\Big/\frac{\partial F}{\partial u},\ i=1,\dots,n,$$

și ecuația (12) devine

$$(13)\qquad \sum_{i=1}^{n} g_i(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n,u)+g(x_1,\dots,x_n,u)\frac{\partial F}{\partial u}(x_1,\dots,x_n,u)=0,$$

adică o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întîi liniară omogenă, care se poate rezolva ca mai sus.

APLICAȚIE. Fie $U\subset\mathbb{R}^3$ un domeniu și $\vec{v}:U\to\mathbb{R}^3$ un cîmp de clasă C^1 fără puncte singulare pe U ($\vec{v}$ nu se anulează pe U). Orbitele soluțiilor sistemului diferențial autonom $\dot{x}=\vec{v}(x)$, $x\in U$ se numesc **linii de cîmp** pentru v. Dacă scriem explicit

$$\vec{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k},\ (x,y,z)\in U,$$

sistemul diferențial anterior se scrie sub forma echivalentă

$$(14)\qquad \frac{\mathrm{d}x}{P(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}y}{Q(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}z}{R(x,y,z)}(=\mathrm{d}t),\ (x,y,z)\in U,$$

numită **forma simetrică a sistemului diferențial autonom (al liniilor de cîmp).**

Reținem că liniile de cîmp ale unui cîmp vectorial $\vec{v}$ sînt suporturi de curbe $\gamma : x = x(t)$, $t \in I$, în lungul cărora vectorul tangent în fiecare punct t coincide cu $v(x(t))$; figura V.14.

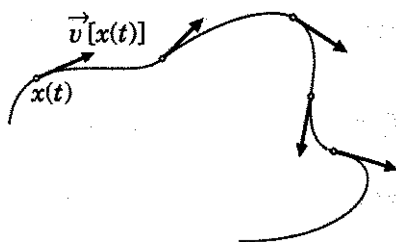


Figura V.14.

În unele cazuri concrete (de exemplu, cîmpul electromagnetic), liniile de cîmp sînt numite şi linii de forță. Ele au fost introduse prin considerații fizice de M. Faraday (1791–1876) şi ulterior au devenit obiect de studiu matematic.

EXEMPLE. 1) Fie $\vec{v} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, cîmpul vectorilor de poziție. Liniile de cîmp au sistemul diferențial $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{z}$ deci $\frac{x}{y} = C_1$, $\frac{y}{z} = C_2$ (C_1, C_2 constante). Ele sînt drepte trecînd prin origine.

2) Dacă $\vec{v} = \nabla\varphi \times \nabla\psi$ cu φ, ψ funcții de clasă C^1 pe un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$ şi $\vec{v}$ este nenul, atunci liniile de cîmp vor fi curbe $r = \vec{r}(t)$ pentru care $\vec{v}$ este coliniar cu $\dot{\vec{r}}$ deci $\mathrm{d}\vec{r} \times \vec{v} = \vec{0}$. Folosind formula lui Gibbs rezultă $(\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\vec{r})\nabla\varphi - (\nabla\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{r})\nabla\psi = 0$ şi cum $\nabla\varphi \cdot \nabla\psi$ sînt liniar independenți (căci $\vec{v} \neq \vec{0}$), rezultă că $\nabla\psi \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$, $\nabla\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$, adică $\mathrm{d}\psi = 0$, $\mathrm{d}\varphi = 0$. Ca atare, liniile de cîmp sînt curbele $\varphi(x, y, z) = C_1$, $\psi(x, y, z) = C_2$ cu C_1, C_2 constante.

O suprafață $S \subset U$ de clasă C^1, fără puncte singulare (adică cu plan tangent în fiecare punct) se numeşte **suprafață de cîmp** pentru $\vec{v}$ dacă în orice punct $p \in S$ vectorul $v(p)$ este tangent suprafeței ($v(p) \in T_pS$).

Fie S dată de ecuația $F(x, y, z) = 0$ în U, unde $F : U \to \mathbb{R}$ este de clasă C^1.

Deoarece S nu are puncte singulare are normală în orice punct $p \in S$ şi un vector director al normalei în p este dat de

$$\operatorname{grad}_p F = \frac{\partial F}{\partial x}(p)\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(p)\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(p)\vec{k} \neq \vec{0}.$$

Atunci vectorul $v(p)$ este tangent la S dacă şi numai dacă $v(p)$ este ortogonal vectorului $\operatorname{grad}_p F$, adică dacă şi numai dacă are loc egalitatea

$$(15) \qquad v(p) \cdot \operatorname{grad}_p F = P(x, y, z)\frac{\partial F}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial F}{\partial y} + R(x, y, z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

$(\forall)\, p = (x, y, z) \in S$. Rezultă că S este o suprafață de cîmp pentru $\vec{v}$ dacă şi numai dacă este dată de o ecuație $F(x, y, z) = 0$, unde funcția $F : U \to \mathbb{R}$, de clasă C^1, cu $\operatorname{grad} F \neq \vec{0}$, este soluție a ecuației cu derivate parțiale de ordinul întîi liniară (15), numită **ecuația suprafețelor de cîmp** ale lui $\vec{v}$. Legătura strînsă între sistemul (14) şi ecuația (15) este dată de teorema 3.7. Sistemul diferențial (14) se mai numeşte şi **sistemul caracteristic** al ecuației (15), iar liniile de cîmp se mai numesc şi **curbe caracteristice** (**linii caracteristice** ale ecuației (15)).

Determinarea unei suprafeţe de cîmp care trece printr-o curbă dată $\Gamma \subset U$, de ecuaţii $\varphi_1(x, y, z) = 0$, $\varphi_2(x, y, z) = 0$, $(x, y, z) \in U$, se numeşte **problemă Cauchy** pentru ecuaţia (15).

Fie $f_1, f_2 : U \to \mathbb{R}$ două integrale prime funcţional independente pentru sistemul (14). Dacă $\varphi : I \to U$ este o soluţie a sistemului, atunci orice punct $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ al liniei de cîmp corespunzătoare verifică relaţiile

$$f_1(x(t), y(t), z(t)) = C_1,\ f_2(x(t), y(t), z(t)) = C_2, \text{ cu } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Aplicînd teorema funcţiilor implicite sistemului $f_1(x, y, z) = C_1$, $f_2(x, y, z) = C_2$ (f_1, f_2 sînt funcţional independente) rezultă că, cel puţin local, orice linie de cîmp este dată de ecuaţiile $f_1(x, y, z) = C_1$, $f_2(x, y, z) = C_2$. Dacă Γ nu este o linie de cîmp, atunci ea va intersecta o linie de cîmp dacă şi numai dacă constantele C_1, C_2 verifică o relaţie de compatibilitate $\Phi(C_1, C_2) = 0$ (Φ funcţie de clasă C^1), obţinută din sistemul algebric $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $f_1 = C_1$, $f_2 = C_2$.

Suprafaţa dată de ecuaţia $\Phi(f_1(x, y, z), \ f_2(x, y, z)) = 0$ este (conform teoremei 3.7) o suprafaţă de cîmp care trece, evident, prin curba Γ.

Dacă Γ este o linie de cîmp ea este dată, cel puţin local, de ecuaţii de forma $f_1(x, y, z) = C_1$, $f_2(x, y, z) = C_2$, deci există o infinitate de suprafeţe de cîmp $(\alpha(f_1(x, y, z) - C_1) + \beta(f_2(x, y, z) - C_2) = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ care trec prin Γ, adică problema Cauchy pentru curbe caracteristice este nedeterminată.

§ 4. Stabilitatea poziţiilor de echilibru

4.1. Prelungirea soluţiilor locale ale sistemelor diferenţiale

Fie $U \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu şi $v : U \to \mathbb{R}^n$ un cîmp de vectori de clasă C^r $(r \geq 1)$. Fie

$$(1) \qquad \dot{x} = v(x),\ x \in U$$

sistemul diferenţial autonom asociat cîmpului v.

DEFINIŢIA 4.1. Dacă există o soluţie φ a sistemului (1) cu condiţia iniţială $\varphi(t_0) = x_0$ $(x_0 \in U)$, definită pentru orice $t \in \mathbb{R}$, atunci se spune că **această soluţie poate fi prelungită nemărginit.** Dacă există o soluţie, definită pentru orice valoare $t \geq t_0$ (respectiv $t \leq t_0$), atunci se spune că **soluţia poate fi prelungită nemărginit în viitor** (respectiv, **în trecut**). Fie Γ o submulţime a domeniului U. Dacă există o soluţie φ a sistemului (1) cu condiţia iniţială $\varphi(t_0) = x_0$, definită în intervalul $t_0 \leq t \leq T$ şi cu $\varphi(T) \in \Gamma$, atunci se spune că **soluţia poate fi prelungită în viitor pînă la** Γ (analog se defineşte prelungirea în trecut pînă la Γ).

Presupunem că $v(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in U$.

TEOREMA 4.1 (de prelungire a soluţiilor). Fie K **o submulţime compactă a domeniului** U, $x_0 \in K$. **Soluţia (locală)** φ **a sistemului** (1) **care verifică condiţia iniţială** $\varphi(t_0) = x_0$ **se poate prelungi în viitor (sau în trecut) fie nemărginit, fie pînă la frontiera** Γ **a lui** K. **Prelungirea**

este unică în sensul că orice două soluții cu aceeași condiție inițială coincid pe intersecția intervalelor de definiție.

DEMONSTRAȚIE (cf. [1]). Demonstrăm mai întîi unicitatea. Fie T marginea superioară a valorilor $\tau \in \mathbb{R}$ pentru care două soluții φ_1, φ_2 coincid pentru $t_0 \le t \le \tau$. Dacă T este punct interior pentru ambele intervale de definiție ale soluțiilor, atunci $\varphi_1(T) = \varphi_2(T)$ din continuitatea soluțiilor φ_1 și φ_2. Conform teoremei de unicitate locală, φ_1 coincide cu φ_2 într-o vecinătate a lui T, deci T nu este margine superioară, contradicție. Rezultă că T este capătul unuia din intervalele de definiție și cele două soluții coincid pe acea parte a intersecției intervalelor pe care $t \ge t_0$. Cazul $t \le t_0$ se arată analog.

Vom construi acum prelungirea. Deoarece două soluții, care verifică aceeași condiție inițială $\varphi(t_0) = x_0$, coincid pe intersecția intervalelor de definiție, atunci din ele se poate forma o soluție definită pe reuniunea acestor intervale.

Notăm cu T marginea superioară a numerelor reale τ pentru care există o soluție φ a sistemului (1) cu condiția inițială $\varphi(t_0) = x_0$ și care satisface condiția $\varphi(t) \in K$ pentru orice t cu $t_0 \le t \le \tau$. Prin ipoteză, $t_0 \le T \le \infty$. Dacă $T = \infty$, soluția se poate prelungi în viitor nemărginit. Să presupunem că $T < \infty$ și să arătăm că există o soluție φ, definită pentru orice t cu $t_0 \le t \le T$ și cu $\varphi(T) \in K$. Într-adevăr, din teorema de existență locală rezultă că oricărui punct $x_0 \in U$ îi corespunde o vecinătate $V_0(x_0)$ și un număr $\varepsilon(x_0) > 0$ astfel încît pentru $x \in V_0(x_0)$ să existe o soluție φ cu condiția inițială $\varphi(t_0) = x$, definită pentru orice $|t - t_0| < \varepsilon(x_0)$. Deoarece K este compactă, din vecinătățile $V_0(x_0)$ ale punctelor $x_0 \in K$ se poate extrage o acoperire finită a mulțimii K. Fie $\varepsilon > 0$ cel mai mic dintre numerele $\varepsilon(x_0)$ corespunzătoare acoperirii finite.

Deoarece T este marginea superioară, există τ cu $T - \varepsilon < \tau < T$, pentru care $\varphi(t) \in K$ pentru orice t din intervalul $t_0 \le t \le \tau$. Înparticular, $\varphi(\tau) \in K$ și atunci $\varphi(\tau)$ se află într-una din vecinătățile acoperirii finite. Prin urmare, există o soluție φ_1 cu condiția inițială $\varphi_1(\tau) = \varphi(\tau)$, definită pentru $|t - \tau| < \varepsilon$. Conform teoremei de unicitate, φ_1 coincide cu φ pe intersecția intervalelor de definiție și deci putem construi din φ și φ_1 o soluție φ_2, definită pentru $t_0 \le t \le \tau + \varepsilon$. În particular există valoarea $\varphi_2(T)$ deoarece $T < \tau + \varepsilon$. Să arătăm că $\varphi_2(\theta) \in K$ pentru orice θ cu $t_0 \le \theta < T$. Într-adevăr, orice soluție φ cu condiția inițială $\varphi(t_0) = x_0$, definită pentru $t_0 \le t \le \theta$, trebuie să coincidă cu φ_2 din unicitate.

Dacă $\varphi_2(\theta) = \varphi(\theta)$ nu ar aparține lui K, T nu ar fi marginea superioară a mulțimii

$$\{\tau \mid \varphi(t) \in K \text{ pentru } t_0 \le t \le \tau\}.$$

Să arătăm acum că $\varphi_2(T) \in \Gamma$. Luînd un șir de puncte $\theta_i \to T$, cu $\varphi_2(\theta_i) \in K$, din continuitatea lui φ_2 rezultă că $\varphi_2(T)$ este limita șirului de puncte din K, $\varphi_2(\theta_i)$, deci (K fiind compactă) $\varphi_2(T) \in K$. Pe de altă parte, în orice interval de forma $[T, T + \delta)$ există un punct t pentru care $\varphi_2(t) \notin K$ (în caz contrar, pentru orice t dintr-o vecinătate a lui T, punctul $\varphi_2(t) \in K$ și T nu ar fi margine

superioară). Rezultă că orice vecinătate a punctului $\varphi_2(T)$ conține și puncte din complementarea lui K (φ_2 este continuă!), deci $\varphi_2(T) \in \Gamma$, frontiera lui K.

Cazul $t < t_0$ se face similar.

OBSERVAȚIE. Printr-un raționament perfect analog se demonstrează teorema de prelungire a soluțiilor în cazul sistemelor diferențiale neautonome $\dot{x} = v(x, t)$, pentru care în teorema de existență și unicitate nu se cere ca $v(x, t)$ să nu se anuleze. În particular, rezultă că în teorema 4.1 se poate ridica ipoteza restrictivă $v(x) \neq 0$, $(\forall)\, x \in U$.

4.2. Punerea problemei stabilității

Am văzut că soluția problemei Cauchy pentru un sistem diferențial de forma $\dot{x} = v(t, x)$ depinde continuu de condițiile inițiale, cînd t variază într-un interval compact. Este important să studiem dependența soluției de datele inițiale și cînd t variază pe un interval $[t_0, +\infty)$. Vom presupune că sînt îndeplinite condițiile teoremei fundamentale de existență și unicitate a soluției problemei Cauchy pentru $t \in [t_0, +\infty)$ și pentru $x \in U$, fiind un deschis în $\mathbb{R}^n$.

Deci pentru orice $a \in U$ există și este unică o soluție $x = \varphi(t)$, $\varphi : [t_0, \infty) \to U$ astfel încît $\varphi(t_0) = a$. Datorăm lui H. Poincaré (1854–1912) și A. M. Liapunov (1857–1918) definiția noțiunii de soluție stabilă a unui sistem diferențial. Ei au observat că în determinarea stărilor "succesive" ale unor sisteme dinamice (pentru care se cunoaște legea dinamică de evoluție), regimul de lucru urmează o soluție fixată, sistemul stabilizându-se după ce condițiile inițiale își pierd influența. De exemplu, un pendul are două poziții stabile – repaosul și soluția periodică, orice altă evoluție tinzînd către una din ele. O soluție $x = \varphi(t)$, $\varphi : [t_0, \infty) \to U$ se zice **stabilă spre + ∞** în sens Poincaré-Liapunov (sau echivalent $x_0 = \varphi(t_0)$ **este o poziție de echilibru**) dacă variind "suficient de puțin" data inițială x_0, soluția corespunzătoare se depărtează și ea "puțin".

Anume, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît de îndată ce $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ și $\|\tilde{x}_0 - x_0\| < \delta(\varepsilon)$, soluțiile $\tilde{\varphi}(t)$ și $\varphi(t)$ care la momentul t_0 iar respectiv valorile $\tilde{x}_0$ și x_0 satisfac inegalitatea $|\tilde{\varphi}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ pentru orice $t \in [t_0, +\infty)$. Așadar, variind cu cel mult δ data inițială x_0, soluția

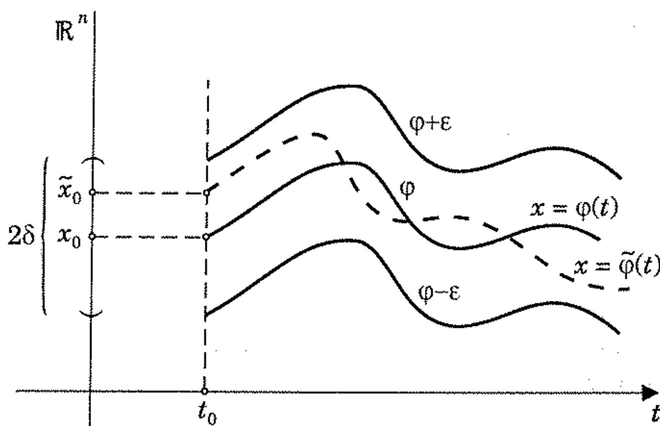


Figura V.15

corespunzătoare are graficul situat în "tubul" delimitat de $\varphi + \varepsilon$ şi $\varphi - \varepsilon$ (figura V.15).

Cazul stabilităţii spre $-\infty$ se studiază similar (sau se face schimbarea de variabilă independentă $t = -\tau$). Remarcăm de asemenea că printr-o translaţie convenabilă putem presupune că sistemul $\dot{x} = v(t, x)$ are soluţia banală şi că avem de studiat stabilitatea acesteia (într-adevăr, dacă studiem stabilitatea soluţiei $x = \varphi(t)$ a sistemului $\dot{x} = v(t, x)$, făcînd schimbarea $x = y + \varphi(t)$, rezultă $\dot{y} + \dot{\varphi}(t) = v(t, y + \varphi(t))$ şi punînd

$$v_1(t, y) = v(t, y + \varphi(t)) - v(t, \varphi(t)),$$

se obţine sistemul $\dot{y} = v_1(t, y)$ şi avem $v_1(t, 0) = 0$, iar soluţiei $x = \varphi(t)$ îi corespunde soluţia $y = 0$).

Vom studia în paragraful următor problema stabilităţii soluţiilor banale ($x \equiv 0$) ale unor sisteme autonome $\dot{x} = v(x)$, presupunînd $v(0) = 0$. Aceasta nu micşorează generalitatea.

Exemple. 1) Fie ecuaţia diferenţială $\dot{x} = 2x$ şi $t_0 = 0$; soluţia cu $x(0) = x_0$ este $x(t) = x_0 e^{2t}$. Arătăm că soluţia banală $x(t) \equiv 0$ nu este stabilă. În caz, contrar, să luăm $\varepsilon = 1$; atunci ar exista $\delta > 0$ astfel încît luînd $\tilde{x}_0 = \frac{\delta}{2}$ (deci $|0 - \tilde{x}_0| < \delta$), să avem $|0 - \tilde{x}_0 e^{2t}| < \delta$ pentru orice $t \geq 0$. Ar rezulta $e^{2t} < 2$ pentru orice $t \geq 0$, ceea ce este absurd.

2) Cu raţionamentul anterior, se arată că pentru ecuaţia $\dot{x} = kx$ (k constant) soluţia banală este instabilă pentru $k > 0$. Arătăm că pentru $k < 0$ soluţia banală este stabilă. Într-adevăr, pentru orice $\varepsilon > 0$ să luăm $\delta = \varepsilon$.

Atunci dacă $|x_0 - 0| < \delta$, rezultă $|x_0 e^{kt} - 0| = |x_0| e^{kt} < \delta \cdot e^{kt} = \varepsilon \cdot e^{kt} \leq \varepsilon$ (avem $0 < e^{kt} \leq 1$ pentru $k < 0$ şi pentru orice $t \geq 0$).

4.3. Stabilitatea poziţiilor de echilibru ale sistemelor autonome (invariante în timp)

Considerăm sistemul diferenţial autonom

$$(1) \qquad \dot{x} = v(x),\ x \in U \subset \mathbb{R}^n,$$

unde v este un cîmp de vectori de clasă C^r ($r \geq 3$) în domeniul U. Presupunem că sistemul (1) are o singură poziţie de echilibru x_0 în U ($v(x_0) = 0$, $x_0 \in U$) şi să alegem coordonatele x_i astfel încît $x_0 = 0$ (efectuăm o translaţie). Atunci soluţia cu condiţia iniţială $\varphi(t_0) = 0$ este $\varphi(t) = 0$, $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$. Putem presupune că şi $t_0 = 0 \in \mathbb{R}$.

Definiţia 4.2. Poziţia de echilibru $x = 0$ a sistemului diferenţial autonom (1) se numeşte **stabilă (în sens Poincaré–Liapunov)** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ (care depinde numai de ε) astfel încît, pentru orice $x_0 \in U$ pentru care $\|x_0\| < \delta$, soluţia φ a sistemului (1) cu condiţia iniţială $\varphi(0) = x_0$ se prelungeşte pe întreaga semiaxă $t > 0$ şi satisface inegalitatea $\|\varphi(t)\| < \varepsilon$ pentru orice $t > 0$ (figura V.16).

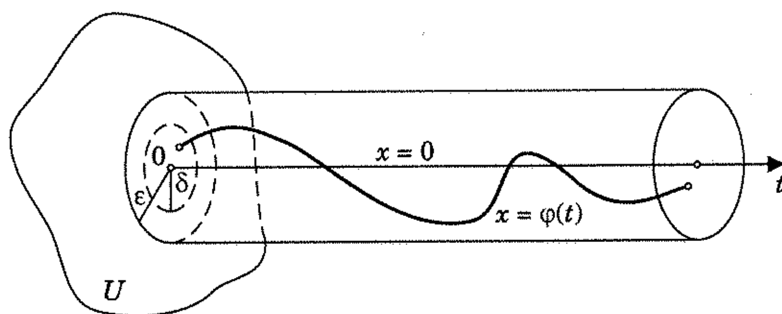


Figura V.16.

DEFINIȚIA 4.3. Poziția de echilibru $x = 0$ a sistemului (1) se numește **asimptotic stabilă** dacă ea este stabilă și în plus, pentru soluția $\varphi(t)$ din definiția 4.2 avem

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = 0.$$

Să considerăm mai întîi cazul particular al **sistemelor liniare omogene**

$$(2) \qquad \dot{x} = Ax, A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n,$$

și să presupunem că A este un izomorfism. Atunci $x = 0$ este singurul punct singular al cîmpului $v(x) = Ax$, deci $x = 0$ este singura poziție de echilibru a sistemului (2).

TEOREMA 4.2. (Poincaré–Liapunov). Dacă toate valorile proprii ale operatorului liniar $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ au partea reală negativă, atunci poziția de echilibru $x = 0$ a sistemului diferențial liniar omogen (2) este stabilă asimptotic. Dacă există $\lambda \in \sigma(A)$ cu $\operatorname{Re}\lambda > 0$, atunci $x = 0$ este instabilă.

DEMONSTRAȚIE. Conform teoremei 2.13 soluția sistemului (2) care verifică condiția inițială $\varphi(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, este

$$(3) \qquad \varphi(t) = e^{tA} \cdot x_0, \ t \in \mathbb{R}.$$

Din teorema 2.9 rezultă că orice element al matricei e^{tA} are forma $Q(t)e^{\lambda_j t}$, unde $\lambda_j \in \sigma(A)$ și $Q(t)$ este un polinom. Prin ipoteză, $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ pentru orice $\lambda_j \in \sigma(A)$, deci există $\alpha > 0$ astfel încît $\operatorname{Re}\lambda_j < -\alpha$, $(\forall)\ \lambda_j \in \sigma(A)$. Atunci avem

$$\lim_{t \to +\infty} \left| \frac{Q(t)e^{\lambda_j t}}{e^{-\alpha t}} \right| = \lim_{t \to +\infty} |Q(t)| e^{(\operatorname{Re}\lambda_j + \alpha)t} = 0,$$

deci funcția $Q(t)e^{(\lambda_j+\alpha)t}$ este mărginită pentru $t \geq 0$, adică

$$(4) \qquad |Q(t)e^{\lambda_j t}| \leq M_1 e^{-\alpha t}, \ (\forall)\ t \geq 0.$$

Din relația (4) rezultă că există $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ astfel încît

$$\left\| e^{tA} \right\| \leq M e^{-\alpha t}, \ (\forall)\ t \geq 0.$$

Atunci, din relația (3) rezultă

$$\|\varphi(t)\| \leq \left\| e^{tA} \right\| \cdot \|x_0\| \leq M \cdot \|x_0\| e^{-\alpha t}, \ (\forall)\ t \geq 0.$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$ luăm $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ și pentru $\|x_0\| < \delta$ obținem $\|\varphi(t)\| < \varepsilon$, $(\forall)\ t \geq 0$, adică $x = 0$ este stabilă. În plus, avem

$$\lim_{t \to +\infty} \|\varphi(t)\| = 0,$$

deci $x = 0$ este asimptotic stabilă.

Dacă $\lambda \in \sigma(A)$ și $\operatorname{Re} \lambda > 0$, atunci alegem o soluție $\tilde{x} = \tilde{x}_0 e^{\lambda t}$; soluția $x = 0$ este instabilă, căci pentru $\varepsilon = 1$, oricare ar fi δ, din faptul că $\|\tilde{x}_0\| < \delta$ nu poate rezulta $|\tilde{x}(t)| < 1$ pentru orice $t \geq 0$.

OBSERVAȚIE. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice cu spectrul $\sigma(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$. Notăm

$$\gamma = \max_{1 \leq i \leq p}(\operatorname{Re}\lambda_i).$$

Conform teoremei 4.2 rezultă că dacă $\gamma < 0$, atunci soluția $x = 0$ a sistemului $\dot{x} = Ax$ este asimptotic stabilă; orice altă soluție are aceeași proprietate (căci dacă x_p este o soluție, atunci $\dot{x}_p = Ax_p$ și punînd $x = x_p + y$, rezultă $\dot{y} = Ay$ iar soluția $x = x_p$ corespunde cu $y = 0$); dacă $\gamma > 0$, atunci soluția $x = 0$ este instabilă și se poate arăta că dacă $\gamma = 0$ și valorile proprii cu partea reală nulă sînt simple, atunci soluția banală este stabilă (dar nu asimptotic stabilă); dacă $\gamma = 0$ și valorile proprii cu partea reală nulă nu sînt toate simple, atunci soluția $x = 0$ este instabilă.

EXEMPLE. 1) Fie sistemul $\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1$. El scrie echivalent $\dot{x} = Ax$, unde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; valorile proprii ale lui A sînt $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ deci $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$, $\operatorname{Re} \lambda_2 < 0$ și soluția $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ rezultă asimptotic stabilă.

2) Considerăm ecuația pendulului $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ ($\omega > 0$ constant). Sistemul diferențial asociat este $\dot{x} = Ax$ unde $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ și $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$; valorile sînt $\pm i\omega$ și fiind simple, soluția $y \equiv 0$ rezultă stabilă, dar nu asimptotic stabilă.

Pentru **sistemul neliniar** (1) vom reduce problema stabilității poziției de echilibru $x = 0$ la cazul **liniar** (prin procedeul liniarizării), dar avem nevoie mai întîi de unele rezultate preliminare. Pentru început prezentăm două rezultate de algebră.

LEMA 4.3. Fie $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un operator liniar și $\varepsilon > 0$. Atunci în $\mathbb{C}^n$ există o bază astfel încît matricea lui A în această bază să fie superior triunghiulară și toate elementele de deasupra diagonalei să fie, în modul, mai mici ca ε (o astfel de bază se numește bază "ε – aproape proprie").

DEMONSTRAȚIE. Din teorema I.3.11, rezultă că există o bază $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ în $\mathbb{C}^n$ astfel încît matricea lui A în această bază să fie superior triunghiulară (desigur pe diagonală apar valorile proprii ale lui A). Atunci

$$A(w_k) = a_{1k}w_1 + a_{2k}w_2 + \ldots + a_{k-1k}w_{k-1} + \lambda_k w_k, \tag{5}$$

$k = 1, 2, ..., n$, unde $(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ este matricea lui A în această bază. Luăm vectorii $w'_k = \frac{1}{N^k} w_k$, $k = 1, 2, ..., n$ $(N \in \mathbb{N}, N \geq 2)$, care formează o nouă bază $\{w'_1, w'_2, ..., w'_n\}$. Din relația (5) obținem

$$A(w'_k) = \frac{1}{N^k} A(w_k) = \frac{a_{1k}}{N^{k-1}} \cdot \frac{w_1}{N} + \frac{a_{2k}}{N^{k-2}} \cdot \frac{w_2}{N^2} + \ldots + \frac{a_{k-1k}}{N} \cdot \frac{w_{k-1}}{N^{k-1}} + \lambda_k \frac{w_k}{N^k},$$

adică

$$(6) \qquad A(w'_k) = \frac{a_{1k}}{N^{n-1}} w'_1 + \frac{a_{2k}}{N^{n-2}} w'_2 + \ldots + \frac{a_{k-1k}}{N} w'_{k-1} + \lambda_k w'_k,$$

deci, dacă $(a'_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ este matricea lui A în noua bază, avem $a'_{lk} = \frac{a_{lk}}{N^{k-l}}$ pentru $l < k$ (termenii de deasupra diagonalei). Desigur $a'_{lk} = a_{lk} = 0$ pentru $l > k$. Pentru N suficient de mare avem $|a'_{lk}| < \varepsilon$, pentru orice $l < k$, l, $k = 1, 2, ..., n$.

Să considerăm mulțimea tuturor formelor pătratice în $\mathbb{R}^m$. Identificînd o formă pătratică cu matricea sa simetrică în baza canonică din $\mathbb{R}^m$ și pe aceasta cu un punct din $\mathbb{R}^{\frac{m(m+1)}{2}}$, obținem un izomorfism de spații vectoriale între mulțimea formelor pătratice în $\mathbb{R}^m$ și $\mathbb{R}^{\frac{m(m+1)}{2}}$. Are loc următorul rezultat:

LEMA 4.4. Mulțimea formelor pătratice pozitiv definite în $\mathbb{R}^m$ este deschisă în $\mathbb{R}^{\frac{m(m+1)}{2}}$.

DEMONSTRAȚIE. Trebuie să demonstrăm că, dacă forma pătratică $a = \sum_{k,l=1}^{m} a_{kl} x_k x_l$ este pozitiv definită, atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încît orice formă pătratică $a + b$ cu proprietatea $|b_{kl}| < \varepsilon$ (pentru orice k, l, $1 \leq k, l \leq m$) este pozitiv definită.

Pentru orice $x \in \mathbb{R}^m$, $x \neq 0$, notăm $x' = \frac{x}{\|x\|}$, deci $x'_k = \frac{x_k}{\|x\|}$, $k = 1, 2, ..., n$.

Atunci avem

$$(7) \qquad a(x) = \sum_{k,l=1}^{m} a_{kl} x_k x_l = \left(\sum_{k,l=1}^{m} a_{kl} x'_k x'_l \right) \|x\|^2 = a(x') \cdot \|x\|^2,$$

deci forma pătratică a este pozitiv definită dacă și numai dacă ea este pozitiv definită în punctele sferei unitate S din $\mathbb{R}^m$ $(\|x'\| = 1)$. Sfera S este compactă și forma pătratică a este continuă, deci este atins minimul ei. Deoarece a este pozitiv definită rezultă că există $\alpha > 0$ astfel încît pentru orice punct de pe sfera S să avem

$$(8) \qquad a(x) \geq \alpha > 0.$$

Dacă $|b_{kl}| < \varepsilon$, atunci pe sfera S, avem

$$|b(x)| \leq \sum_{k,l=1}^{m} |b_{kl}| < m^2 \cdot \varepsilon, \ (\forall) x \in S.$$

Alegînd $\varepsilon < \frac{\alpha}{m^2}$, rezultă că, pentru orice $x \in S$ avem

$$(a+b)(x) = a(x) + b(x) \geq \alpha - m^2 \cdot \varepsilon > 0,$$

deci forma pătratică $a + b$ este pozitiv definită.

Observaţie. Din relaţia (8) şi din relaţia $a(x) \leq \beta$, $(\forall)\, x \in S$ (care se obţine luînd maximul lui a pe S), rezultă folosind (7) că orice formă pătratică pozitiv definită satisface relaţiile

$$(9) \qquad \alpha\|x\|^2 \leq a(x) \leq \beta\|x\|^2,\ 0 < \alpha < \beta,\ (\forall)\, x \in \mathbb{R}^m.$$

Trecem acum la construcţia unei forme pătratice speciale, aşa-numita **funcţie A. M. Liapunov,** 1857–1918.

Teorema 4.5 (Liapunov). Fie $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operator liniar pentru care toate valorile proprii au părţile reale pozitive. Atunci există o formă pătratică pozitiv definită, notată r^2, pe $\mathbb{R}^n$ astfel încît derivata ei în direcţia cîmpului de vectori Ax este pozitivă:

$$(10) \qquad L_{Ax}r^2 > 0 \textbf{ pentru } (\forall)\, x \neq 0.$$

Demonstraţie. Deoarece valorile proprii ale lui A pot să nu aparţină lui $\mathbb{R}$, este mai comod să demonstrăm afirmaţia în cazul complex: să presupunem că toate valorile proprii ale operatorului liniar $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ au părţile reale pozitive. Atunci vom arăta că există o formă pătratică pozitiv definită (hermitică) $r^2 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ a cărei derivată în direcţia cîmpului de vectori Az este o formă pătratică pozitiv definită: $L_{Az}r^2 > 0$ pentru orice $z \neq 0$ (aici vom identifica $\mathbb{C}^n$ cu $\mathbb{R}^{2n}$ şi cîmpul de vectori Az cu cîmpul real de vectori din $\mathbb{R}^{2n}$, iar derivata se ia după acest cîmp).

În particular, dacă operatorul A este real, iar $z \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, obţinem teorema în cazul real.

Alegem ca în lema 4.3 o bază $\mathscr{B}$ ε – aproape proprie pentru operatorul A cu $\varepsilon > 0$, oarecare. Vom lua drept funcţie Liapunov r^2 suma pătratelor modulelor coordonatelor în această bază $\mathscr{B}$, adică

$$r^2 = (z, \bar{z}) = \sum_{k=1}^{n} z_k \bar{z}_k.$$

Evident r^2 este o formă pătratică pozitiv definită pe $\mathbb{C}^n$.

Utilizînd formula de derivare (2) din paragraful 3.1 rezultă că derivata $L_{Az}r^2$ este o formă pătratică

$$L_{Az}r^2 = L_{Az}(z, \bar{z}) = (Az, \bar{z}) + (z, \overline{Az}) = 2\,\mathrm{Re}(Az, \bar{z}).$$

Într-adevăr, dacă $(a_{kl}) \in M_n(\mathbb{C})$ este matricea lui A în baza $\mathscr{B}$, putem scrie:

$$(11) \qquad L_{Az}r^2 = 2\,\mathrm{Re}(Az, \bar{z}) = 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{k,\,l=1}^{n} a_{kl} z_k \bar{z}_l\right),$$

şi obţinem o formă pătratică reală în x_k, y_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, unde $z_k = x_k + iy_k$.

În formula (11) să punem în evidenţă elementele diagonale şi pe cele situate deasupra diagonalei: $L_{Az}r^2 = a + b$, unde $a = 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n} a_{kk} z_k \bar{z}_k$ şi

$b = 2\operatorname{Re}\sum_{k<l} a_{kl} z_k \bar{z}_l$. Dar $a_{kk} = \lambda_k$, $k = 1, 2, ..., n$, unde λ_k sînt valorile proprii ale operatorului A. Atunci rezultă că

$$a = \sum_{k=1}^{n} 2\operatorname{Re}\lambda_k (x_k^2 + y_k^2),$$

deci este o formă pătratică pozitiv definită în variabilele x_k, y_k.

Alegînd acum $\varepsilon > 0$ ca în lema 4.4, deoarece $|a_{kl}| < \varepsilon$ pentru $k < l$ (conform lemei 4.3), rezultă din lema 4.4 că forma pătratică $a + b = L_{Az} r^2$ este pozitiv definită. Teorema este demonstrată.

Ne reîntoarcem acum la cazul sistemului neliniar (1). Fie $v^1, v^2, ..., v^n : U \to \mathbb{R}$ componentele cîmpului vectorial v, care sînt funcții de clasă C^r ($r \geq 3$) pe domeniul U. Utilizînd formula Taylor pentru fiecare funcție v^i, $i = 1, ..., n$, putem scrie $v^i(x) = v_1^i(x) + v_2^i(x)$, $x \in U$, unde

$$v_1^i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad a_{ij} = \left.\frac{\partial v^i}{\partial x_j}\right|_{x=0}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Rezultă că dacă notăm cu A matricea $(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, cîmpul v se scrie sub forma

$$v(x) = v_1(x) + v_2(x), x \in U,$$

unde $v_1(x) = Ax$ și $v_2(x) = 0(\|x\|^2)$ (din formula Taylor).

Sistemul diferențial liniar $\dot{x} = Ax$ se numește **sistemul liniarizat** al sistemului (1) sau prima aproximație a sistemului (1).

Putem acum să enunțăm criteriul de stabilitate pentru sisteme neliniare.

TEOREMA 4.6 (Liapunov). În ipotezele și notațiile anterioare, să presupunem că toate valorile proprii ale operatorului liniar A sînt situate în semiplanul stîng ($\operatorname{Re}\lambda_k < 0$, $k = 1, 2, ..., n$). **Atunci poziția de echilibru $x = 0$ a sistemului neliniar** (1) **este asimptotic stabilă.**

DEMONSTRAȚIE. Din teorema anterioară (4.5) rezultă că există o funcție Liapunov, adică o formă pătratică pozitiv definită r^2, a cărei derivată în direcția cîmpului de vectori $-v_1(x) = (-A)x$ este pozitiv definită ($-A$ are valorile proprii $-\lambda_k$, $k = 1, 2, ..., n$ și $\operatorname{Re}(-\lambda_k) > 0$).

Folosind formula de derivare (2) din paragraful 3.1 și observația ce urmează lemei, 4.4 rezultă că $L_{v_1} r^2 \leq -2\gamma r^2$, unde γ este o constantă pozitivă.

Vom arăta că într-o vecinătate suficient de mică a punctului $x = 0$, derivata funcției Liapunov în direcția cîmpului neliniar v satisface inegalitatea

$$(12) \qquad L_v r^2 \leq -\gamma r^2.$$

Avem $L_v r^2 = L_{v_1} r^2 + L_{v_2} r^2$. Să arătăm că pentru valori mici ale lui r, al doilea termen este mult mai mic decît primul:

$$(13) \qquad L_{v_2} r^2 = 0(r^3).$$

Pentru orice cîmp u și orice funcție f avem

$$L_u f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i,$$

(formula (2) paragraful 3.1) În cazul de față $u = v_2$, $f = r^2$, $u_i = 0(r^2)$ și $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0(r)$ (din calculul derivatelor), deci rezultă (13).

Prin urmare, există $C > 0$, $\sigma_1 > 0$ astfel încît pentru orice x cu $\|x\| < \sigma_1$ avem

$$|L_{v_2} r^2| \le C\,|r^2(x)|^{3/2}.$$

Pentru $|x|$ suficient de mic avem $C\,|r^2(x)|^{3/2} < \gamma r^2$ deci într-o vecinătate a punctului $x = 0$ obținem $L_v r^2 \le -2\gamma r^2 + \gamma r^2 = -\gamma r^2$.

Să considerăm un număr $\sigma > 0$ astfel încît pentru $\|x\| < \sigma$ să fie satisfăcută inegalitatea (12). Să considerăm în spațiul fazelor extins compactul

$$K = \{(x, t) \mid r^2(x) \le \sigma^2, |t| \le T\};\ \text{figura V.17}$$

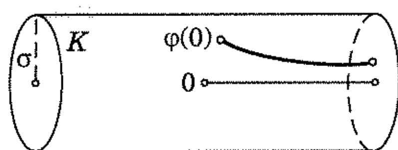


Figura V.17.

Fie φ o soluție cu condiția inițială $\varphi(0) \ne 0$, care satisface $r^2(\varphi(0)) < \sigma^2$.

Conform teoremei de prelungire 4.1, φ se poate prelungi în viitor pînă la frontiera cilindrului compact K.

Atîta timp cît punctul $(t, \varphi(t))$ este în $\mathring{K}$ avem $L_v r^2(\varphi(t)) \le -\gamma r^2(\varphi(t))$.

Conform cu formula (5) din paragraful 3.1 rezultă:

$$\frac{\mathrm{d}(r^2(\varphi(t))}{\mathrm{d}t} = L_v(r^2(\varphi(t)) \le -\gamma r^2(\varphi(t)) < 0$$

($r^2(\varphi(t)) \ne 0$, din teorema de unicitate a soluțiilor, căci altfel ar rezulta $\varphi(t) \equiv 0$). Atunci funcția $r^2(\varphi(t))$ este strict descrescătoare și cum $r^2(\varphi(0)) < \sigma^2$, rezultă că $r^2(\varphi(t)) < r^2(\varphi(0)) < \sigma^2$, deci soluția nu poate ajunge la suprafața laterală a cilindrului $\mathring{K}$ (unde $r^2 = \sigma^2$). În concluzie soluția se prelungește pînă la capacul $t = T$. Deoarece T a fost ales arbitrar (independent de σ) soluția se prelungește în viitor nemărginit și $r^2(\varphi(t)) < \sigma^2$, $(\forall)\ t \ge 0$.

Definim funcția ρ prin relația $\rho(t) = \ln r^2(\varphi(t))$, $t \ge 0$.

Deoarece $r^2(\varphi(t)) \ne 0$ (vezi argumentul mai sus) rezultă că funcția ρ este definită și diferențiabilă. Din calculul anterior avem

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{r^2(\varphi(t))}\frac{\mathrm{d}(r^2(\varphi(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{L_v r^2}{r^2} \le -\gamma,$$

deci $\rho(t) \le \rho(0) - \gamma t$, și $r^2(\varphi(t)) \le r^2(\varphi(0))e^{-\gamma t} \to 0$, cînd $t \to +\infty$. Rezultă că $r^2(\varphi(t))$ scade monoton și tinde la 0 cînd $t \to +\infty$, deci $x = 0$ este poziție de echilibru asimptotic stabilă pentru sistemul neliniar (1).

EXEMPLU. Fie sistemul

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_2 = 2\sin x_1 - 3x_2 + x_2^4. \end{cases}$$

Pentru a studia stabilitatea soluției banale, considerăm sistemul liniar asociat, adică $\dot{x}_1 = -x_1 - x_2$, $\dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2$ deci $\dot{x} = Ax$, unde $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$;

valorile proprii fiind $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$, teorema 4.6 arată că poziția de echilibru $x_1 = 0, x_2 = 0$ este asimptotic stabilă.

OBSERVAȚIE. Avînd în vedere ipoteza asupra operatorului liniar A din teoremele de stabilitate 4.2 și 4.6, se pune problema în ce condiții toate rădăcinile unui polinom (aici polinomul caracteristic) se află în semiplanul stîng $\operatorname{Re}\lambda < 0$. În acest caz polinomul se numește **stabil.** Dăm fără demonstrație următorul criteriul al lui A. Hurwitz (1859–1919): "Fie polinomul

$$P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n \in \mathbb{R}[X]$$

și îi asociem tabloul

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & \cdots \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & a_{2n-6} & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

($a_k = 0$ pentru $k < 0$ sau $k > n$).

O condiție necesară și suficientă pentru ca toate rădăcinile polinomului să se afle în semiplanul stîng $\operatorname{Re}\lambda < 0$ (polinomul să fie stabil) este ca șirul de determinanți

$$h_1 = |a_1|,\ h_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ h_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, h_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdots & a_n \end{vmatrix} = h_{n-1} \cdot a_n$$

format din tabloul precedent, să fie pozitivi".

Astfel, polinomul $X + a$ este stabil $\leftrightarrow a > 0$; $X^2 + aX + b$ este stabil $\leftrightarrow a > 0$, $b > 0$; $X^3 + aX^2 + bX + c$ este stabil $\leftrightarrow a > 0, b > 0, c > 0$ și $ab > c$.

§ 5. Ecuații integrale

Ecuațiile integrale sînt ecuații în care funcția necunoscută apare sub semnul integrală. Unele din aceste ecuații pot fi reduse la ecuații diferențiale, dar aceasta nu se recomandă deoarece în aplicarea metodelor numerice integralele se dovedesc mai stabile la propagarea erorilor decît derivatele. În capitolele 8, 9 vom studia și alte clase de ecuații integrale (inversarea transformării Fourier, ecuații de convoluție etc.).

În fundamentarea teoriei ecuațiilor integrale merite deosebite revin lui V. Voltera (1860–1940), E. I. Fredholm (1866–1927), D. Hilbert (1862–1943). Trebui menționat că prima monografie din lume consacrată ecuațiilor integrale a aparținut lui Traian Lalescu (1882–1929).

5.1. Ecuații integrale Volterra

Fie $I=[a, b]\subset \mathbb{R}$ și $D=I\times I\subset \mathbb{R}^2$ (figura V.18). Fie date funcțiile continue $f: I\to \mathbb{R}$ și $K: D\to \mathbb{R}$; funcția K se va numi în cele ce urmează **nucleu.**

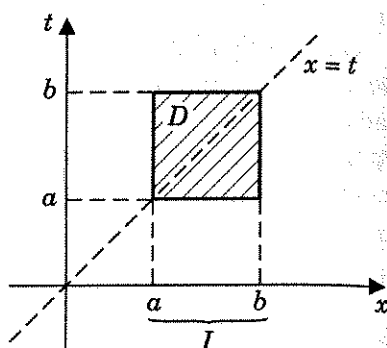


Figura V.18.

DEFINIȚIA 5.1. (a). O egalitate de forma

$$(1)\qquad \varphi(x)=\lambda\int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt+f(t),\ x\in I,$$

se numește **ecuație integrală Volterra de tip II neomogenă** cu parametrul λ real și cu funcția necunoscută $\varphi: I\to \mathbb{R}$.

(b) Pentru $f\equiv 0$ se obține egalitatea

$$(1')\qquad \varphi(x)=\lambda\int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt;\ x\in I,\ \lambda\in \mathbb{R},$$

care se numește **ecuație integrală Volterra de tip II omogenă.**

(c) O egalitate de forma

$$(2)\qquad \int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt=f(x),\ x\in I,$$

se numește **ecuație integrală Volterra de tip I.**

OBSERVAȚIE. În anumite condiții, o ecuație Volterra I se poate transforma într-o ecuație Volterra II. De exemplu, dacă f este derivabilă pe I, K este diferențiabilă pe D și $K(x,x)\neq 0$, $(\forall)\,x\in I$, atunci ecuația (2) se transformă într-o ecuație de tipul (1). Într-adevăr, derivînd (2) obținem:

$$\int_a^x \frac{\partial K}{\partial x}(x,t)\varphi(t)\,dt+K(x,x)\varphi(x)=f'(x),$$

deci

$$\varphi(x)=\int_a^x \frac{-1}{K(x,x)}\frac{\partial K}{\partial x}(x,t)\varphi(t)\,dt+\frac{f'(x)}{K(x,x)},$$

adică o ecuație integrală Volterra de tip II neomogenă.

TEOREMA 5.1. În ipotezele de mai sus, pentru orice $\lambda\in \mathbb{R}$, ecuația integrală Volterra de tip II neomogenă are o unică soluție $\varphi: I\to \mathbb{R}$, continuă.

DEMONSTRAȚIE. Vom folosi metoda aproximațiilor succesive a lui Picard. Notăm cu

$$\mathscr{A}: C_I^0\to C_I^0$$

operatorul liniar $\psi\to \mathscr{A}\psi$, unde

$$(\mathscr{A}\psi)(x)=\int_a^x K(x,t)\psi(t)\,dt,\ (\forall)\,x\in I,$$

(evident $\mathscr{A}\psi$ este o funcție continuă). Definim șirul de funții $\{\psi_k\}_{k\geq 0}$, $\psi_k \in C_I^0$, astfel:

(3) $\psi_0 = f,\ \psi_k = \mathscr{A}\,\psi_{k-1},\ k \in \mathbb{N}^*.$

Construim acum șirul de funcții $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$, $\varphi_n \in C_I^0$:

(4) $$\varphi_n = \psi_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda^k \psi_k.$$

Notînd cu

$$A = \sup_{x\in I} |f(x)|,\ M = \sup_{(x,t)\in D} |K(x,t)|$$

obținem inegalitățile:

$$|\psi_0(x)| \leq A;\ |\psi_1(x)| \leq M \cdot |\psi_0(x)| \cdot \frac{(x-a)}{1!},$$

$$|\psi_2(x)| \leq M \int_a^x |\psi_1(t)|(t-a)\,\mathrm{d}t \leq AM^2 \frac{(x-a)^2}{2!}, \ldots,$$

deci

(5) $$|\psi_k(x)| \leq A \cdot M^k \cdot \frac{(x-a)^k}{k!},\ (\forall)\ x \in I,\ (\forall)\ k \in \mathbb{N}.$$

Pentru orice $\psi \in C_I^0$ notăm

$$\|\psi\| = \sup_{x\in I} |\psi(x)|,$$

și atunci, din inegalitățile (5), obținem:

(6) $$\|\psi_k\| \leq A \cdot M^k \cdot \frac{(b-a)^k}{k!},\ (\forall)\ k \in \mathbb{N}.$$

Pentru șirul de funcții $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ rezultă:

(7) $$\|\varphi_n\| \leq A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[|\lambda| M(b-a)\right]^k}{k!},\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}.$$

Cum seria numerică $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[|\lambda| M(b-a)\right]^k}{k!}$ este convergentă pentru $(\forall)\ \lambda \in \mathbb{R}$ (are suma $e^{|\lambda| M(b-a)}$), din criteriul Weierstrass rezultă că seria (4) este absolut și uniform convergentă pe I către o funcție $\varphi \in C_I^0$.

Să arătăm că φ este soluția ecuației Volterra (1). Calculăm:

$$\lambda \int_a^x K(x,t)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t + f(x) = \lambda \mathscr{A}\left(\psi_0 + \sum_{k=1}^{n} \lambda^k \psi_k\right)(x) + \psi_0(x) =$$

$$= \psi_0(x) + \lambda\psi_1(x) + \sum_{k=1}^{n} \lambda^{k+1} \psi_{k+1}(x) = \varphi_{n+1}(x),\ (\forall)\ x \in I.$$

Convergența șirului $\varphi_n \to \varphi$ fiind uniformă pe I, putem comuta integrala cu limita (seria poate fi integrată termen cu termen!) și obținem

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t + f(x),\ (\forall)\ x \in I,\ (\forall)\ \lambda \in \mathbb{R},$$

adică φ este soluție a ecuației (1).

Să demonstrăm acum unicitatea soluției. Fie $\varphi, \psi \in C_I^0$ două soluții ale ecuației (1). Atunci funcția $\theta = \varphi - \psi \in C_I^0$ satisface ecuația (1′)

$$\theta(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\theta(t)\,dt,\ x \in I, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Deci unicitatea soluției ecuației neomogene (1) revine la a arăta că ecuația omogenă (1′) are numai soluția nulă. Fie $m = \sup_{x \in I} |\theta(x)|$. Obținem inegalitatea

$$|\theta(x)| \le |\lambda| \cdot m \cdot M(x-a)$$

şi majorăm din nou în ecuația (1′):

$$|\theta(x)| \le |\lambda|^2 m \cdot M^2 \int_a^x (t-a)\,dt \le m \cdot |\lambda|^2 M^2 \frac{(x-a)^2}{2!}.$$

Continuînd procedeul obținem prin inducție majorarea

$$|\theta(x)| \le m \cdot |\lambda|^n \cdot M^n \frac{(x-a)^n}{n!} \le \frac{\left[|\lambda| M(b-a)\right]^n}{n!},\ (\forall)\, x \in I,\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}.$$

Deoarece $\lim_{n \to \infty} \frac{\left[|\lambda| M(b-a)\right]^n}{n!} = 0$, rezultă $\theta(x) = 0$, $(\forall)\, x \in I$, adică $\theta \equiv 0$ şi $\varphi \equiv \psi$.

OBSERVAȚIE. Demonstrația teoremei 5.1 este constructivă aşa cum se va vedea şi din următorul

EXEMPLU. Fie ecuația integrală Volterra de tip II neomogenă

$$\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt + 1,\ x \in I = [0, b]\ (b > 0).$$

Avem $K(x, t) = 1$, $f(x) = 1$, $\lambda = 1$. Construim aproximațiile

$$\varphi_0(x) = \psi_0(x) = 1;$$

$$\varphi_1(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x) = 1 + \int_0^x dt = 1 + x;$$

$$\varphi_2(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x) + \psi_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2};$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}; \ldots.$$

Presupunem că $\psi_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ şi atunci $\psi_{n+1}(x) = \int_0^x \psi_n(t)\,dt = \int_0^x \frac{t^n}{n!}\,dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$,

deci obținem $\varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$, $(\forall)\, x \in [0, b]$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$.

Atunci soluția ecuației integrale este $\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = e^x$, $(\forall)\, x \in [0, b]$.

OBSERVAȚIE. Există o strînsă legătură între ecuația integrală Volterra de tip II şi ecuațiile diferențiale liniare cu coeficienți variabili. Mai precis, arătăm că o problemă Cauchy pentru o ecuație diferențială liniară conduce la o ecuație Volterra de tip II (în general neomogenă). Această transformare este

utilă deoarece în general ecuațiile integrale sînt mai bine adaptate la aplicarea metodelor numerice.

Fie

(8) $$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x),\ x \in I \subset \mathbb{R},\ (I = [a, b])$$

o ecuație diferențială liniară de ordinul n cu coeficienți variabili, $a_i : I \to \mathbb{R}$, funcții continue. Presupunem că $f : I \to \mathbb{R}$ este funcție continuă şi fie

$$y(a) = \alpha_0,\ y'(a) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1},\ \alpha_i \in \mathbb{R},$$

o problemă Cauchy. Notăm $y^{(n)}(x) = \varphi(x)$ şi obținem

$$y^{(n-1)}(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt + \alpha_{n-1},$$

$$y^{(n-2)}(x) = \int_a^x\int_a^x \varphi(t)\,dt + \alpha_{n-1}(x-a) + \alpha_{n-2} = \int_a^x \frac{(x-t)}{1!}\varphi(t)\,dt + \alpha_{n-1}\frac{x-a}{1!} + \alpha_{n-2},$$

. . . .

$$y(x) = \underbrace{\int_a^x \ldots \int_a^x}_{n \text{ ori}} \varphi(t) + \alpha_{n-1}\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \alpha_{n-2}\frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + \alpha_1\frac{(x-a)}{1!} + \alpha_0 =$$

$$= \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(t)\,dt + \alpha_{n-1}\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \alpha_{n-2}\frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + \alpha_1\frac{(x-a)}{1!} + \alpha_0.$$

Înlocuind în ecuația diferențială (8) obținem ecuația integrală pentru funcția necunoscută $\varphi(x) = y^{(n)}(x)$ $(x \in I)$:

(9) $$\varphi(x) = \int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt + F(x),\ x \in I,$$

unde

$$K(x,t) = -\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{(x-t)^{i-1}}{(i-1)!} \text{ şi}$$

$$F(x) = f(x) - a_1(x)\alpha_{n-1} - a_2(x)\left[\alpha_{n-1}\frac{(x-a)}{1!} + \alpha_{n-2}\right] - \ldots -$$

$$- \ldots - a_n(x)\left[\alpha_{n-1}\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \alpha_0\right]$$

Ecuația (9) este o ecuație integrală Volterra de tip II neomogenă.

Evident, teorema 5.1 dă o nouă demonstrație teoremei de existență şi unicitate pentru problema Cauchy la ecuații diferențiale liniare de ordinul n.

EXEMPLU. Fie ecuația $y'' + a(x)y' + b(x)y = F(x)$, $x \in [0, b]$ cu condițiile $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$. Notăm $y'' = \varphi$ deci $y'(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt + y_1$ şi $y(x) = \int_0^x y'(s)\,ds + y_1x + y_0$, adică $y(x) = \int_0^x\left(\int_0^s \varphi(t)\,dt\right)ds + y_1x + y_0$; intervertind ordinea de integrare, rezultă $y(x) = \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt + y_1x + y_0$. Înlocuind în ecuația diferențială, rezultă

$$\varphi(x)+a(x)\left(\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t+y_1\right)+b(x)\left(\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t+y_1x+y_0\right)=F(x)$$

sau echivalent

$$\varphi(x)+\int_0^x \underbrace{[a(x)+b(x)(x-t)]}_{-K(x,t)}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\underbrace{F(x)-a(x)y_1-b(x)(y_1x+y_0)}_{f(x)}$$

obținîndu-se o ecuație Volterra de tip II.

De exemplu, pentru $a(x)\equiv 0$ și $b(x)\equiv x$, $y_0=0$, $y_1=1$, se obține

$$\varphi(x)+\int_0^x x(x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t=F(x)-x^2.$$

5.2. Ecuații integrale Fredholm

Fie $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$ și $D=I\times I\subset\mathbb{R}^2$. Fie date funcțiile continue $f:I\to\mathbb{R}$ și $K:D\to\mathbb{R}$ (funcția K se numește **nucleu**).

DEFINIȚIA 5.2. (a) O egalitate de forma

$$(10)\qquad \varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t+f(x);\ x\in I,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

se numește **ecuație integrală Fredholm de tip II neomogenă.**

(b) Pentru $f\equiv 0$ se obține egalitatea

$$(10')\qquad \varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t;\ x\in I,\ \lambda\in\mathbb{R},$$

care se numește **ecuație integrală Fredholm de tip II omogenă.**

(c) O egalitate de forma

$$(11)\qquad \int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t=f(x),\ x\in I$$

se numește **ecuație integrală Fredholm de tip I.**

(d) Fie $K_1:D\to\mathbb{R}$, $K_1(x,t)=K(t,x)$, $(\forall)\,(x,t)\in D$. Ecuația

$$(12)\qquad \psi(x)=\lambda\int_a^b K_1(x,t)\psi(t)\,\mathrm{d}t+g(x);\ x\in I,\ \lambda\in\mathbb{R},$$

se numește **ecuație neomogenă conjugată** a ecuației (10) (nucleul K_1 se numește nucleul conjugat). Dacă $g\equiv 0$, atunci ecuația (12) devine **ecuație omogenă conjugată.**

TEOREMA 5.2. În ipotezele de mai sus, fie $M=\sup\limits_{(x,t)\in D}|K(x,t)|$. Dacă $|\lambda|M(b-a)<1$, atunci ecuația integrală Fredholm de tip II neomogenă are o unică soluție $\varphi:I\to\mathbb{R}$, continuă.

DEMONSTRAȚIE. Vom folosi lema contracției. Pe spațiul metric complet C_I^0 (cu distanța $\mathrm{d}(g,h)=\sup\limits_{x\in I}|g(x)-h(x)|$, $(\forall)g,h\in C_I^0$) definim aplicația

$$\mathscr{F}:C_I^0\to C_I^0,\quad \psi\to\mathscr{F}\psi,$$

unde

$$(\mathscr{F}\psi)(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)\psi(t)\,\mathrm{d}t + f(x),\ (\forall)\,x \in I.$$

(evident $\mathscr{F}\psi$ este o funcție continuă). Să arătăm că $\mathscr{F}$ este o contracție. Pentru orice $g, h \in C_I^0$ avem:

$$(\mathscr{F}g - \mathscr{F}h)(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)(g(t) - h(t))\,\mathrm{d}t,$$

deci

$$|(\mathscr{F}g)(x) - (\mathscr{F}h)(x)| \le |\lambda| M\int_a^b |g(t) - h(t)|\,\mathrm{d}t \le |\lambda| M(b-a)d(g,h),$$

de unde rezultă

$$d(\mathscr{F}g, \mathscr{F}h) \le |\lambda|\ M(b-a)\cdot d(g,h),$$

adică $\mathscr{F}$ este o contracție, deoarece prin ipoteză avem $0 \le |\lambda|\ M(b-a) < 1$.

Din lema contracției rezultă că există o unică funcție $\varphi \in C_I^0$ astfel încît, $\mathscr{F}\varphi = \varphi$, adică

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t + f(x),$$

deci $\varphi \in C_I^0$ este soluție a ecuației integrale (10). Observînd că, reciproc, o soluție $\varphi \in C_I^0$ verifică egalitatea $\mathscr{F}\varphi = \varphi$, unicitatea soluției rezultă din unicitatea punctului fix al contracției $\mathscr{F}$.

Vom studia acum un caz particular important de ecuații Fredholm.

DEFINIȚIA 5.3. Nucleul $K : D \to \mathbb{R}$ se numește **degenerat** dacă

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x)\cdot b_k(t),$$

cu $a_k, b_k : I \to \mathbb{R}$ funcții continue, $k = 1, 2, ..., m$ și sistemul de funcții $\{a_k\}_{1\le k\le m}$ este liniar independent peste $\mathbb{R}$.

TEOREMA 5.3. Rezolvarea unei ecuații integrale Fredholm de tip II cu nucleu degenerat se reduce la rezolvarea unui sistem algebric liniar.

DEMONSTRAȚIE. Să presupunem că $\varphi \in C_I^0$ este o soluție a ecuației integrale (10) și că nucleul K are forma din definiția 5.3. Atunci avem, pentru orice $x \in I$:

$$(18)\qquad \varphi(x) = \lambda\int_a^b \sum_{k=1}^{m} a_k(x)b_k(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t + f(x) = f(x) + \lambda\sum_{k=1}^{m} C_k a_k(x)$$

unde

$$(19)\qquad C_k = \int_a^b b_k(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}.$$

Înlocuind din nou funcția φ, dată acum de formula (18), în ecuația integrală (10) obținem:

$$f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{m}C_k a_k(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\sum_{k=1}^{m}a_k(x)b_k(t)\left(f(t)+\lambda\sum_{i=1}^{m}C_i a_i(t)\right)\mathrm{d}t,$$

sau

$$\sum_{k=1}^{m}\left[C_k-\int_a^b b_k(t)f(t)\,\mathrm{d}t-\lambda\sum_{i=1}^{m}C_i\left(\int_a^b b_k(t)a_i(t)\,\mathrm{d}t\right)\right]a_k(x)=0.$$

Notînd

$$(20)\quad B_k=\int_a^b b_k(t)f(t)\,\mathrm{d}t,\ \ A_{ki}=\int_a^b b_k(t)a_i(t)\,\mathrm{d}t\in\mathbb{R}$$

(constante calculabile) și ținînd seamă de faptul că $\{a_k\}_{1\le k\le m}$ este un sistem liniar independent de funcții, obținem pentru necunoscutele C_k, $k = 1, 2, ..., m$ un sistem algebric liniar:

$$(21)\quad C_k-\lambda\sum_{i=1}^{n}A_{ki}C_i=B_k,\ k=1,2,...,m.$$

Notînd cu $A=(A_{ki})_{1\le k,\,i\le m}\in M_m(\mathbb{R})$, $B=(B_k)_{1\le k\le m}\in M_{m,1}(\mathbb{R})$ și $C=(C_k)_{1\le k\le m}\in M_{m,\,1}(\mathbb{R})$ sistemul (21) se scrie sub formă matriceală

$$(22)\quad (I_m-\lambda A)\cdot C=B.$$

Reciproc, dacă există constantele c_k, $k = 1, 2, ..., m$, soluții ale sistemului (21) - (22), funcția φ dată de formula (18) este soluție a ecuației integrale (10), după cum rezultă din raționamentul anterior.

Exemplu. Ne propunem să rezolvăm ecuația Fredholm de tip II:

$\varphi(x)-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}(x+t\sin x)\varphi(t)\,\mathrm{d}t=x$. Ecuația se scrie

$$\varphi(x)=x+\lambda x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,\mathrm{d}t+\lambda\sin x\int_{-\pi}^{\pi}t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

deci

$$\varphi(x)=x+C_1\lambda x+C_2\lambda\sin x.$$

Înlocuim acum φ în expresiile lui $C_1=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ și $C_2=\int_{-\pi}^{\pi}t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$; rezultă $C_1=\int_{-\pi}^{\pi}(t+C_1\cdot\lambda t+C_2\cdot\lambda\sin t)\,\mathrm{d}t$ și $C_2=\int_{-\pi}^{\pi}t(t+C_1\cdot\lambda t+C_2\cdot\lambda\sin t)\,\mathrm{d}t$ și se obține $C_1=0,\ C_2=\dfrac{2\pi^3}{3(1-2\pi\lambda)}$ (cu condiția $\lambda\neq\dfrac{1}{2\pi}$); în final, $\varphi(x)=x+\dfrac{2\pi^3\lambda\sin x}{3(1-2\pi\lambda)}$.

Vom enunța acum fără demonstrație teoremele lui Fredholm în cazul nucleului degenerat, [A12, I; A14].

Teorema 5.5 (Fredholm). Fie $K:D\to\mathbb{R}$ un nucleu degenerat. Atunci avem:

(I) **Sau ecuația** (10) (Fredholm II neomogenă) **are soluție unică pentru orice termen liber $f\in C_I^0$, sau ecuația** (10′) (Fredholm omogenă) **are și soluții nenule** ((I) se numește **alternativa Fredholm**).

(II) În primul caz ecuaţia integrală conjugată (12) are soluţie unică. În al doilea caz ecuaţia integrală conjugată omogenă (12′) are acelaşi număr (finit) de soluţii liniar independente ca şi ecuaţia (10′).

(III) Condiţia necesară şi suficientă ca ecuaţia (10) să aibă soluţii este ca

$$\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = 0,$$

pentru (∀) soluţie ψ a ecuaţiei conjugate omogene (12′).

§ 6. Metode numerice

În acest paragraf vom prezenta cîteva metode aproximative pentru rezolvarea unor ecuaţii sau sisteme diferenţiale ordinare (probleme Cauchy, probleme bilocale etc.), care pot fi traduse în programe de calcul automat.

6.1. Rezolvarea aproximativă a problemei Cauchy

a) Metoda aproximaţiilor succesive

Să considerăm un sistem diferenţial de forma

$$(1)\ \dot{x} = v(t, x),$$

cu condiţia iniţială

$$(2)\ x(t_0) = x_0,$$

presupunînd că sînt îndeplinite condiţiile teoremei de existenţă şi unicitate a problemei Cauchy respective. Rezolvarea aproximativă a problemei (1) + (2) revine la a construi o funcţie $y(t)$ pe un interval $[t_0, T]$ care să fie "suficient de apropiată" de soluţia exactă $x(t)$ în sensul că

$$(3)\ |x(t) - y(t)| < \varepsilon,\ (\forall)\ t \in [t_0, T]$$

(unde $\varepsilon > 0$ este un prag de precizie prescris). Similar pentru un interval $[T, t_0]$.

Metoda aproximaţiilor succesive constă în determinarea funcţiilor $y_0, y_1, y_2, \ldots$ definite prin $y_0(t) = x_0$,

$$y_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau, y_0(\tau))\,d\tau,\ \ y_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau, y_1(\tau))\,d\tau \text{ etc., pentru}$$

$t \in [t_0, T]$, luînd $y(t) \simeq y_p(t)$ cu $p \geq 1$ convenabil.

EXEMPLU. Fie ecuaţia $\dot{x} = x^2 + 2t$ cu condiţia $x(0) = -5$ şi $t \in [0, 2]$. Avem

$$y_0(t) = -5,\ y_1(t) = -5 + \int_0^t (y_0^2 + 2\tau)\,d\tau = -5 + 25t + t^2,$$

$$y_2(t) = -5 + \int_0^t (y_1(\tau)^2 + 2\tau)\,d\tau = \frac{t^5}{5} + \frac{25}{2}t^4 + \frac{1855}{6}t^3 - 124t^2 + 25t - 5 \text{ şi}$$

putem considera $x(t) \simeq y_2(t)$.

În practică valorile soluției $y(t)$ trebuie să poată fi calculate printr-un număr finit de operații aritmetice sau logice. În acest sens, se consideră suficientă cunoaşterea funcției $y(t)$ în punctele unei diviziuni $t_0 < t_1 < ... < t_N = T$ a intervalului $[t_0, T]$. Adeseori diviziunea se ia echidistantă, adică $t_k = t_0 + k\tau$ unde $\tau = \frac{T - t_0}{N}$ şi $k = 0, 1, ..., N$. După interpolare (polinomială sau prin funcții-spline), se poate admite că este verificată condiția (3). Se cunosc deci funcția v, punctul $x_0 \in \mathbb{R}^n$ şi valorile t_k, $0 \le k \le n$. Dacă $\tilde{y}(t)$ este o aproximare a soluției problemei (1) + (2), atunci o aproximare "mai bună" este $\tilde{\tilde{y}}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau, \tilde{y}(\tau))\,d\tau$. În general, pentru orice funcție continuă h avem $\int_{t_0}^{t_k} h(\tau)\,d\tau \simeq \sum_{j=0}^{k-1} h(t_j)(t_{j+1} - t_j)$ şi folosind acest fapt, rezultă

$$\tilde{\tilde{y}}(t_k) = x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} v(t_j, \tilde{y}(t_j))(t_{j+1} - t_j) \text{ pentru } 0 \le k \le N.$$

Aplicînd succesiv această procedură, începînd cu $\tilde{y}(t) = x_0$, se obțin valorile, în punctele de diviziune, ale unor soluții aproximative succesive.

b) Metoda Euler (a liniilor poligonale)

Considerăm o diviziune echidistantă a intervalului $[t_0, T]$ pe care determinăm soluția problemei (1) + (2). Numărul N al punctelor de diviziune este ales în funcție de precizia urmărită; fie $\tau = \frac{T - t_0}{N}$ pasul diviziunii.

Ecuației (1) i se asociază în fiecare punct t_k egalitatea $\dot{x}(t_k) = v(t_k, x_k)$ unde $x_k = x(t_k)$. Folosind aproximarea $\dot{x}(t_k) \simeq \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau}$, problemei (1) + (2) i se poate asocia următoarea schemă algoritmică, datorată în esență Euler:

$$(4) \qquad x_{k+1} = x_k + \tau \cdot v(t_k, x_k),\ 0 \le k \le N - 1 \text{ cu } x_0 \text{ dat.}$$

Ideea metodei constă deci în a aproxima unghiul α făcut cu Ot de tangenta la curba $x = x(t)$ în fiecare punct $M_k(t_k, x_k)$ cu unghiul β făcut de coarda M_kM_{k+1} cu axa Ot deci $\dot{x}(t_k) = \operatorname{tg}\alpha \simeq \operatorname{tg}\beta = \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau}$ (figura V.19).

Atunci curba integrală este aproximată cu linia poligonală $M_0M_1... M_kM_{k+1}... M_n$ (ceea ce justifică denumirea de metodă a liniilor poligonale).

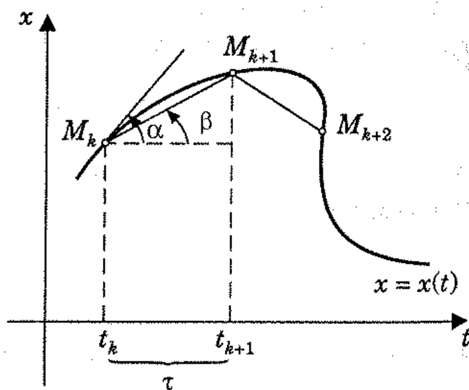


Figura V.19.

EXEMPLU. Fie sistemul

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y^2 + t \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}, \ t \in [0, 2], \text{ cu condiția inițială } x(0) = y(0) = 7.$$

Fie $N = 10$ deci $\tau = \frac{1}{5}$ şi $t_k = 0 + \frac{k}{5}$, $0 \le k \le 10$. Notăm $v = (v_1, v_2)$ unde $v_1(x, y, t) = x + y^2 + t$, $v_2(x, y, t) = 2xy$. Schema algoritmică (4) este

$$X_{k+1} = X_k + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} x_k + y_k^2 + 2 + \frac{k}{5} \\ 2x_k y_k \end{pmatrix}, \ k \ge 0, \ X_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Se determină succesiv $X_1, X_2, ..., X_{10}$ şi cu aceasta valorile funcţiilor necunoscute $x(t), y(t)$ în punctele diviziunii considerate. De exemplu

$$X_1 = X_0 + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} x_0 + y_0^2 + 2 \\ 2x_0 y_0 \end{pmatrix} \text{ deci } x_1 \simeq x(t_1) = \frac{93}{5}, \ y_1 \simeq y(t_1) = \frac{133}{5} \text{ etc.}$$

c) Metoda predictor-corector

Această metodă recomandă ca problemei (1) + (2) să i se asocieze următoarea schemă algoritmică

$$(5) \qquad z_{k+1} = x_k + \tau \cdot v(t_k, x_k)$$

$$(6) \qquad x_{k+1} = x_k + \frac{\tau}{2}\left[v(t_k, x_k) + v(t_{k+1}, z_{k+1})\right],$$

pentru $k = 0, 1, ..., N - 1$ şi x_0 dat (se subînţelege că s-a considerat o diviziune echidistantă de pas τ ca mai înainte). Făcînd $k = 0$ se calculează z_1 conform (5); apoi făcînd $k = 0$ în (6) se calculează x_1. Apoi se face $k = 1$ în (5) şi se află z_2 şi din (6) se calculează x_2 etc. Calculul lui z_{k+1} după formula (5) se mai numeşte "predicţia" lui x_{k+1} iar calculul lui x_{k+1} cu (6) se numeşte "corecţia" lui x_{k+1}.

d) Metoda Runge-Kutta

Prezentăm metoda fără a intra în detalii de demonstraţie. Schema algoritmică propusă pentru rezolvarea problemei (1) + (2) este următoarea:

$$(7) \qquad x_{k+1} = x_k + \frac{1}{6}\left[\varphi_1(\tau) + 4\varphi_2(\tau) + \varphi_3(\tau)\right], \ 0 \le k \le N - 1 \ (x_0 \text{ dat}),$$

unde

$$(8) \qquad \varphi_1(\tau) = \tau v(t_k, x_k), \ \varphi_2 = \tau v(t_k + \frac{\tau}{2}, x_k + \frac{1}{2}\varphi_1(\tau)),$$

$$\varphi_3(\tau) = \tau v(t_k + \tau, x_k - \varphi_1(\tau) + 2\varphi_2(\tau)).$$

Mai întîi se face $k = 0$ în formulele (8) calculîndu-se $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ corespunzători şi apoi pentru $k = 0$ în (7) se obţine x_1. Apoi se înlocuieşte $k = 1$ în (8) calculîndu-se noile valori pentru $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ şi pentru $k = 1$ în (7) se obţine x_2 etc.

EXEMPLU. Considerăm ecuaţia diferenţială $x' = -x$ cu condiţia iniţială $x(0) = 1$. Soluţia exactă este evident $x(t) = e^{-t}$. Indicăm valorile obţinute prin

aplicarea metodei Runge-Kutta în punctele de diviziune $t_k = \frac{k}{10}$, $0 \le k \le 10$ ale intervalului [0, 1], cu pasul $\tau = \frac{1}{10}$. Prezentăm rezultatele într-un tablou:

t_k	x_k	e^{-t_k} (soluția exactă)
0	1	1
0,1	0,904833	0,904837
0,2	0,818723	0,818731
0,3	0,740808	0,740818
0,4	0,670308	0,670320
0,5	0,606517	0,606531
0,6	0,548797	0,548812
0,7	0,496569	0,496585
0,8	0,449313	0,449329
0,9	0,406553	0,406569
1	0,367863	0,367879

Observații. Se poate arăta că metoda Euler este o schemă avînd ordinul I de precizie (în sensul că soluția aproximativă $y(t)$ și soluția exactă $x(t)$ satisfac $\lim\limits_{\tau \to 0} \frac{\|x - y\|}{\tau} = 0$, unde $\|x - y\| = \sup\limits_{t \in [t_0, T]} |x(t) - y(t)|$. Schema predictor-corector are ordinul II de precizie, în sensul că $\lim\limits_{\tau \to 0} \frac{\|x - y\|}{\tau^2} = 0$, iar metoda Runge-Kutta are ordinul IV de precizie. Există și alte metode numerice pentru rezolvarea ecuațiilor și sistemelor diferențiale (de ordinul I). Ecuațiile diferențiale de ordin superior se reduc așa cum se știe la sisteme de ordinul I.

6.2. Metoda dezvoltării în serie

Să considerăm o ecuație diferențială de ordinul II

$$(9) \qquad \ddot{x}(t) + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0$$

unde funcțiile, a, b sînt presupuse dezvoltabile în serie de puteri în fiecare punct al unui interval deschis I.

Fixăm un punct $t_0 \in I$ și căutăm soluții ale ecuației (9) dezvoltabile în serie de puteri în jurul lui t_0, de forma

$$(10) \qquad x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^n = c_0 + c_1(t - t_0) + c_2(t - t_0)^2 + \ldots.$$

Înlocuind în (9) se va obține în final o relație de forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n (t - t_0)^n = 0$, de unde rezultă $d_n = 0$ pentru orice $n \ge 0$. Va rezulta un sistem liniar (infinit) de ecuații în $c_0, c_1, c_2, \ldots$. Punînd două condiții suplimentare (de exemplu $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = x_1$) se determină coeficienții dezvoltării (10) și cu aceasta se

obține soluția (10). În practică se calculează primii cîțiva coeficienți c_n care pot fi suficienți (în ipoteza că seria (10) este convergentă mai rapid).

EXEMPLE. 1) Fie ecuația $x'' - tx' + 2x = 0$. Căutăm soluții de forma

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^2 + \ldots + c_n t^n + \ldots,$$

dezvoltabile în serie în jurul punctului $t = 0$. Atunci

$$x'(t) = c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \ldots + (n+1)c_{n+1}t^n + \ldots,$$
$$x''(t) = 2c_2 + 6c_3 t + \ldots + (n+2)(n+1)c_{n+2}t^n + \ldots$$

şi înlocuind în ecuația dată,rezultă

$$2c_2 + 6c_3 t + 12c_4 t^2 + \ldots + n(n-1)c_n t^{n-2} + n(n+1)c_{n+1}t^{n-1} +$$
$$+ (n+2)(n+1)c_{n+2}t^n + \ \ldots - t[c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \ldots + nc_n t^{n-1} +$$
$$+ (n+1)c_{n+1}t^n + \ldots] + 2[c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_n t^n + \ldots] = 0.$$

Ordonînd după puterile lui t, rezultă sistemul

$$2c_2 + 2c_0 = 0,$$
$$6c_3 + c_1 = 0,$$
$$12c_4 = 0,$$
$$20c_5 - c_3 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - (n-2)c_n = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

de unde $c_{n+2} = \dfrac{(n-2)}{(n+2)(n+1)}c_n$, $n \geq 2$. Coeficienții c_0, c_1 nu pot fi determinați şi îi considerăm ca parametri; rezultă $c_2 = -c_0$, $c_3 = -\dfrac{1}{6}c_1$, $c_4 = 0$,

$$c_5 = \frac{1}{20}c_3 = -\frac{1}{120}c_1,\ c_6 = \frac{2}{30}c_4 = 0,\ \ c_7 = \frac{3}{42}c_5 = -\frac{1}{1680}c_1,\ c_8 = \frac{4}{56}c_6 = 0$$

etc. În final,

$$x(t) = c_0(1 - t^2) + c_1\left(t - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{120}t^5 - \frac{1}{1680}t^7 - \ldots\right).$$

Se observă că funcțiile $x_1(t) = 1 - t^2$ şi $x_2(t) = t - \dfrac{1}{6}t^3 - \dfrac{1}{120}t^5 - \ldots$ sînt soluții ale ecuației date şi $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ este soluția generală (pe $\mathbb{R}$).

2) Ne propunem să arătăm că dacă $n \geq 1$ este întreg, atunci ecuațiaLegendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ are ca soluții un polinom de gradul n cu coeficienți reali. Căutăm soluții de forma $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ şi înlocuind în ecuația anterioară, rezultă după calcule imediate,

$$[2c_2 + (n^2 + n)c_0] + x[6c_3 + (n^2 + n - 2)c_1] + \ldots +$$
$$+ x^k[(k+2)(k+1)c_{k+2} + (n^2 + n - k^2 - k)c_k] + \ldots = 0.$$

Observînd că $n^2 + n - k^2 - k = (n-k)(n+k+1)$, obținem formula de recurență

$$c_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+1)}{(k+2)(k+1)}c_k.$$

Pentru $k = n$ rezultă $c_{n+2} = 0$ deci $0 = c_{n+4} = c_{n+6} = c_{n+8} = \dots$. Deci dacă n este impar, toți coeficienții c_k cu k impar, $k > n$ sînt nuli, iar dacă n este par, toți coeficienții c_k cu k par ($k > n$) sînt nuli. Aşadar, ecuația are totdeauna o soluție polinomială de grad n (alegînd pentru n impar toți coeficienții de rang par nuli şi invers).

Pentru $n = 0, 1, 2, 3, 4$ se obțin respectiv soluțiile polinomiale

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = 3x^2 - 1, P_3(x) = 5x^3 - 3x, P_4(x) = 35x^4 - 30x^2 + 3;$$

se obțin astfel primele polinoame Legendre, al căror studiu va fi făcut ulterior.

Metoda dezvoltării în serie va fi de asemenea aplicată la studiul funcțiilor Bessel.

6.3. Problema bilocală

Se pune uneori problema determinării soluției unui sistem diferențial de forma $\dot{x} = v(t, x)$; $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $t \in [a, b]$, în care soluția $x = x(t)$ nu este supusă la condiții de tip Cauchy, ci la anumite condiții în capetele a şi b ale intervalului de studiu (numite **condiții bilocale**). Ne restrîngem la a considera ecuația diferențială

$$(11) \quad \ddot{u} - p(t)u(t) = f(t), \ \ t \in [a, b],$$

cu condițiile $u(a) = \alpha$, $u(b) = \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi p, f funcții continue pe $[a, b]$ date).

Notînd $x_1 = u$, $x_2 = \dot{u}$ această ecuație este echivalentă cu sistemul

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \ \dot{x}_2 = px_1 + f(t).$$

Alegem o diviziune $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ echidistantă cu pasul $\tau = \dfrac{b-a}{N}$ (deci $t_k = a + k\tau$, $0 \leq k \leq N$). Deoarece $\ddot{u}(t_k) \simeq \dfrac{1}{\tau^2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1})$, $1 \leq k \leq N - 1$, notînd $p_k = p(t_k)$, $f_k = f(t_k)$, ecuației (12) i se asociază următoarea schemă algoritmică:

$$\frac{1}{\tau^2}(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) - p_k u_k = f_k,$$

de unde

$$u_{k-1} - (2 + \tau^2 p_k)u_k + u_{k+1} = \tau^2 f_k, \ 1 \leq k \leq N - 1,$$

care este un sistem liniar de $N - 1$ ecuații. Numărul de necunoscute este $N + 1$. Dar avem şi condițiile $u_0 = \alpha$, $u_N = \beta$ şi se obține în final un sistem liniar de $N + 1$ ecuații cu $N + 1$ necunoscute $u_0, u_1, \dots, u_N$. Se poate arăta că dacă $p(t) > 0$ pentru orice $t \in [a, b]$ şi dacă funcțiile p şi f sînt de clasă C^2, atunci sistemul admite soluție unică iar metoda este convergentă (pentru $\tau \to 0$).

EXEMPLU. Considerăm ecuația $\ddot{u} + u = -t$, $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ cu $u(0) = u\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Această problemă are soluția exactă $u(t)=\frac{\pi}{2}\sin t - t$. Dar aplicăm metoda numerică anterioară. Alegînd $N=2$ deci $\tau=\frac{\pi}{4}$ şi apoi $N=4$, $\tau=\frac{\pi}{8}$ se obțin sisteme formate dintr-o ecuație și respectiv trei ecuații. Soluțiile sînt indicate în tabelul din figura V.20.

t_k	u_k		$u(t_k)$ exact
	$N=2$	$N=4$	
$\frac{\pi}{8}$	—	0,2122	0,2084
$\frac{\pi}{4}$	0,3503	0,3311	0,3253
$\frac{3\pi}{8}$	—	0,2778	0,2731

Figura V.20.

Capitolul VI TEHNICI DE SPAȚII HILBERT

În acest capitol vom prezenta o serie de rezultate şi aplicații semnificative, care utilizează în mod esențial produsele scalare şi proprietățile funcționalelor liniare sau operatorilor liniari pe spații Hilbert.

§ 1. Serii Fourier generalizate şi polinoame ortogonale clasice

1.1. Cîteva rezultate asupra spațiilor Hilbert

Am definit în capitolul 2 noțiunea de produs scalar abstract pe un spațiu vectorial şi am dat cîteva proprietăți ale spațiilor prehilbertiene (spații vectoriale cu produs scalar); printre acestea, reamintim inegalitatea lui Schwartz, regula paralelogramului, procedeul Gram-Schmidt de ortogonalizare a unui şir liniar independent de vectori etc.

Exemplul tipic de spațiu Hilbert finit dimensional îl constituie $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$), cu produsul scalar euclidian $<x, y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, pentru orice $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$. Generalizarea directă, infinit dimensională, o constituie spațiul l_2 al şirurilor $x = (x_n)_{n \geq 0}$ de numere reale sau complexe astfel încît seria $\sum_{n \geq 0} |x_n|^2$ să fie convergentă. De exemplu, şirul $\left\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ aparține lui l_2 dar şirul $\left\{1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots\right\}$ nu aparține lui l_2. Două şiruri $x = (x_n)_{n \geq 0}$, $y = (y_n)_{n \geq 0}$ se consideră **egale** dacă $x_n = y_n$ pentru orice $n \geq 0$. Se definesc **suma** $x + y = (x_n + y_n)_{n \geq 0}$ şi produsul $\lambda x = (\lambda x_n)_{n \geq 0}$ unde λ este un scalar. Din inegalitatea evidentă $|x_n y_n| \leq \frac{1}{2}\left(|x_n|^2 + |y_n|^2\right)$, rezultă că dacă $x, y \in l_2$, atunci seria $\sum_{n \geq 0} x_n \overline{y}_n$ este absolut convergentă (deci şi convergentă); în plus, rezultă că $x + y \in l_2$. Este evident că l_2 este un spațiu vectorial (peste $\mathbb{C}$) şi mai mult, definind $<x, y> = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y}_n$, se obține un produs scalar complex. Se arată că spațiul l_2 este chiar un spațiu Hilbert (adică este complet). Un alt exemplu

important de spațiu Hilbert îl constituie spațiul $L^2(G)$ al funcțiilor de pătrat absolut integrabil

$$L^2(G) = \left\{ f: G \to \mathbb{C} \mid \int_G |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}$$

pe o mulțime măsurabilă $G \subset \mathbb{R}^n$ (adeseori G este un interval pe dreapta reală).

Teoria generală a spațiilor Hilbert este una dintre cele mai importante achiziții științifice ale secolului nostru. Reamintim cîteva din rezultatele ei de bază (unele au fost deja demonstrate în capitolul 2 în cazul finit dimensional), care au o evidentă interpretare geometrică.

Fie H un spațiu Hilbert (complex) un produsul scalar $< , >$. Pentru orice $u \in H$, $\|u\| = \sqrt{<u, u>}$ este norma lui u și pentru orice $u, v \in H$, distanța între u, v este $d(u, v) = \|u - v\|$, numită și "abaterea medie pătratică" de la u la v.

1) Pentru orice subspațiu vectorial închis $H_1 \subset H$ și pentru orice $a \in H$, există și este unic un element $p \in H_1$ astfel încît $a - p \perp H_1$ și $(\forall)$ $x \in H_1$, $\|a - p\| \leq \|a - x\|$ (teorema de proiecție a lui F. Riesz).

Elementul p se numește **proiecția lui a pe H_1**. Dacă $a \in H_1$, atunci $p = a$.

2) Dacă $E \subset H$ este un subspațiu vectorial închis, atunci $H = E \oplus E^{\perp}$ (teorema de descompunere ortogonală).

3) Dacă $\Phi : H \to \mathbb{C}$ este o funcțională liniară și continuă pe H, atunci Φ este un produs scalar, în sensul că există și este unic un vector $v \in H$ astfel încît

$$(\forall)\ w \in H,\ \Phi(w) = <v, w>$$

(**teorema lui F. Riesz de reprezentare** a funcționalelor pe spații Hilbert).

4) Pentru orice operator liniar și continuu $f : H \to H$ al lui H există și este unic adjunctul lui f, adică un operator liniar și continuu $f^* : H \to H$ astfel încît

$$(\forall)\ x, y \in H,\ <f(x), y> = <x, f^*(y)>.$$

Demonstrațiile acestor rezultate pot fi găsite în [A7, A10].

1.2. Serii Fourier generalizate

Dacă $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este baza canonică a spațiului $\mathbb{R}^n$, înzestrat cu produsul scalar euclidian, atunci $<e_i, e_j> = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$. Așadar, $e_i \perp e_j$ pentru $i \neq j$ și pentru orice vector $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, avem $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ și $x_k = <x, e_k>$, $1 \leq k \leq n$.

Aceste rezultate pot fi generalizate la spații Hilbert.

Definiția 1.1. Fie H un spațiu Hilbert (complex) fixat. Se numește **bază ortonormală** în H (sau **sistem ortonormal total** sau **complet**) orice șir $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ de vectori din H astfel încît $<e_i, e_j> = \delta_{ij}$ pentru orice $i, j \geq 1$ și în plus, subspațiul lui Hilbert generat de $\mathscr{B}$ să fie dens în H.

EXEMPLE. 1) În $\mathbb{R}^n$ baza canonică este ortonormală.

2) În l_2 elementele $e_1 = \{1, 0, 0, 0, ...\}$, $e_2 = \{0, 1, 0, 0, ...\}$, $e_3 = \{0, 0, 1, 0, ...\}$, etc. formează o bază ortonormală. Nu orice spațiu Hilbert admite bază ortonormală.

DEFINIȚIA 1.2. Fie H un spațiu Hilbert (complex) avînd o bază ortonormală $\mathscr{B} = \{e_n\}_{n \geq 1}$ și $u \in H$ un element oarecare. Se numesc **coeficienții Fourier generalizați ai lui u relativ la $\mathscr{B}$**, numerele (complexe)

$$c_n = \langle u, e_n \rangle, \; n \geq 1.$$

Seria $\sum\limits_{n \geq 1} c_n e_n$ se numește **seria Fourier generalizată** a lui u relativ la $\mathscr{B}$.

TEOREMA 1.1 Fie H un spațiu Hilbert avînd o bază ortonormală $\mathscr{B} = \{e_n\}_{n \geq 1}$. Pentru orice $u \in H$, seria sa Fourier generalizată relativ la $\mathscr{B}$ este convergentă în H, cu suma egală cu u. În plus seria numerică $\sum\limits_{n \geq 1} |c_n|^2$ este convergentă, cu suma egală cu $\|u\|^2$.

[Așadar, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e_n = u$ și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|u\|^2$, în sensul că

$$\lim_{n \to \infty} \left\| u - \sum_{p=1}^{n} c_p e_p \right\| = 0 \text{ și } \lim_{n \to \infty} \left(\|u\|^2 - \sum_{p=1}^{n} |c_p|^2 \right) = 0 \text{].}$$

DEMONSTRAȚIE. Fie $u_n = \sum\limits_{p=1}^{n} c_p e_p$, $n \geq 1$ unde $c_k = \langle u, e_k \rangle$ sînt coeficienții Fourier ai lui u relativ la $\mathscr{B}$. Pentru orice k, $1 \leq k \leq n$ avem

$$\langle u_n, e_k \rangle = \sum_{p=1}^{n} c_p \langle e_p, e_k \rangle = \sum_{p=1}^{n} c_p \delta_{pk} = c_k = \langle u, e_k \rangle, \text{ adică } \langle u_n - u, e_k \rangle = 0.$$

Pentru orice $n \geq 1$ fixat, să notăm cu H_n subspațiul vectorial al lui H generat de $e_1, e_2, ..., e_n$. Rezultă $u_n - u \in H_n^{\perp}$, pentru orice $n \geq 1$. Fiind finit dimensional, subspațiul H_n este mulțime închisă în H și conform teoremei proiecției, rezultă că u_n este proeicția lui u pe H_n (Se arată ușor că $(\forall)\, v \in H_n$, $\|u - u_n\| \leq \|u - v\|$, deoarece $\|u - u_n\|^2 + \|u_n - v\|^2 = \|u - v\|^2$, conform teoremei lui Pitagora).

Fie acum $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Deoarece subspațiul lui H generat de $\mathscr{B}$ este dens, există un element $v \in H$, combinație liniară **finită** de elemente din $\mathscr{B}$, astfel încît $\|u - v\| < \varepsilon$. Așadar, există un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel încît $v \in H_n$ pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$ și conform teoremei proiecției, $\|u - u_n\| \leq \|u - v\|$ deci $\|u - u_n\| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq N(\varepsilon)$. Am demonstrat astfel că $u_n \xrightarrow{\text{în } H} u$ deci

$$\sum_{p=1}^{\infty} c_p e_p = u.$$

Pe de altă parte, avem

$$\|u_n\|^2 = \langle u_n, u_n \rangle = \left\langle \sum_{p=1}^{n} c_p e_p, \sum_{q=1}^{n} c_q e_q \right\rangle = \sum_{p,q} c_p \bar{c}_q \delta_{pq} = \sum_{p=1}^{n} |c_p|^2 \text{ pentru orice}$$

$n \geq 1$. Făcînd $n \to \infty$ şi ţinînd cont că $\|u_n\| \to \|u\|$, deoarece $u_n \xrightarrow{\text{în } H} u$, rezultă $\sum_{p=1}^{\infty} |c_p|^2 = \|u\|^2$.

OBSERVAŢIE. Dacă baza $\mathscr{B}$ este fixată şi $u \in H$, atunci dezvoltarea Fourier a lui u este unică; într-adevăr, dacă $u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ şi $u = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e_n$, atunci notînd $v_n = \sum_{p=1}^{n} d_p e_p$, rezultă $<v_n, e_p> = d_p$ pentru orice $p \leq n$. Făcînd $n \to \infty$, deoarece $v_n \to u$, rezultă $<u, e_p> = d_p$ deci $c_p = d_p$ pentru orice $p \geq 1$.

Relaţia $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|u\|^2$ se mai numeşte **egalitatea lui Parseval**; evident, pentru orice $n \geq 1$ avem $\sum_{p=1}^{n} |c_p|^2 \leq \|u\|^2$ (inegalitatea lui Bessel) şi $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$.

Am văzut că pentru orice $u \in H$ şi pentru orice $n \geq 1$, dintre toate combinaţiile liniare $\sum_{p=1}^{n} d_p e_p$, cea mai apropiată de u este cea pentru care $d_p = <u, e_p>$ deci d_p sînt atunci coeficienţii Fourier ai lui u relativ la $\mathscr{B}$.

Demonstrăm acum un rezultat care arată că spaţiul l_2 este prototipul spaţiilor Hilbert cu bază ortonormală.

TEOREMA 1.2. Fie H un spaţiu Hilbert (complex) avînd o bază ortonormală $\mathscr{B}$ şi aplicaţia

$$\Phi : H \to l_2, u \to \{c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$$

prin care oricărui element $u \in H$ i se asociază şirul coeficienţilor Fourier generalizaţi relativ la $\mathscr{B}$. Aplicaţia Φ este un izomorfism $\mathbb{C}$ – liniar care conservă produsele scalare.

DEMONSTRAŢIE. Şirul $(c_n)_{n \geq 1}$ aparţine lui l_2 deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$.

Injectivitatea lui Φ rezultă din unicitatea dezvoltării în serie Fourier generalizată. Demonstrăm că Φ este surjectivă: fie $\gamma = (c_n)_{n \geq 1} \in l_2$ şi $u_n = \sum_{p=1}^{n} c_p e_p$; deoarece rezultă că şirul $(u_n)_{n \geq 1}$ este Cauchy deci convergent, $u_n \xrightarrow{\text{în } H} u$. Deoarece $<u_n, e_p> = c_p$, rezultă pentru $n \to \infty$ că $<u, e_p> = c_p$, $p \geq 1$ adică $\Phi(u) = \gamma$. Faptul că Φ este $\mathbb{C}$ – liniară este evident. În fine, dacă $u, v \in H$, avem $<u, v> = <\Phi(u), \Phi(v)>$, aşa cum se verifică imediat.

APLICAŢII. 1) Cel mai important exemplu se obţine considerînd spaţiul Hilbert real $H = L^2_{[-\pi,\pi]}$, cu produsul scalar $<f, g> = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$. Şirul

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ e_4 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ \ldots$$

constituie o bază ortonormală (adică un **sistem ortonormal total**) în H; într-adevăr, $<e_i, e_j> = \delta_{ij}$, pentru orice $i, j \geq 1$, conform relațiilor clasice de ortogonalitate. Apoi faptul că subspațiul generat de $\{e_n\}_{n\geq 1}$ este dens în H este demonstrat în analiză, [A7].

Să fixăm o funcție $u : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ din $H = L^2_{[-\pi,\pi]}$. Coeficienții Fourier generalizați ai lui u relativ la baza ortonormală $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\geq 1}$ vor fi

$$c_1 = <u, e_1> = \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot a_0,$$

$$c_2 = <u, e_2> = \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x \, dx = a_1\sqrt{\pi},$$

$$c_3 = <u, e_3> = \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x \, dx = b_1\sqrt{\pi},$$

$$c_4 = a_2\sqrt{\pi}, \quad c_5 = b_2\sqrt{\pi} \text{ etc.}$$

unde $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\cos nx \, dx$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\sin nx \, dx$, $n \geq 0$ sînt coeficienții Fourier clasici ai lui u (dacă $u \in L^2_{[-\pi,\pi]}$ atunci $u(x)\cos nx$, $v(x)\sin nx$ aparțin lui $L^1_{[-\pi,\pi]}$, conform inegalității lui Schwartz).

Așadar, există o foarte strînsă legătură între coeficienții Fourier clasici și cei generalizați. Reamintim că teorema lui Dirichlet dă condiții de convergență punctuală a seriilor Fourier, în timp ce teorema 1.1 este o teoremă de convergență în sensul abaterii medii pătratice. Egalitatea lui Parseval

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|u\|^2 \text{ devine în acest caz:}$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)^2 \, dx.$$

Este interesant că aplicația $\Phi : L^2_{[-\pi,\pi]} \to l_2$ din teorema 1.2 stabilește o corespondență biunivocă între entități de natură continuală (cum sînt funcțiile din $L^2_{[-\pi,\pi]}$) și entități discrete (șirurile din l_2). Reamintim că dacă $u \in L^2_{[-\pi,\pi]}$ este un semnal, atunci șirul coeficienților Fourier, adică $\Phi(u)$ este numit spectrul **discret** al lui u. Teorema Dirichlet sau teorema 1.1 arată cum se recuperează semnalul din cunoașterea spectrului său discret.

2) Considerăm spațiul Hilbert complex H al funcțiilor $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ cu $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$, relativ la produsul scalar $<f, g> = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \overline{g(x)} \, dx$.

Sistemul de exponențiale $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ este ortonormal și total și coeficienții Fourier relativ la el ai unei funcții $f \in H$ sînt tocmai coeficienții Fourier clasici, sub forma complexă, anume $c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} \, dx$, $n \in \mathbb{Z}$.

Dacă în locul intervalului $[-\pi, \pi]$ se ia un interval $[-l, l]$, atunci se poate considera şirul ortonormal total de exponențiale $\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}} e^{i\frac{\pi}{l}nx}\right\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Teoremele 1.1 şi 1.2 se aplică direct, iar egalitatea lui Parseval devine în acest caz $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} |f(x)|^2 \, dx$, pentru orice $f \in H$.

1.3. Proprietăţi ale polinoamelor ortogonale

DEFINIȚIA 1.3. Fixăm un interval $I \subset \mathbb{R}$ şi o funcţie continuă $\rho : I \to \mathbb{R}$ astfel încît $\rho(x) > 0$ pentru orice $x \in I$ şi $\int_I |x|^n \rho(x) \, dx < \infty$ pentru orice întreg $n \geq 0$, numită **funcţie pondere.** Vom nota cu $L_2(\rho)$ mulţimea funcţiilor $f : I \to \mathbb{R}$ astfel încît $\int_I \rho(x) f(x)^2 dx < \infty$. Se obţine astfel un spaţiu Hilbert (real) relativ la produsul scalar $< f, g > = \int_I \rho(x) f(x) g(x) \, dx$ [această integrală există deoarece $|fg| \leq \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ deci $|\rho fg| \leq \frac{1}{2}(\rho f^2 + \rho g^2)$].

Funcţiile $f(x) = x^n$ aparţin lui $L_2(\rho)$ pentru orice întreg $n \geq 0$, iar şirul $\{1, x, x^2, ..., x^n, ...\}$ este liniar independent în $L_2(\rho)$. Acesta poate fi ortonormalizat prin procedeul Gram-Schmidt, obţinîndu-se astfel un şir ortonormal total de funcţii polinomiale $\{P_n^*(x)\}_{n \geq 0}$ numite **polinoame ortogonale relativ la ponderea** ρ. Aşadar,

$$< P_m^*, P_n^* > = \int_I \rho(x) P_m^*(x) P_n^*(x) \, dx = \delta_{mn} \quad \text{pentru orice } m, n \geq 0.$$

Dacă $I = [-1, 1]$ şi $\rho \equiv 1$, se obţin **polinoamele Legendre** (A. M. LEGENDRE, 1752–1833), notate $P_n(x)$. Pentru $I = (-1, 1)$ şi $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ se obţin **polinoamele Cebîşev** (P. L. CEBÎŞEV, 1821–1894), notate $T_n(x)$; pentru $I = (0, \infty)$ şi $\rho(x) = e^{-x}$, se obţin **polinoamele Laguerre** $L_n(x)$ (E. N. LAGUERRE, 1834–1886) şi pentru $I = (-\infty, \infty)$, $\rho(x) = e^{-x^2}$, se pun în evidenţă **polinoamele Hermite** $H_n(x)$ (CH. HERMITE, 1822–1901).

Aceste sînt numite uneori polinoame ortogonale **clasice.** Teoremele 1.1 şi 1.2 se pot aplica în fiecare din aceste cazuri. Astfel, pentru orice funcţie $u : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ cu $\int_{-1}^{1} u(x)^2 \, dx < \infty$ există o dezvoltare a lui u în serie de polinoame Legendre $u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n$, convergentă în $L_2(\rho)$, $\rho \equiv 1$, unde $c_n = < u, P_n > = \int_{-1}^{1} u(x) P_n(x) \, dx$, $n \geq 0$ reprezintă şirul coeficienţilor Fourier-Legendre ai lui u (sau în altă terminologie, **spectrul discret** Legendre al semnalului u). Deoarece polinoamele P_n sînt cunoscute, se pot folosi

aproximări de tipul $u \simeq \sum_{k=0}^{n} c_k P_k$ cu $n \geq 0$ ales convenabil. În mod similar se obțin dezvoltări în serii de polinoame Cebîșev, Laguerre, Hermite și spectre discrete corespunzătoare (folosite de exemplu în filtrarea semnalelor).

Dăm acum o listă de proprietăți generale ale polinoamelor ortogonale relativ la o funcție pondere $\rho : I \to \mathbb{R}$, notate $P_n(x)$, $n \geq 0$ obținute prin ortogonalizare (nu ortonormalizare!) Gram-Schimidt pornind de la șirul $1, x, x^2, \ldots$ și presupuse **monice** (deci avînd coeficientul termenului de grad superior egal cu 1). Vom nota $N_n = \|P_n\|^2 = \int_I \rho(x) P_n(x)^2 \, dx$. Se subînțelege că identificăm polinoamele cu funcțiile polinomiale asociate (și că P_n nu este aici polinomul Legendre în grad n).

1) **Fiecare polinom P_n este de grad n deci $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$.**

Într-adevăr, procedeul Gram-Schmidt dă $P_0 \equiv 1$; apoi $P_1 = X + \alpha$ și parametrul α se determină din condiția $P_1 \perp P_0$ adică $\int_I \rho(x)(x + \alpha) \, dx = 0$; $P_2 = x^2 + \beta x + \gamma$ unde coeficienții β și γ se determină din condițiile $P_2 \perp P_0$, $P_2 \perp P_1$ etc.

2) **Polinoamele $P_0, P_1, \ldots, P_n$ sînt liniar independente** (deci formează o bază pentru spațiul vectorial $\mathbb{R}_n[X]$).

Într-adevăr, fie $\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n = 0$ cu $\alpha_i \in \mathbb{R}$; deoarece $P_n = x^n + Q_{n-1}(x)$ cu Q_{n-1} polinom de grad $\leq n - 1$, rezultă că $\alpha_n = 0$; apoi din relația $\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_{n-1} P_{n-1} = 0$ rezultă $\alpha_{n-1} = 0$ etc.

3) **Pentru orice $n \geq 1$ polinomul P_n este ortogonal cu orice polinom $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.**

Conform proprietății 2 există constante reale $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ astfel încît

$$Q = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i P_i \text{ deci } < P_n, Q > = < P_n, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i P_i > = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i < P_n, P_i > = 0.$$

4) Să notăm $c_k = \int_I x^k \cdot \rho(x) \, dx$, $k \geq 0$. Atunci **pentru orice întreg $n \geq 0$ există o constantă reală A_n astfel încît**

$$(*) \ P_n(x) = A_n \cdot \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}$$

DEMONSTRAȚIE. Deoarece P_n are gradul n, există constante reale b_{in}, $0 \leq i \leq n$ astfel încît $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{in} x^i$ deci

$$< x^m, P_n(x) > = \sum_{i=0}^{n} b_{in} < x^m, x^i > = \sum_{i=0}^{n} b_{in} \int_I x^{m+i} \rho(x) \, dx = \sum_{i=0}^{n} b_{in} c_{i+m}.$$

Conform proprietății 3 rezultă că pentru $m = 0, 1, ..., n-1$ avem $\sum_{i=0}^{n} b_{in} c_{i+m} = 0$. Aceste relații definesc un sistem liniar omogen de n ecuații cu $n+1$ necunoscute $b_{0n}, b_{1n}, ..., b_{nn}$. Rezultă

$$\frac{b_{0n}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_n \\ c_2 & c_3 & c_{n+1} \\ \\ c_n & c_{n+1} & c_{2n-1} \end{vmatrix}} = \frac{-b_{1n}}{\begin{vmatrix} c_0 & c_2 & c_n \\ c_1 & c_3 & c_{n+1} \\ \\ c_{n-1} & c_{n+1} & c_{2n-1} \end{vmatrix}} = \ldots = \frac{(-1)^n b_{nn}}{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & c_n \\ \\ c_{n-1} & c_n & c_{2n-2} \end{vmatrix}}$$

şi notînd cu A_n valoarea comună a acestor rapoarte şi înlocuind coeficienții b_{in} în expresia inițială a lui $P_n(x)$, se obține formula din enunț.

OBSERVAȚIE. Din proprietatea 4 rezultă că funcția pondere (care permite calculul explicit al coeficienților c_k) determină în mod univoc toate polinoamele P_n (mai întîi pînă la o constantă multiplicativă A_n, dar reamintim că polinoamele sînt monice).

EXEMPLE. 1) Considerăm cazul polinoamelor Legendre. În acest caz,

$$c_k = \int_{-1}^{1} x^k \, dx = \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_{-1}^{1} = \begin{cases} \dfrac{2}{k+1} & \text{dacă } k \text{ este par} \\ 0 & \text{dacă } k \text{ este impar.} \end{cases}$$

Aşadar, $c_0 = 2$, $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{2}{3}$, $c_3 = 0$ etc. Aplicînd formula (*) rezultă că

$$P_0(x) = A_0 c_0 = 2A_0,\ P_1(x) = A_1 \cdot \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = A_1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 2A_1 x,$$

$$P_2(x) = A_2 \cdot \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = A_2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = A_2 \cdot \frac{4}{3}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

Fiind monice, rezultă $P_0 = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$. De asemenea, se arată că $P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$, $P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$ etc.

2) În cazul polinoamelor Cebîşev, avem

$$c_k = \int_{-1}^{1} \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \overset{x=\sin t}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^k t \, dt$$

deci $c_0 = \pi$, $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{\pi}{3}$, $c_3 = 0$ etc. Va rezulta $T_0 \equiv 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$, $T_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$, $T_4(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{8}$ etc. Vom vedea că $(\forall)\, n \geq 1$, $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \tilde{T}_n(x)$, unde $\tilde{T}_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

3) Primele polinoame Laguerre sînt $L_0 = 1$, $L_1 = x - 1$, $L_2 = x^2 - 4x + 2$, $L_3 = x^3 - 9x^2 + 18x - 6$, $L_4 = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$ etc., iar polinoamele Hermite sînt $H_0 = 1$, $H_1 = x$, $H_2 = x^2 - \frac{1}{2}$, $H_3 = x^3 - \frac{3}{2}x$, $H_4 = x^4 - 3x^2 + \frac{3}{4}$ etc.

Continuăm lista de proprietăţi generale.

Să observăm că pentru orice $n \geq 0$, polinomul $P_{n+1}(x) - xP_n(x)$ are gradul $\leq n$ deci $P_{n+1}(x) - xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k(x)$. Atunci pentru orice $0 \leq m \leq n$ avem

$$<P_m, P_{n+1} - xP_n> = <P_m, P_{n+1}> - <P_m, xP_n> = - <xP_m, P_n>$$

şi pe de altă parte,

$$< P_m, P_{n+1} - xP_n > = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k < P_m, P_k > = \alpha_m \cdot \|P_m\|^2.$$

Deoarece xP_m are gradul $m + 1$, rezultă că $<xP_m, P_n> = 0$ deci $\alpha_m = 0$ pentru $m + 1 < n$, adică $m \leq n - 2$. Pentru $m = n - 1$ avem

$$- < xP_{n-1}, P_n > = \alpha_{n-1}\|P_{n-1}\|^2.$$

Dar $xP_{n-1} = P_n + Q$ cu Q polinom de grad $\leq n - 1$ deci

$$< xP_{n-1}, P_n > = < P_n + Q, P_n > = \|P_n\|^2$$

şi ca atare α_{n-1} este un număr real strict negativ. Am dovedit în acest mod următoarea relaţie de recurenţă:

5) **Pentru orice $n \geq 1$ are loc o relaţie de forma**

$$P_{n+1}(x) - xP_n(x) = \alpha_{n-1} \cdot P_{n-1}(x) + \alpha_n \cdot P_n(x)$$

adică

$$P_{n+1}(x) = \alpha_{n-1} \cdot P_{n-1}(x) + (x + \alpha_n) \cdot P_n(x) \text{ cu } \alpha_{n-1} < 0.$$

6) **Pentru orice întreg $n \geq 1$, polinomul P_n are n rădăcini simple, situate în intervalul I.**

DEMONSTRAŢIE. Fie $u_1, ..., u_m$ rădăcinile reale distincte ale lui P_n care sînt situate în I şi au ordinul de multiplicitate impar. Să considerăm polinomul $Q(x) = (x - u_1) ... (x - u_m)$ de grad m. În cazul cînd nu există rădăcini ca mai sus, considerăm că $m = 0$ şi luăm $Q \equiv 1$. Dacă $m < n$, atunci $<P_n, Q> = 0$, conform proprietăţii 3 deci $\int_I \rho P_n Q = 0$. Dar produsul $P_n \cdot Q$ are un semn constant pe I (prin însăşi alegerea lui Q) deci $P_n \cdot Q = 0$ pe I.

Aşadar, ipoteza $0 \leq m \leq n$ conduce la o contradicţie şi rezultă în mod necesar că $m = n$. Atunci polinomul P_n va avea n rădăcini distincte în I şi fiind de grad n, toate acestea vor fi simple.

1.4. Studiul aprofundat al polinoamelor Cebîşev şi Legendre

Am văzut (observaţia care succede proprietatea 4 de mai sus) că polinoamele Cebîşev $T_n(x)$ sînt bine determinate, pînă la o constantă multiplicativă, prin condiţiile de ortogonalitate

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\cdot T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0,\ m \neq n.$$

Să considerăm polinomul de grad n

$$\tilde{T}_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

(de fapt notînd $\arccos x = t$ avem $\tilde{T}_n(x) = \cos nt$ unde $\cos t = x$; de exemplu $\tilde{T}_0(x) = 1,\ \tilde{T}_1(x) = x,\ \tilde{T}_2(x) = 2x^2 - 1$ etc). Avem

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tilde{T}_m(x)\tilde{T}_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{\arccos x = t}{=} \int_{\pi}^{0} \cos mt\cdot\cos nt\cdot\frac{-\sin t}{\sin t}\,dt = \int_{0}^{\pi} \cos mt\cdot\cos nt\,dt = 0$$

pentru $m \neq n$. Din observaţia menţionată rezultă că există constante reale B_n astfel încît

$$T_n(x) = B_n\cdot\tilde{T}_n(x) = B_n\cdot\cos(n \arccos x).$$

B_n se pot alege astfel încît T_n să fie monic deci $B_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ pentru $n \geq 1$ şi obţinem următoarea formulă:

$$(1)\ T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x),\ n \geq 1.$$

Aşadar, $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$, $T_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$ etc.

În mod similar, polinoamele Legendre sînt bine determinate (pînă la o constantă multiplicativă) prin condiţiile de ortogonalitate

$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0,\ m \neq n$. Să considerăm polinomul de grad n

$$Q_n(x) = [(x^2 - 1)^n]^{(n)}.$$

Se verifică uşor că $\int_{-1}^{1} Q_m(x)Q_n(x)\,dx = 0$ pentru $m \neq n$ deci există constante reale D_n astfel încît $P_n(x) = D_n[(x^2 - 1)^n]^{(n)}$. Coeficientul termenului de grad maxim al lui $[(x^2 - 1)^n]^{(n)}$ este A_{2n}^n şi rezultă formula de calcul al polinoamelor Legendre monice:

$$(2)\ P_n(x) = \frac{1}{A_{2n}^n}\left[\left(x^2 - 1\right)^n\right]^{(n)}$$

În cele ce urmează, vom nota

$$(3)\ \tilde{P}_n(x) = \frac{1}{2^n\cdot n!}\left[(x^2 - 1)^n\right]^{(n)},\ n \geq 0$$

(acesta diferă de polinomul monic Legendre doar printr-o constantă multiplicativă).

TEOREMA 1.3. a) Polinoamele Cebîşev $y = T_n(x)$, $n \geq 0$ verifică ecuația diferențială $(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$.

b) Polinoamele Legendre $y = P_n(x)$, $n \geq 0$ verifică ecuația diferențială $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$.

DEMONSTRAȚIE. a) Deoarece $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x)$, rezultă

$$T_n'(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\sin(n \arccos x) \cdot \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}$$

şi prin calcul direct avem $(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$ pentru orice $x \in (-1, 1)$.

b) Notăm $u(x) = (x^2 - 1)^n$ deci $(x^2 - 1)u'(x) = 2nxu(x)$. Derivînd această relație de $n + 1$ ori, se obține conform regulii lui Leibniz,

$$[(x^2 - 1) \cdot u'(x)]^{(n+1)} = 2nx \cdot u^{(n+1)}(x) + 2n(n + 1) \cdot u^{(n)}(x),$$

deci

$$(x^2 - 1)u^{(n+2)}(x) + 2(n + 1)xu^{(n+1)}(x) + n(n + 1)u^{(n)}(x) = \\ = 2nx \cdot u^{(n+1)}(x) + 2n(n + 1) \cdot u^{(n)}(x),$$

de unde

$$(x^2 - 1) \cdot (u^{(n)}(x))'' + 2x(u^{(n)}(x))' = n(n + 1)u^{(n)}(x) = 0.$$

Deoarece $P_n(x) = \frac{1}{A_{2n}^n}u^{(n)}(x)$, rezultă

$$(x^2 - 1) \cdot P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0,$$

deci relația căutată.

COROLAR. Să notăm $V = \mathbb{R}_N[x]$ spațiul vectorial real al funcțiilor polinomiale cu coeficienți reali de grad $\leq N$ ($N \geq 1$ fiind fixat). **Atunci:**

a) **operatorul** $\mathscr{T} = (x^2 - 1)\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx}$ deci $\mathscr{T}: V \to V$,

$\mathscr{T}(y) = (x^2 - 1)y'' + xy'$ **admite vectorii proprii $T_n(x)$, cu valorile proprii n^2 pentru orice $n = 0, 1, ..., N$.**

b) **operatorul** $\mathscr{L} = (x^2 - 1)\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx}$ **deci** $\mathscr{L}: V \to V$,

$\mathscr{L}(y) = (x^2 - 1)y'' + 2xy'$, **admite vectorii proprii P_n, cu valorile proprii $n(n + 1)$ pentru orice $n = 0, 1, ..., N$.**

Afirmația corolarului este o altă reformulare a teoremei 1.3, deoarece $\mathscr{T}(T_n) = (x^2 - 1)T_n'' + xT_n' \overset{\text{teor.1.3}}{=} n^2T_n$, pentru orice $0 \leq n \leq N$; în mod similar,

$$\mathscr{L}(P_n) = (x^2 - 1)P_n'' + 2xP_n' = n(n + 1)P_n, \text{ pentru } 0 \leq n \leq N.$$

OBSERVAȚIE. Dacă se pune problema determinării unei soluții $y = y(x)$ analitice **mărginite** pe intervalul $[-1, 1]$ a ecuației Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ cu λ parametru real, atunci se poate demonstra că în mod necesar λ este de forma $\lambda = n(n + 1)$ cu $n \in \mathbb{N}$ şi soluțiile mărginite corespunzătoare sînt de forma $y = aP_n(x)$ cu $a \in \mathbb{R}$ constant. Rezultatul este nebanal.

Fie I un interval pe dreapta reală şi V o vecinătate a originii. O funcţie $f(x, r), f: I \times V \to \mathbb{R}$ se numeşte **funcţie generatoare** pentru un şir de funcţii $\{Q_n(x)\}_{n \geq 0}$ definite pe I dacă pentru orice $x \in I$, în vecinătate punctului $r = 0$ are loc o dezvoltare de forma

$$f(x,r) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) r^n.$$

TEOREMA 1.4. a) Funcţia $f(x,r) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}}$, $x \in [-1, 1]$ **este generatoare pentru şirul polinoamelor Legendre** $\left\{\tilde{P}_n(x)\right\}_{n\geq 0}$.

b) Funcţia $g(x,r) = \dfrac{1-xr}{1-2xr+r^2}$, $x \in (-1, 1)$ **este generatoare pentru şirul polinoamelor Cebîşev** $\tilde{T}_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $n \geq 0$.

DEMONSTRAŢIE. a) Mai întîi să observăm că

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{2n-2k} \text{ deci}$$

$$\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)} = \sum_{0 \leq k \leq [n/2]} (-1)^k C_n^k (2n-2k)(2n-2k-1)\dots(n-2k+1) x^{n-2k}.$$

Dar coeficientul lui x^{n-2k} este egal cu

$$(-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} = (-1)^k n! C_{n-k}^k \frac{(2n-2k)!}{[(n-k)!]^2} =$$

$$= (-1)^k n! C_{n-k}^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-2k-1)\cdot 2^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Ca atare,

$$\tilde{P}_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)} = \sum_{0\leq k\leq [n/2]} (-1)^k C_{n-k}^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-2k-1)}{(n-k)!2^k} x^{n-2k}.$$

Pe de altă parte, să observăm că $f(x,r) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-r(2x-r)}}$.

Dar în general, pentru $|u| < 1$, avem

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = (1-u)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2\cdot 1!} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}u^2 + \dots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2^n\cdot n!}u^n + \dots$$

Înlocuim $u = r(2x - r)$ şi urmărim termenii ce conţin r^n. Observînd că ultimul termen care conţine r^n este u^n şi un termen u^{n-k} va conţine r^n exact atunci cînd $2k \leq n$, va rezulta că

$$f(x,r) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{0\leq k\leq [n/2]} (-1)^k C_{n-k}^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-2k-1)}{(n-k)!2^k} x^{n-2k}\right) r^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n(x) r^n.$$

[În capitolul 7, § 3 vom da o altă demonstraţie].

b) Avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{T}_n(x)\cdot r^n = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n \arccos x)\cdot r^n \overset{x=\cos\theta}{=} \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} r^n (e^{in\theta}+e^{-in\theta}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-re^{i\theta}}+\frac{1}{1-re^{-i\theta}}\right) = \frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} = \frac{1-xr}{1-xr+r^2},$$

pentru orice $|r| < 1$ şi $x \in (-1, 1)$.

Stabilim acum relații de recurență pentru polinoamele Legendre şi Cebîşev:

TEOREMA 1.5. Pentru orice întreg $n \geq 1$ şi $x \in \mathbb{R}$ avem

a) $(n+1)\tilde{P}_n(x) - (2n+1)x\tilde{P}_n(x) + n\tilde{P}_{n-1}(x) = 0$;

b) $\tilde{T}_{n+1}(x) - 2x\tilde{T}_n(x) + \tilde{T}_{n-1}(x) = 0$.

DEMONSTRAȚIE. a) Conform teoremei 1.4. are loc relația

$$(1-2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n(x) r^n.$$

Derivînd-o în raport cu r, rezultă $(1-2rx+r^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(x-r) = \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{P}_n(x) r^{n-1}$,

adică

$$(x-r)\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n(x) r^n = (1-2rx+r^2)\sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{P}_n(x) r^{n-1}.$$

Identificînd coeficienții lui r^n, rezultă

$$x\tilde{P}_n(x) - \tilde{P}_{n-1}(x) = (n+1)\tilde{P}_{n+1}(x) - 2nx\tilde{P}_n(x) + (n-1)\tilde{P}_{n-1}(x)$$

şi se obține relația din enunț.

b) Notînd $x = \cos t$, avem de verificat relația

$$\cos(n+1)t - 2\cos t \cos nt + \cos(n-1)t = 0,$$

ceea ce este evident.

În unele considerații este util să calculăm norma polinoamelor ortogonale.

TEOREMA 1.6. Pentru orice $n \geq 0$ avem

$$\text{a) } \|\tilde{P}_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}};$$

$$\text{b) } \|\tilde{T}_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ dacă } n \neq 0 \text{ şi } \|\tilde{T}_0\| = \sqrt{\pi}.$$

DEMONSTRAȚIE. a) Înlocuind n cu $n-1$ în relația de recurență a) din teorema 1.5, rezultă

$$\|\tilde{P}_n\|^2 = \int_{-1}^{1} \tilde{P}_n(x)\cdot\tilde{P}_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \tilde{P}_n(x)\left[\frac{2n-1}{n}x\tilde{P}_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n}\tilde{P}_{n-2}(x)\right]dx =$$

$$= \frac{2n-1}{n}\int_{-1}^{1} x\tilde{P}_n\tilde{P}_{n-1}\,dx = \frac{2n-1}{n}\int_{-1}^{1} \tilde{P}_{n-1}\cdot x\tilde{P}_n\,dx \overset{\text{cf.1.5 a)}}{=}$$

$$= \frac{2n-1}{n}\int_{-1}^{1} \tilde{P}_{n-1}(x)\cdot\left(\frac{n+1}{2n+1}\tilde{P}_{n+1} + \frac{n}{2n+1}\tilde{P}_{n-1}\right)dx = \frac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} \tilde{P}_{n-1}(x)\cdot\tilde{P}_{n-1}(x)\,dx,$$

Aşadar,

$$\left\|\tilde{P}_n\right\|^2 = \frac{2n-1}{2n+1}\left\|\tilde{P}_{n-1}\right\|^2, n \geq 2.$$

Scriind aceste relaţii pentru $n = 2, 3, \ldots, k$ şi înmulţindu-le, obţinem

$\left\|\tilde{P}_k\right\|^2 = \dfrac{3 \cdot \left\|\tilde{P}_1\right\|^2}{2k+1}$. Dar $\left\|\tilde{P}_1\right\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \dfrac{2}{3}$ deci $\left\|\tilde{P}_k\right\|^2 = \dfrac{2}{2k+1}$ pentru orice $k \geq 0$.

b)

$$\left\|\tilde{T}_n\right\|^2 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tilde{T}_n(x) \cdot \tilde{T}_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cos^2(n \arccos x)\,dx =$$

$$\overset{\arccos x = t}{=} \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{dacă} \quad n \neq 0 \\ \pi & \text{dacă} \quad n = 0 \end{cases}$$

APLICAŢII.

1) Polinoamele Cebîşev sînt strîns legate de problema "celei mai bune aproximări". Fixăm un întreg $n \geq 0$. Am văzut că $T_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x)$ este un polinom monic şi arătăm că pentru orice polinom monic $M(x)$ de gradul n, avem $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| \leq \sup\limits_{x\in[-1,1]} |M(x)|$ deci **dintre toate polinoamele monice de grad n, polinomul Cebîşev $T_n(x)$ are cea mai mică normă – sup pe intervalul** $[-1, 1]$.

Într-adevăr, să observăm mai întîi că extremele lui $T_n(x)$ sînt atinse pentru $T_n'(x) = 0$ adică $n \arccos x = k\pi$ deci în punctele $x_k = \cos\dfrac{k\pi}{n}$, $0 \leq k \leq n$; atunci $T_n(x_k) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\cos k\pi = \dfrac{(-1)^k}{2^{n-1}}$ şi ca atare $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Avem deci de arătat că $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |M(x)| \geq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Presupunem prin absurd că $\forall\, x \in [-1, 1]$ am avea $|M(x)| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$. Atunci

$$\operatorname{sgn}(T_n(x_k) - M(x_k)) = \operatorname{sgn}\left(\frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - M(x_k)\right) = (-1)^k \text{ pentru orice } 0 \leq k \leq n.$$

Aşadar, polinomul $T_n - M$ care este de grad $n-1$ ar avea n schimbări de semn pe intervalul $[-1, 1]$ deci ar avea cel puţin n rădăcini. Atunci $T_n - M = 0$ adică $T_n = M$, ceea ce este absurd, deoarece ar rezulta

$$|M(x_k)| = |T_n(x_k)| = \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ absurd.}$$

2) Sintetizăm acum într-un tablou principalele caracteristici numerice şi proprietăţi de calcul cu polinoame ortogonale. Formula generală de recurenţă stabilită la punctul 1.3 poate fi scrisă sub forma:

$$(\forall)\, n \geq 1,\ a_n P_{n+1}(x) = (b_n x - c_n) \cdot P_n(x) - d_n \cdot P_{n-1}(x).$$

Se poate demonstra apoi că oricare polinom $P_n(x)$ (relativ la ponderea ρ pe intervalul I) verifică o ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordin II cu coeficienţi variabili, de forma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sigma(x)\cdot\rho(x)P_n'(x)\right]+D_n\rho(x)P_n(x)=0,\ x\in I.$$

Tipul / Caracteristici	Legendre	Cebîşev	Laguerre	Hermite
Notaţie	$\tilde{P}_n(x)$	$\tilde{T}_n(x)$	$L_n^{(\alpha)}(x)$	$H_n(x)$
Intervalul I	$[-1, 1]$	$(-1, 1)$	$(0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
Ponderea $\rho(x)$	1	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x^{\alpha}\cdot e^{-x}$ ($\alpha > -1$; uzual $\alpha = 0$)	e^{-x^2}
$\sigma(x)$	$1-x^2$	$1-x^2$	x	1
$N_n = \lVert P_n\rVert^2$	$\frac{2}{2n+1}$	$\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{pt. } n\neq 0\\ \pi & \text{pt. } n=0\end{cases}$	$n!\,\Gamma(\alpha+n+1)$	$\sqrt{\pi}\cdot 2^n\cdot n!$
D_n	$n(n+1)$	n^2	n	$2n$
a_n	$n+1$	1	1	1
b_n	$2n+1$	2	1	2
c_n	0	0	$2n+\alpha+1$	0
d_n	n	1	$n(n+\alpha)$	$2n$

3) Determinăm spectrul discret Legendre al semnalului $f:[-1, 1]\to\mathbb{R}$, $f(t) = |t|$.

Aşadar, $|t| = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\cdot\tilde{P}_n(t)$ şi trebuie să aflăm şirul $\{c_n\}_n$. Conform relaţiilor de ortogonalitate avem

$$\int_{-1}^{1}|t|\cdot\tilde{P}_m(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{m=0}^{\infty}c_m\int_{-1}^{1}\tilde{P}_m(t)\cdot\tilde{P}_n(t)\,\mathrm{d}t=c_m\left\lVert\tilde{P}_m\right\rVert^2.$$

Conform teoremei 1.6, a), rezultă

$$c_m=\frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1}|t|\cdot\tilde{P}_m(t)\,\mathrm{d}t,\ m\geq 0.$$

Deoarece $\tilde{P}_0(t)=1$, $\tilde{P}_1(t)=t$, $\tilde{P}_2(t)=\frac{3t^2-1}{2}$, $\tilde{P}_3(t)=\frac{5t^3-3t}{2}$ etc. se determină cu uşurinţă c_0, c_1, c_2, c_3 etc.

§ 2. Caracteristici statistice ale variabilelor aleatoare

2.1. Cîmpuri arbitrare de probabilitate şi variabile aleatoare

DEFINIȚIA 2.1. Fie Ω o mulțime nevidă. Se numeşte **familie de evenimente** o colecție $\mathscr{K}$ de submulțimi ale lui Ω astfel încît:

1°. ϕ, Ω aparțin lui $\mathscr{K}$;

2°. Dacă $A \in \mathscr{K}$, atunci $CA = \Omega \setminus A \in \mathscr{K}$;

3°. Pentru orice şir $\{A_n\}_{n \geq 1}$ de evenimente, $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ este un eveniment.

O pereche $(\Omega, \mathscr{K})$ cu proprietățile 1°, 2°, 3° se mai numeşte **spațiu măsurabil,** iar mulțimile $A \subset \Omega$ care aparțin lui $\mathscr{K}$ deci evenimentele se mai numesc mulțimi **măsurabile**.

Dacă $A, B \in \mathscr{K}$, atunci $A \cup B$, $A \cap B$ şi $A \setminus B$ aparțin lui $\mathscr{K}$ [aplicăm 3°, 2° şi faptul că $A \cap B = C(CA \cup CB)$, $A \setminus B = A \cap CB$]. Apoi dacă $\{A_n\}_{n \geq 1}$ sînt evenimente, atunci evident $\bigcap_{n\geq 1} A_n = C\left(\bigcup_{n\geq 1} CA_n\right)$ va fi un eveniment.

Dacă $(\Omega, \mathscr{K})$ este un spațiu măsurabil, se numeşte **funcție de luarea probabilității** orice aplicație $P : \mathscr{K} \to [0, 1]$ astfel încît:

4°. $P(\phi) = 0, P(\Omega) = 1$;

5°. Dacă $\{A_n\}_{n \geq 1}$ este un şir de evenimente două cîte două disjuncte (incompatibile), atunci seria $\sum_{n\geq 1} P(A_n)$ este convergentă şi în plus,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Proprietatea 5° se mai numeşte **aditivitatea cel mult numărabilă** a funcției P. Pentru orice $A \in \mathscr{K}$, numărul $P(A)$ se numeşte **probabilitatea evenimentului** A.

Orice triplet de forma $(\Omega, \mathscr{K}, P)$ cu proprietățile 1° – 5° se numeşte **cîmp de probabilitate**. Această definiție axiomatică aparține matematicianului rus A. Kolmogorov (1903–1986), elaborată într-un memoriu celebru din 1933.

EXEMPLE.

1) Orice cîmp discret de evenimente (X, P) este şi un cîmp de probabilitate, luînd $\Omega = X$ şi $\mathscr{K} = \mathscr{P}(X)$. De altfel toate proprietățile probabilităților stabilite la punctul 3.1 din cap. 3 se extind la cazul unui cîmp oarecare de probabilitate. În cazul discret numai evenimentele sigure aveau probabilitatea 1. În cazul unui cîmp oarecare $(\Omega, \mathscr{K}, P)$ de probabilitate, dacă $A \in \mathscr{K}$ şi $P(A) = 1$, nu rezultă neapărat $A = \Omega$. Se spune atunci că A este un eveniment **aproape sigur**.

2) Fie $\Omega = [0, 1]$ și $\mathscr{K}$ cea mai mică colecție de părți ale lui Ω conținînd toate subintervalele lui $[0, 1]$, stabilă la complementară și la reuniune cel mult numărabilă. Elementele lui $\mathscr{K}$ se mai numesc submulțimile măsurabile ale lui $[0, 1]$. Pentru orice $\omega \in [0, 1]$ se pune $P(\omega) = 0$ și pentru orice interval $[a, b] \subset [0, 1]$, $P([a, b]) = b - a$. Apoi orice $M \in \mathscr{K}$ se definește $P(M) = \inf \sum_{n \geq 1} P(I_n)$, unde "inf" este marginea inferioară a sumelor indicate, după toate șirurile de intervale $I_n \subset [0, 1]$ astfel încît $M \subset \bigcup_{n \geq 1} I_n$. Se verifică ușor că $(\Omega, \mathscr{K}, P)$ este un cîmp de probabilitate.

Evenimentul A = {punct din Ω ce reprezintă un număr irațional} are probabilitatea 1 deci este aproape sigur, dar totuși nu este sigur.

DEFINIȚIA 2.2. Fie $(\Omega, \mathscr{K}, P)$ un cîmp de probabilitate. O funcție $\xi(\omega)$, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ se numește **variabilă aleatoare** (relativ la acest cîmp) dacă pentru orice $c \in \mathbb{R}$, mulțimea $\Omega_c = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \leq c\}$, notată și $\{\xi \leq c\}$, este un eveniment, adică aparține lui $\mathscr{K}$.

Se numește **vector aleator** n – dimensional pe cîmpul considerat orice funcție $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), ..., \xi_n(\omega))$, ale cărei componente sînt variabile aleatoare. O variabilă aleatoare $\Omega \to \mathbb{C}$ cu valori complexe este caracterizată prin aceea că partea reală și partea imaginară sînt variabile aleatoare reale.

EXEMPLE. 1) Un exemplu important de variabilă aleatoare îl constituie momentul ξ de defectare a unui anumit dispozitiv. Este evident că pentru orice moment c se poate evalua statistic probabilitatea $P\{\xi \leq c\}$ deci ca defectarea să aibă loc înaintea momentului c. În acest caz nu este simplu că explicităm cîmpul de probabilitate (se poate lua Ω = mulțimea tuturor seturilor de parametri de care depinde evoluția dispozitivului, $\mathscr{K}$ = mulțimea evenimentelor posibile etc.).

2) Într–un joc de noroc suma "cîștigată" de unul din jucători este o variabilă aleatoare (la pierdere, suma respectivă este negativă).

3) Să considerăm planul xOy. Un punct **aleator** $M(\xi, \eta)$ are ambele coordonate variabile aleatoare ξ, η relativ la același cîmp de probabilitate.

Se poate arăta că dacă $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ sînt variabile aleatoare și $a \in \mathbb{R}$, atunci $a\xi$, $\xi + \eta$, ξ^2, $\xi\eta$, $|\xi|$, $\max(\xi, \eta)$, $\min(\xi, \eta)$ etc. sînt aleatoare.

TEOREMA 2.1. Fie $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare pe un cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathscr{K}, P)$. Atunci $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, mulțimile $\{\xi > a\}$, $\{\xi < a\}$, $\{\xi \geq a\}$, $\{a \leq \xi \leq b\}$ etc. sînt evenimente (adică aparțin lui $\mathscr{K}$).

DEMONSTRAȚIE. Conform definiției 2.2, $\Omega_a = \{\xi \leq a\} \in \mathscr{K}$. Atunci

$$\{\xi > a\} = C\Omega_a \in \mathscr{K}. \text{ Apoi } \xi < a = \bigcup_{n \geq 1} \left\{\xi \leq a - \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{n \geq 1} \Omega_{a - \frac{1}{n}} \text{ deci}$$

$\{\xi < a\} \in \mathscr{K}$. Complementara lui $\{\xi < a\}$ este $\{\xi \geq a\}$ etc.

OBSERVAȚIE. Reținem că evenimentele sînt măsurabile prin probabilitățile lor, iar variabilele aleatoare sînt măsurabile prin probabilitățile ca valorile lor să fie cuprinse în diverse intervale.

Variabilele aleatoare $\xi_1, \dots, \xi_n$ relativ la acelaşi cîmp de probabilitate se zic **independente** dacă pentru orice intervale $I_1, \dots, I_n$ avem:

$$P(\xi_1 \in I_1, \dots, \xi_n \in I_n) = P(\xi_1 \in I_1) \dots P(\xi_n \in I_n).$$

Adeseori variabilele aleatoare nu sînt independente, unele fiind funcţie de celelalte sau influenţate de ele. De exemplu, pentru variabilele ξ, η sînt utile probabilităţile condiţionate $P(\xi \in I \mid \eta \in J)$ cu I, J intervale. Faptul că ξ, η sînt independente înseamnă că $P(\xi \in I \mid \eta \in J) = P(\xi \in I)$, pentru orice I şi J.

2.2. Funcţii de repartiţie şi densităţi de probabilitate

Fie $(\Omega, \mathscr{K}, P)$ un cîmp de probabilitate şi $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare.

DEFINIŢIA 2.3. Funcţia reală

$$F_\xi : \mathbb{R} \to [0, 1], F_\xi(x) = P(\xi \le x)$$

se numeşte **funcţia de repartiţie** a lui ξ.

O variabilă aleatoare se consideră cunoscută nu atît prin valorile ei cît prin funcţia ei de repartiţie. Proprietăţile funcţiei de repartiţie sînt cuprinse în:

TEOREMA 2.2. a) F_ξ **este monoton crescătoare;**

b) $F_\xi(-\infty) = 0$ **şi** $F_\xi(+\infty) = 1$;

c) F_ξ **este continuă la dreapta în orice punct** $a \in \mathbb{R}$;

d) **Pentru orice** $a < b$, $P(a < \xi \le b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$, $P(a < \xi < b) = F_\xi(b - 0) - F_\xi(a)$ **şi** $P(a \le \xi \le b) = F_\xi(b) - F_\xi(a - 0)$; **în particular,** $P(\xi = a) = F_\xi(a) - F_\xi(a - 0)$.

Vom avea nevoie de următoarea

LEMĂ. 1^0) **Fie** $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \dots$ **un şir crescător de evenimente şi** $A = \bigcup_{n \ge 1} A_n$. **Atunci** $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

2^0) **Fie** $B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_n \supset B_{n+1} \supset \dots$ **un şir descrescător de evenimente şi** $B = \bigcap_{n \ge 1} B_n$. **Atunci** $P(B) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$.

Demonstraţia lemei. 1°) Punem $A_0 = \phi$ şi observăm că A se poate scrie ca o reuniune de evenimente două cîte două disjuncte:
$A = (A_1 \setminus A_0) \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \dots \cup (A_{n+1} \setminus A_n) \cup \dots$ deci conform proprietăţii de aditivitate numărabilă,

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_{k+1} \setminus A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[P(A_{k+1}) - P(A_k)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left[P(A_{k+1}) - P(A_k)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[P(A_n) - P(A_0)\right] = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

2°) Fie $A_n = \complement B_n$, $n \ge 1$ şi $A = \complement B$ deci $A = \complement(\bigcap_{n\ge1} B_n) = \bigcup_{n\ge1} A_n$ şi conform 1°, $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ adică $1 - P(B) = \lim_{n\to\infty}(1 - P(B_n)) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(B_n)$, şi rezultă relaţia din enunţ.

Demonstraţia teoremei. a) Dacă $x < x'$, atunci evenimentul $\{\xi \le x\}$ implică faptul că $\{\xi \le x'\}$ deci $P\{\xi \le x\} \le P\{\xi \le x'\}$ adică $F_\xi(x) \le F_\xi(x')$.

b) $F_\xi(-\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} F_\xi(-n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\xi \le -n)$. Notăm $B_n = \{\xi \le -n\}$ deci $\bigcap\limits_{n\ge1} B_n = \phi$ şi aplicînd lema precedentă, 2°, va rezulta

$$F_\xi(-\infty) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(\bigcap_{n\ge1} B_n) = P(\phi) = 0.$$

În mod similar,

$$F_\xi(\infty) = \lim_{n\to\infty} F_\xi(n) = \lim_{n\to\infty} P(\xi \le n) = P(\bigcup_{n\ge1}\{\xi \le n\}) = P(\Omega) = 1.$$

c) Avem

$$F_\xi(a+0) = \lim_{n\to\infty} F_\xi\left(a + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\xi \le a + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= P\left(\bigcap_{n\ge1}\left\{\xi \le a + \frac{1}{n}\right\}\right) = P(\xi \le a) = F_\xi(a).$$

d) Deoarece $\{\xi > a\} = \complement\{\xi \le a\}$, rezultă $P(\xi > a) = 1 - P(\xi \le a) = 1 - F_\xi(a)$.

Apoi $\{\xi < b\} = \bigcup\limits_{n\ge1}\left\{\xi \le b - \frac{1}{n}\right\}$ deci conform lemei, 1°,

$$P(\xi < b) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left\{\xi \le b - \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} F_\xi\left(b - \frac{1}{n}\right) = F_\xi(b-0).$$

Rezultă că $P(\xi \ge b) = 1 - F_\xi(b-0)$.

Deoarece $\{a < \xi \le b\} = \{\xi \le b\} \setminus \{\xi \le a\}$, rezultă

$P(a < \xi \le b) = P(\xi \le b) - P(\xi \le a) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$; la fel

$\{a < \xi < b\} = \{\xi < b\} \setminus \{\xi \le a\}$ deci

$P(a < \xi < b) = P(\xi < b) - P(\xi \le a) = F_\xi(b-0) - F_\xi(a)$ etc.

OBSERVAŢIE. Aşadar oricărei variabile aleatoare ξ i se asociază o funcţie monoton crescătoare $F_\xi : \mathbb{R} \to [0, 1]$, care este deci integrabilă pe orice interval compact din $\mathbb{R}$.

Dacă F_ξ este de clasă C^1, atunci să notăm $p_\xi = F_\xi'$; avem evident $p_\xi \ge 0$ (deoarece F_ξ este crescătoare) şi $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\,\mathrm{d}t$; în particular

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

DEFINIŢIA 2.4 Funcţia $p_\xi = F_\xi'$ definită în punctele de derivabilitate a lui F_ξ se numeşte **densitatea de probabilitate** a variabilei aleatoare ξ.

Mai general, prin **densitate de probabilitate** (fără a preciza ξ) se înţelege o funcţie $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pozitivă, continuă pe porţiuni şi satisfăcînd în plus condiţia $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

O variabilă aleatoare $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ se zice **continuală** dacă funcţia ei de repartiţie este de clasă C^1 pe porţiuni; ξ se zice **discretă** dacă ia un număr finit

sau numărabil de valori $\{a_n\}$ cu probabilităţile $p_n = P(\xi = a_n)$ unde $\sum_{n\geq 1} p_n = 1$. În acest caz, $F_\xi(x) = P(\xi \leq x) = \sum_{a_n<x} p_n = \sum_{n\geq 1} p_n u(x - a_n)$, u fiind treapta unitate. Se pot imagina variabile aleatoare care nu sînt nici continuale, nici discrete.

Menţionăm de asemenea că variabile aleatoare distincte pot avea aceeaşi funcţie de repartiţie (deci din punct de vedere statistic ele pot fi considerate identice).

EXEMPLE. 1) O variabilă aleatoare $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ se zice **repartizată uniform** pe un interval $[a, b]$ dacă densitatea ei de probabilitate este

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{dacă} \quad x \in [a, b] \\ 0 & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

Evident, p este continuă pe porţiuni, $p \geq 0$ şi $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$.

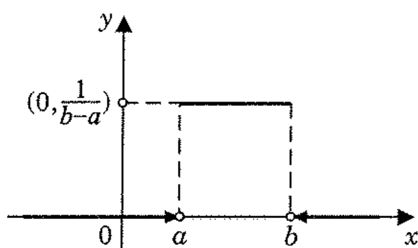


Figura VI.1

2) **Repartiţia exponenţială** cu parametrul λ, $\lambda > 0$, a unei variabile aleatoare $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ este definită prin funcţia de repartiţie $F_\xi(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \cdot u(x)$, unde u este treapta unitate. De exemplu, dacă un neutron pătrunde într–o substanţă cu densitate uniformă şi parcurge distanţa ξ pînă la prima ciocnire, atunci ξ este repartizată exponenţial cu parametrul $\lambda = \frac{1}{L}$ unde L = lungimea drumului liber mediu. Pe de altă parte, dacă un dispozitiv intră în funcţiune la momentul $t = 0$, atunci în multe situaţii se presupune (şi practica arată că această ipoteză este confirmată) că momentul ξ al defectării este o variabilă aleatoare repartizată exponenţial. Să presupunem că dispozitivul are n componente $c_1, \ldots, c_n$ independente şi defectarea uneia (la momentul ξ_i cu parametrul λ_i, $1 \leq i \leq n$) conduce la defectarea întregului dispozitiv. În acest caz, momentul defectării dispozitivului este $\xi = \min(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ deci

$$P(\xi < t) = 1 - P(\xi \geq t) = 1 - P(\xi_1 \geq t, \xi_2 \geq t, \ldots, \xi_n \geq t) =$$
$$1 - \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i \geq t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)t}$$

deci ξ este de asemenea repartizat exponenţial.

DEFINIŢIA 2.5. O variabilă aleatoare $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ se zice **repartizată normal** (sau **normal distribuită** sau **gaussiană**) cu media m şi dispersia σ^2, $\sigma > 0$, dacă densitatea ei de probabilitate este $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}.$$

Graficul lui p este celebrul clopot al lui Gauss (figura VI.2);

p este continuă, $p \geq 0$ şi

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}x \overset{x-m=\sigma\sqrt{2}t}{=} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\sigma\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 1.$$

În plus, avem $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(t-m)^2}\,dt \overset{t-m=\sigma u}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Să introducem acum funcția $\Phi = \operatorname{errf}$ a erorilor,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du,$$

ale cărei valori sînt tabelate. Atunci

$$F_\xi(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

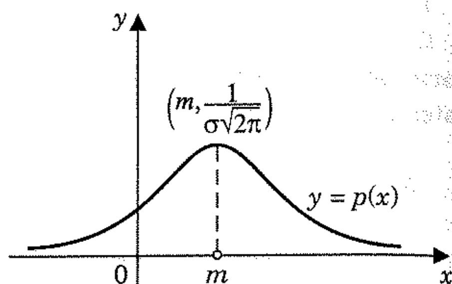


Figura VI.2

Conform teoremei 2.2 rezultă:.

TEOREMA 2.3. Dacă ξ este o variabilă aleatoare repartizată normal, cu media m şi dispersia σ^2, atunci pentru orice $a < b$, avem:

1°) $P(\xi \leq a) = \Phi\left(\dfrac{a-m}{\sigma}\right)$;

2°) $P(a < \xi < b) = P(a \leq \xi \leq b) = P(a < \xi \leq b) = P(a \leq \xi < b) =$
$$= \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right);$$

3°) $P(|\xi - m| < 3\sigma) = P(m - 3\sigma < \xi < m + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) \simeq 0{,}997 \simeq 1$ (**regula lui** 3σ).

OBSERVAȚII. Fie ξ o variabilă aleatoare. Legătura între funcția de repartiție F_ξ şi densitatea de probabilitate p_ξ este ilustrată în figura VI.3.

Deci $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $F_\xi(x)$ reprezintă aria porțiunii stîngi mărginite de curba $y = p_\xi(x)$, axa Ox şi paralela la Oy prin punctul de abscisă x. Apoi, pentru orice $\alpha < \beta$, rezultă că

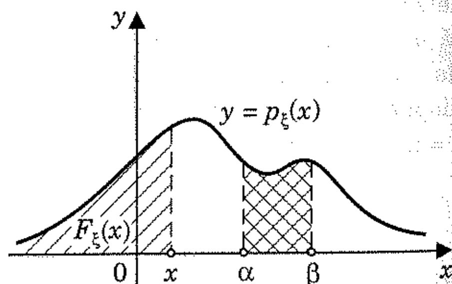


Figura VI.3

$$P(\alpha < \xi \leq \beta) = F_\xi(\beta) - F_\xi(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} p_\xi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarcăm de asemenea că dacă F_ξ este de clasă C^1, atunci $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$p_\xi(x) = F_\xi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_\xi(x+\Delta x) - F_\xi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < \xi \leq x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Noțiunile de funcție de repartiție și densitate de probabilitate se extind și la vectori aleatori. Dacă $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ este un vector aleator n-dimensional cu componentele $\xi_1, ..., \xi_n$, atunci **funcția de repartiție** (comună) a lui ξ este

$$F_\xi : \mathbb{R}^n \to [0, 1], F_\xi(x_1, ..., x_n) = P(\xi_1 \le x_1, ..., \xi_n \le x_n),$$

iar **densitatea de probabilitate** a lui ξ este funcția $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$p(x_1, ..., x_n) = \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_n \to 0}} \frac{1}{\Delta x_1 ... \Delta x_n} P(x_1 < \xi_1 \le x_1 + \Delta x_1, ..., x_n < \xi_n \le x_n + \Delta x_n),$$

cu valori pozitive și astfel încît pentru orice mulțime măsurabilă $B \subset \mathbb{R}^n$, să avem:

$$P\{\xi \in B\} = \int_B p(x_1, ..., x_n)\, \mathrm{d}x_1 ... \mathrm{d}x_n \overset{\text{notație}}{=} \int_B p(x)\, \mathrm{d}x.$$

În particular, $\int_{\mathbb{R}^n} p(x) dx = 1$.

Dacă ξ, η sînt variabile aleatoare independente și $\upsilon = (\xi, \eta)$, atunci $p_\upsilon(x, y) = p_\xi(x) p_\eta(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Reciproca este de asemenea adevărată.

2.3. Medie și dispersie. Spațiul Hilbert $L^2(\Omega, P)$

Fie $(\Omega, \mathscr{K}, P)$ un cîmp de probabilitate și $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare; ξ se numește **simplă** dacă există un șir de evenimente $\{A_n\}_{n\ge1}$ două cîte două disjuncte și acoperind Ω astfel încît ξ săi aibă cîte o valoare constantă c_n pe fiecare A_n. Numărul $M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot P(A_n)$, în ipoteza că seria respectivă este absolut convergentă, se numește **media** lui ξ. Apoi $M(\xi^2) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 P(A_n)$, în ipoteza că seria converge; în acest caz se definește **dispersia** lui ξ, $D_\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2$. Se remarcă analogia cu cazul cîmpurilor discrete de evenimente.

Să presupunem că pentru ξ avem $F_\xi(x) = 0$ pentru $x < a$ și $F_\xi(x) = 1$ pentru $x > b$ deci valorile lui ξ sînt cuprinse în intervalul $[a, b]$. Divizăm intervalul $[a, b]$ în N intervale prin punctele de diviziune $a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$. Alegem c_i arbitrar în $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \le i \le N$. Probabilitatea ca ξ să aibă valori în intervalul $(x_{i-1}, x_i]$ este cf. teor. 2.2 b) $F_\xi(x_i) - F_\xi(x_{i-1})$, astfel că media lui ξ poate fi aproximată prin suma $\sum_{i=1}^{N} c_i \left[F_\xi(x_i) - F_\xi(x_{i-1})\right]$. În cazul general alegem pentru N fixat, punctele $-\infty < ... < \frac{k}{N} < \frac{k+1}{N} < ... +\infty$, $k \in \mathbb{Z}$ și $u_k = \frac{k}{N}$. Din această discuție, este bine motivat să numim **media** unei variabile aleatoare ξ numărul $M\xi = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{k}{n} P\left(\frac{k}{n} < \xi \le \frac{k+1}{n}\right)$; în mod similar,

$M(\xi^2) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot P\left(\frac{k}{n} < \xi \le \frac{k+1}{n}\right)$, în ipoteza că operațiile au sens și conduc la numere finite.

Dacă ξ, η au medie, atunci pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, $a\xi + b\eta$ are medie și în plus, $M(a\xi + b\eta) = aM\xi + bM\eta$. Dacă ξ și ξ^2 au medie, atunci se definește **dispersia** $D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2$. Evident

$$M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2) = M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2 = D\xi$$

și avem astfel o altă formulă de calcul al dispersiei.

TEOREMA 2.4. **Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate și $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare avînd medie și dispersie. Dacă F este funcția de repartiție a lui ξ, atunci**

(1) $\quad M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \,\mathrm{d}F(x)$ și $D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 \,\mathrm{d}F(x)$ **(integrale Stieltjes);**

Dacă în plus F este de clasă C^1 și $p = F'$ este densitatea de probabilitate a lui ξ, atunci

(2) $\quad M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) \,\mathrm{d}x$ **și** $D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 \cdot p(x) \,\mathrm{d}x.$

DEMONSTRAȚIE. Avem

$$M\xi = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{k}{n} P\left(\frac{k}{n} < \xi \le \frac{k+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{k}{n} \left[F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x \,\mathrm{d}F,$$

conform definiției integralei Stieltjes.

În general, dacă $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci $\varphi \circ \xi$ este o variabilă aleatoare și în ipoteza că aceasta are medie, rezultă

$$M(\varphi \circ \xi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \cdot P\left(\frac{k}{n} < \xi \le \frac{k+1}{n}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \,\mathrm{d}F(x).$$

Luînd $\varphi(x) = (x - M\xi)^2$, rezultă $\varphi \circ \xi = (\xi - M\xi)^2$ și

$$D\xi = M(\varphi \circ \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 \,\mathrm{d}F(x).$$

Partea a doua a teoremei rezultă observînd că $\mathrm{d}F(x) = p(x)\,\mathrm{d}x$.

Multe din proprietățile demonstrate în capitolul 3, § 3 se extind fără modificare la cazul cîmpurilor oarecare de probabilitate. De exemplu teorema III. 3.1, noțiunea de covarianță, teorema III. 3.2 (inegalitatea lui Cebîșev) etc.

Aceasta din urmă se scrie $P(|\xi - M\xi| \ge \delta) \le \delta^{-2} D\xi$, pentru orice $\delta > 0$ și rezultă observînd că

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 \,\mathrm{d}F(x) \ge \int_{|x - M\xi| \ge \delta} (x - M\xi)^2 \,\mathrm{d}F(x) \ge$$

$$\ge \delta^2 \int_{|x - M\xi| \ge \delta} \mathrm{d}F(x) = \delta^2 P(|\xi - M\xi| \ge \delta).$$

În afară de medie şi dispersie, se pot defini şi alte caracteristici ale variabilelor aleatoare. De exemplu, **momentul de ordin** k ($k \geq 1$), anume $\nu_k = M(\xi^k)$ şi momentul centrat de ordin k, $\mu_k = M(\xi - M\xi)^k$, $k \geq 1$. Formulele (1), (2) se extind imediat; de exemplu:

(3) $\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot p(x)\, dx;\ \mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^k \cdot p(x)\, dx$, în condiţii uşor de explicitat. Bineînţeles, $M\xi = \nu_1$, $\mu_1 = 0$ şi $D\xi = \mu_2$.

Exemple. 1) Fie ξ o variabilă aleatoare normal distribuită pe un cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathscr{K}, P)$. Atunci $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right)$ deci

$$M\xi = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}\, dx \overset{(x-m=\sigma\sqrt{2}t)}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(m\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt + \sigma\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2}\, dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(m \cdot \sqrt{\pi} + \sigma\sqrt{2} \cdot 0) = m$$

şi

$$D\xi = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}\, dx = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2}\, dt.$$

Dar

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2}\, dt = -\frac{1}{2} te^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ deci } D\xi = \sigma^2.$$

Am dovedit deci semnificaţia parametrilor m, σ; anume $m = M\xi$ = media lui ξ, $\sigma = \sqrt{D\xi}$ = abaterea medie pătratică a lui ξ.

Uneori pentru o variabilă aleatoare ξ normal repartizată cu media m şi dispersia σ^2 se scrie $\xi \in N(m, \sigma)$. Punînd $\eta = \frac{\xi - m}{\sigma}$, se vede imediat că $M\eta = \frac{1}{\sigma}(M\xi - m) = 0$ şi $D\eta = \frac{1}{\sigma^2} M(\xi - m)^2 = 1$ adică $\eta \in N(0, 1)$. Se spune că η este obţinută din ξ **prin normare.**

2) Dacă ξ este o variabilă aleatoare repartizată exponenţial cu parametrul $\lambda > 0$, atunci $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$, deci $p(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$.

Aplicînd teorema 2.4, rezultă $M\xi = \lambda \int_0^{\infty} te^{-\lambda t}\, dt = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$ şi

$D\xi = \int_0^{\infty} \left(t - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \cdot \lambda e^{-\lambda t} = \frac{1}{\lambda^2}$, după calcule imediate.

3) Fie ξ o variabilă aleatoare repartizată uniform în intervalul $[a, b]$.
Atunci

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\, dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{a+b}{2}$$

şi

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M\xi)^2 p(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^2}{12},$$

ținînd cont că $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dacă } x \in [a,b] \\ 0 & \text{în rest.}\end{cases}$

Dacă $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ este un cîmp de probabilitate fixat, se notează cu $L^2(\Omega, P)$ mulțimea variabilelor aleatoare $\xi : \Omega \to \mathrm{R}$ care au medie şi dispersie (finite), făcînd convenția de a identifica două variabile aleatoare $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ care coincid aproape sigur, adică satisfăcînd condiția $P(\xi = \eta) = 1$. Spațiul $L^2(\Omega, P)$ este în mod natural un spațiu Hilbert relativ la produsul scalar

$$<\xi, \eta> = M(\xi \cdot \eta).$$

Notînd $\mathring{\xi} = \xi - M\xi$, $\mathring{\eta} = \eta - M\eta$, se obțin variabile aleatoare cu media nulă. **Covarianța** lui $\xi, \eta \in L^2(\Omega, P)$ este prin definiție numărul real

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = <\mathring{\xi}, \mathring{\mu}>.$$

Aşadar, $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) = M(\xi\eta) - (M\xi)(M\eta)$. Dacă ξ şi η sînt independente, atunci $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$ şi se spune că sînt **necorelate**.

Dacă $\xi = (\xi_1, ..., \xi_p)$ este un vector aleator p–dimensional, atunci se poate considera o matrice pătratică $p \times p$ remarcabilă, numită **matricea de covarianță** a lui ξ, anume $R_\xi = (\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j))_{1 \le i,j \le p}$. Se observă că notînd

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_p \end{pmatrix} \text{ şi } \overline{X} = \begin{pmatrix} M\xi_1 \\ \vdots \\ M\xi_p \end{pmatrix},$$

avem $R_\xi = M\left((X - \overline{X}) \cdot (X - \overline{X})^T\right)$. Matricea R_ξ este simetrică şi pozitivă, în sensul că pentru orice $c = (c_1, ..., c_p) \in \mathbb{R}^p$ avem $c \cdot R_\xi \cdot c^T \ge 0$; într–adevăr,

$$c \cdot R_\xi \cdot c^T = \sum_{i,j}\mathrm{cov}(\xi_i, \xi_j)c_i c_j = \mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^p c_i\xi_i, \sum_{j=1}^p c_j\xi_j\right) = \mathrm{cov}(\eta, \eta) = D\eta \ge 0,$$

unde $\eta = \sum_{i=1}^p c_i\xi_i$.

Se defineşte de asemenea **coeficientul de covarianță** (sau **corelare**) a două variabile aleatoare ξ, η ca fiind raportul $\rho_{\xi\eta} = \frac{|\mathrm{cov}(\xi, \eta)|}{\sqrt{D\xi} \cdot \sqrt{D\eta}}$.

Conform inegalității lui Schwartz avem $0 \le \rho_{\xi\eta} \le 1$; apoi $\rho_{\xi\xi} = 1$ (maximum de corelare) şi $\rho_{\xi\eta} = 0$ în cazul cînd ξ, η sînt necorelate.

Un vector aleator bidimensional $\upsilon = (\xi, \eta)$ cu $\xi, \eta \in L^2(\Omega, P)$ se zice **repartizat normal** (sau **gaussian**) dacă densitatea de probabilitate $p_\upsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin $p_\upsilon(x, y) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta y} P(x < \xi \le x + \Delta x, y < \eta \le y + \Delta y)$,

este de forma

$$p_v(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_\xi^2}-\frac{2\rho(x-a)(y-b)}{\sigma_\xi\cdot\sigma_\eta}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_\eta^2}\right]}$$

unde $\rho=\rho_{\xi\eta}$ este coeficientul de covarianță al variabilelor aleatoare ξ și η. Am văzut că dacă ξ și η sînt independente, atunci $\rho=0$ (deci ξ și η sînt necorelate). Reciproca are loc dacă vectorul $v=(\xi,\eta)$ este gaussian; într-adevăr, rezultă $\rho=0$ și

$$p_v(x,y)=\frac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_\xi^2}}\cdot\frac{1}{\sigma_\eta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma_\eta^2}}=p_\xi(x)\cdot p_\eta(y),\quad (\forall)\,x,y\in\mathbb{R},$$

deci ξ și η sînt independente.

Noțiunile anterioare se extind la vectori aleatori p–dimensionali gaussieni ($p\geq 2$).

§ 3. Aplicații

3.1. Modelul lui John von Neumann

Așa cum afirmă specialiștii, scopul principal al mecanicii cuantice îl constituie studiul obiectelor microscopice – molecule, atomi, particule elementare etc. și al proceselor ale căror caracteristici (de exemplu acțiunea) sînt comparabile cu constanta universală h a lui M. Planck (1858–1947); $h=1{,}054\cdot 10^{-27}$ erg.s. Mărimile fizice ale căror valori pot fi măsurate experimental se numesc **observabile**. Deoarece prin organele noastre de simț entitățile microscopice nu pot fi măsurate direct, apelăm la dispozitive de măsură macroscopice, rezultatele oricăror măsurători fiind desigur variabile aleatoare.

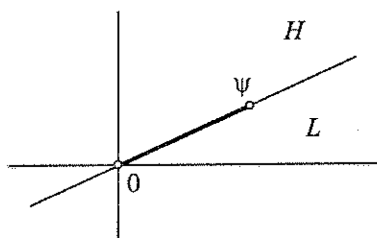


Figura VI.4.

Axiomatica lui John von Neumann (1903–1957), pe care o prezentăm în continuare, se referă în esență tocmai la legile de repartiție ale acestor variabile aleatoare.

Să considerăm un sistem mecano-cuantic Σ (de exemplu, electronul, atomul de hidrogen etc.). Se admite că **oricărui astfel de sistem i se asociază un spațiu Hilbert complex** $H=H(\Sigma)$ (**postulatul I**). Subspațiile 1–dimensionale ale lui H se numesc **stări** ale sistemului Σ; (v. fig. VI.4) a da o stare $L\subset H$ revine la a cunoaște un vector nenul $\psi\in H$ (zis **vector de stare**), care poate fi ales normat, adică $\|\psi\|=1$. ψ și $a\psi$ ($a\neq 0$) definesc aceeași

stare. Dacă $\psi_1, ..., \psi_n$ sînt vectori de stare, atunci orice combinație liniară a lor $\sum_{i=1}^{n} a_i\psi_i$ $(a_i \in \mathbb{C})$ descrie suprapunerea acelor stări.

Un alt postulat de bază al mecanicii cuantice afirmă că **un sistem aflat în starea** $\psi \in H \setminus \{0\}$ (de fapt starea este subspațiul generat de ψ), **trece direct în starea** $\chi \in H$ **cu o probabilitate egală cu** $\cos^2(\widehat{\psi, \chi})$ (**postulatul II**).

Dacă φ şi χ au norma egală cu 1, această probabilitate este deci egală cu $|<\psi, \chi>|^2$; produsul scalar $<\psi, \chi>$ se numeşte **amplitudinea probabilității** de trecere directă de la ψ la χ.

Fizicianul englez P. Dirac (1902–1984) a introdus un formalism numit "bracket", notînd produsul scalar $<\psi, \chi>$ într-un mod diferit, anume $<\chi \mid \psi>$, presupus liniar în χ şi antiliniar în ψ [o aplicație $f: H \to \mathbb{C}$ se zice $\mathbb{C}$–antiliniară dacă $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ şi $f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$].

Aşadar, trecerea la starea următoare se notează de la dreapta la stînga. Dirac a numit simbolul $|\psi>$ **vector-ket** şi prin convenție, acesta este identificat cu vectorul $\psi \in H$; iar simbolul $<\chi|$ este numit **vector-bra**, fiind identificat cu funcționala antiliniară $f: H \to \mathbb{C}$, $f(\psi) = <\chi \mid \psi>$. Uneori $<\chi \mid \psi> = f(\psi)$ se numeşte **valoarea** lui χ pe vectorul ψ.

Dacă $\chi \perp \psi$ adică $<\chi \mid \psi> = 0$, atunci sistemul **nu** poate trece direct de la starea ψ la starea χ (probabilitatea de trecere fiind nulă). Dacă spațiul Hilbert $H = H(\Sigma)$ admite o bază ortonormală finită sau numărabilă $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$, elementele acestei baze se mai numesc **stările de bază** ale sistemului Σ. Dacă ψ este o stare a lui Σ (cu $\|\psi\| = 1$) şi scriem $\psi = \sum_{n\geq 0} c_n e_n$, cu c_n presupuşi reali şi pozitivi, atunci evident $c_n = <\psi, e_n> = <e_n \mid \psi>$ deci c_n^2 reprezintă probabilitatea de trecere de la ψ la e_n. Astfel de probabilități pot fi măsurate experimental.

Pentru caracterizarea stărilor concrete se foloseşte posibilitatea de a determina pe aceste stări ("a măsura") valorile - exprimate prin numere reale - ale anumitor mărimi fizice ca energia, spinul, coordonata, impulsul etc. care sînt exemple de observabile.

Al treilea postulat al mecanicii cuantice afirmă că oricărei mărimi fizice scalare (adică oricărei observabile) avînd valorile măsurabile pe stările sistemului Σ i se asociază în mod bijectiv un operator autoadjunct $f: H \to H$ astfel încît spectrul $\sigma(f)$ să fie mulțimea tuturor valorilor obținute prin măsurarea observabilei respective. În plus, dacă $\psi \in H$ este un vector propriu al lui f cu valoarea proprie λ, atunci prin măsurarea observabilei considerate (identificate cu f) pe starea ψ se obține aproape sigur (cu probabilitatea 1) valoarea λ. De asemenea, se presupune că măsurînd mărimea f în starea ψ

(cu $\|\psi\| = 1$), se obţine o valoare proprie $\lambda \in \sigma(f)$, cu o probabilitate egală cu pătratul normei proiecţiei ortogonale a lui ψ pe subspaţiul propriu V_λ.

În practică este de datoria fizicianului să precizeze spaţiul $H(\Sigma)$ al stărilor pentru un sistem Σ concret, precum şi modul în care observabilelor li se asociază operatori autoadjuncţi ai lui $H(\Sigma)$.

Dacă $\dim_{\mathbb{C}} H < \infty$ şi $\sigma(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$, atunci $H = \bigoplus_{i=1}^{p} V_{\lambda_i}$ şi $V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j}$ pentru $i \neq j$ (conform teoremelor I.3.10, II.2.5), deci pentru orice $\psi \in H$, $\psi = \sum_{i=1}^{p} \psi_i$ (ψ_i fiind proiecţia lui ψ pe V_{λ_i}). Notînd $p_i : H \to H$, $\psi \to \psi_i$, $1 \leq i \leq p$, rezultă că $f(\psi) = f\left(\sum_{i=1}^{p} \psi_i\right) = \sum_{i=1}^{p} f(\psi_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \psi_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i p_i(\psi)$, pentru orice $\psi \in H$ deci $f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i p_i$ (această relaţie este uneori numită "teorema spectrală" şi se extinde şi la cazul infinit dimensional; vezi corolarul 2 al teoremei I.3.10).

Fie f o observabilă, $\sigma(f) = \{\lambda_i\}_i$ spectrul ei şi $H = \bigoplus_i V_{\lambda_i}$ descompunerea ortogonală corespunzătoare. Atunci în starea ψ (cu $\|\psi\| = 1$), f ia valoarea λ_i cu probabilitatea egală cu $<\psi, \psi_i> = \|\psi_i\|^2$, unde ψ_i este proiecţia ortogonală a lui ψ pe V_{λ_i}. Desigur, $\sum_i \|\psi_i\|^2 = 1$. Totodată este justificat de ce suma $\sum \lambda_i < \psi, \psi_i >$ este numită **media mărimii f, în starea ψ**. Notînd această medie cu $\hat{f}_\psi$, avem $\hat{f}_\psi = \sum_i \lambda_i < \psi, \psi_i > = \sum_i \lambda_i \|\psi_i\|^2$.

Pe de altă parte, conform teoremei spectrale, rezultă

$$\hat{f}_\psi = < \psi, \sum_i \lambda_i \psi_i > = < \psi, f(\psi) >.$$

În general, dacă f şi g sînt doi operatori autoadjuncţi ai unui spaţiu Hilbert H, compusul $f \circ g$ (numit şi produsul fg) nu este în general autoadjunct, deoarece $(f \circ g)^* = g^* \circ f^* = g \circ f \neq f \circ g$. Dacă însă f şi g comută între ei, atunci $f \circ g$ este autoadjunct; în particular, pentru orice operator autoadjunct $f : H \to H$, operatorii $f^2 = f \circ f$ şi $f - \alpha \cdot 1_H$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sînt autoadjuncţi.

Revenind la modelul lui John von Neumann, dacă f este observabilă (identificată cu un operator autoadjunct), atunci $(f - \hat{f}_\psi \cdot 1_H)^2$ este de asemenea o observabilă şi se poate considera media ei în starea ψ (cu $\|\psi\| = 1$).

Dispersia valorilor lui f în starea ψ este numărul real pozitiv

$$\widehat{\Delta f}_\psi = \sqrt{\widehat{\left((f - \hat{f}_\psi \cdot 1_H)^2\right)}_\psi}.$$

TEOREMA 3.1 (principiul de incertitudine al lui W. P. Heisenberg, 1901–1982). **Pentru orice observabile f, g şi pentru orice $\psi \in H$ cu**

$\|\psi\| = 1$, **are loc inegalitatea** $\widehat{\Delta f_\psi} \cdot \widehat{\Delta g_\psi} \geq \frac{1}{2}|< C(\psi), \psi >|$, **unde** $C = [f, g] = f \circ g - g \circ f$ **este comutatorul lui** f **și** g.

DEMONSTRAȚIE. Notăm $f_1 = f - \hat{f}_\psi \cdot 1_H$, $g_1 = g - \hat{g} \cdot 1_H$. Atunci

$$[f_1, g_1] = f_1 \circ g_1 - g_1 \circ f_1 = (f - \hat{f}_\psi \cdot 1_H) \circ (g - \hat{g}_\psi \cdot 1_H) -$$
$$-(g - \hat{g}_\psi \cdot 1_H) \circ (f - \hat{f}_\psi \cdot 1_H) = (f \circ g - \hat{g}_\psi \cdot f - \hat{f}_\psi \cdot g + \hat{f}_\psi \cdot \hat{g}_\psi) -$$
$$-(g \circ f - \hat{f}_\psi \circ g - \hat{g}_\psi \circ f + \hat{g}_\psi \circ \hat{f}_\psi) = f \circ g - g \circ f = [f, g].$$

Așadar, $C = [f_1, g_1]$ deci

$$<C(\psi), \psi> = <f_1(g_1(\psi)), \psi> - <g_1(f_1(\psi)), \psi> = <g_1(\psi), f_1(\psi)> - <f_1(\psi), g_1(\psi)> =$$
$$= < g_1(\psi), f_1(\psi) > - \overline{< g_1(\psi), f_1(\psi) >}.$$

Notînd $u = <g_1(\psi), f_1(\psi)>$, rezultă $< C(\psi), \psi > = u - \bar{u} = 2i\operatorname{Im} u$ deci

$$|<C(\psi), \psi>| = |2i\, Im\, u| = 2\, |Im\, u| \leq 2\, |u| =$$
$$= 2\, |<g_1(\psi), f_1(\psi)>| \leq 2\|g_1(\psi)\| \cdot \|f_1(\psi)\|,$$

conform inegalității lui Schwartz. În fine, să observăm că

$$\|f_1(\psi)\| = \sqrt{< f_1(\psi), f_1(\psi) >} = \sqrt{< f_1^2(\psi), \psi >} = \sqrt{(f_1^2)_{\hat{\psi}}} = \widehat{\Delta f_\psi} \text{ și la fel}$$

$$\|g_1(\psi)\| = \widehat{\Delta g_\psi}. \text{ Așadar, } |< C(\psi), \psi >| \leq 2\widehat{\Delta f_\psi} \cdot \widehat{\Delta g_\psi}.$$

Două observabile f, g care nu comută între ele se zic **nemăsurabile simultan**. Ele se numesc **canonic conjugate** dacă $[f, g] = ih1_H$ (h fiind constanta lui Planck); în acest caz,

$$<C(\psi), \psi> = <ih1_H(\psi), \psi> = <ih\psi, \psi> = -\,ih<\psi, \psi> = -\,ih\|\psi\|^2 = -\,ih$$

și inegalitatea lui Heinsenberg devine

$$\widehat{\Delta f_\psi} \cdot \widehat{\Delta g_\psi} \geq \frac{h}{2}.,$$

oricare ar fi starea ψ. În cazul cînd $n = \dim_C H < \infty$, nu există observabile canonic conjugate [deoarece altminteri ar rezulta că există matrice $F, G \in M_n(C)$ astfel încît $FG - GF = ihI_n$. Atunci $\operatorname{Tr}(FG - GF) = \operatorname{Tr}(ihI_n) = nih$, adică $nih = 0$, deci $n = 0$ și se ajunge la o contradicție]. În cazul infinit dimensional, există observabile canonic conjugate. [De exemplu, dacă H = spațiul funcțiilor derivabile $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de pătrat integrabil, luăm f = operatorul de înmulțire cu x și $g = \frac{h}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ (numită și obervabila-impuls); atunci

$$[f, g](v) = f(g(v)) - g(f(v)) = f\left(\frac{h}{i}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) - g(xv) =$$

$$= \frac{h}{i}x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{h}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xv) = -\frac{h}{i}v = ih1_H(v),$$

pentru orice $v \in H$ deci $[f, g] = ih \cdot 1_H$].

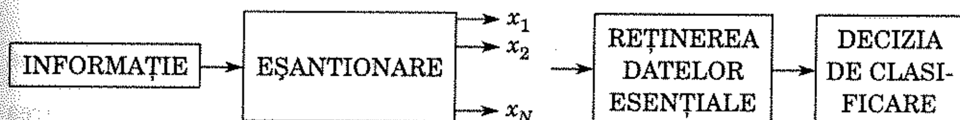
Cea mai importantă mărime fizică observabilă este **energia**, avînd ca operator autoadjunct asociat un operator $\mathscr{H}$ numit **hamiltonianul** sistemului Σ.

Spectrul $\sigma(\mathscr{H})$ se numeşte **spectrul energetic** al sistemului Σ. Un **al patrulea postulat** arată legea de evoluţie în timp a stărilor sistemului cu ajutorul hamiltonianului. Anume, să presupunem că la momentul $t = 0$ sistemul Σ se află în starea ψ şi că este izolat (în particular asupra lui Σ nu se fac măsurători); atunci la momentul t sistemul se va afla în starea $\psi(t) = e^{-\frac{i}{h}t\mathscr{H}}(\psi)$ (unde $e^{-\frac{i}{h}t\mathscr{H}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{i}{h}\mathscr{H}\right)^n \cdot \frac{t^n}{n!}$ este un operator al spaţiului H); se observă că funcţia $\psi(t)$ verifică relaţia $ih\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \mathscr{H}(\psi(t))$ (**ecuaţia lui E. Schrödinger**, 1887–1961).

Trebuie subliniat că actul oricărei măsurători conduce la modificarea ecuaţiei lui Schrödinger, deoarece perturbarea sistemului Σ prin măsurare **nu** poate fi neglijată. Menţionăm de asemenea că dacă f este o observabilă şi notăm cu $m(t) = \hat{f}_{\psi(t)}$ media valorilor lui f în starea de la momentul t a sistemului Σ, atunci un calcul uşor arată că $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(t) = \frac{i}{h}[\mathscr{H}, f]$; în particular, rezultă că $m(t)$ nu depinde de timp (deci media m este conservată în timp) dacă şi numai dacă f comută cu $\mathscr{H}$, adică f şi $\mathscr{H}$ sînt măsurabile simultan.

3.2. Algoritmul Karhunen–Loéve pentru comprimarea datelor

Una din schemele cele mai mult utilizate de prelucrare a informaţiei, legată de clasificarea datelor şi recunoaşterea diverselor configuraţii, este următoarea:



O informaţie poate fi reprezentată printr-un semnal purtător $x(t)$ care poate fi aproximat printr-un set de eşantioane $x_1, \ldots, x_N$ (cu $N \gg 1$) luate la N momente de timp $t_1, \ldots, t_N$. Adeseori informaţia este redundantă, prea bogată şi se pune problema comprimării datelor fără pierdere de conţinut al informaţiei. Algoritmul Karhunen-Loéve dă o procedură de selecţie a $M \ll N$ eşantioane, cu minimizarea pierderii de energie informaţională. În esenţă această metodă este o adaptare a metodei celor mai mici pătrate. De altfel aceasta din urmă este un exemplu tipic de tehnică folosind produsele scalare.

Fie deci un set $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ de N numere reale, asimilat cu un vector-coloană N-dimensional X. În practică, cel mai adesea $x_1, \ldots, x_N$ sînt variabile aleatoare relativ la un acelaşi cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathscr{K}, P)$.

Să efectuăm o transformare liniară ortogonală $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, deocamdată nedeterminată. Dintre componentele vectorului $y = T(x)$ vom reţine după criteriul abaterii medii pătratice, un număr sensibil mai mic $M \ll N$, aşa cum vom vedea ulterior (M fiind de asemenea deocamdată necunoscut). În scrierea

matricială, notînd tot cu T matricea asociată transformării în baza canonică a lui $\mathbb{R}^N$, avem

$$(1)\ T = (t_{ij})_{1\le i,j\le N} \text{ şi transpusa } T^T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{N1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{1N} & \cdots & t_{NN} \end{pmatrix} = (T_1| \cdots | T_N).$$

Deoarece T este ortogonală avem $<T_i, T_j> = \delta_{ij}$ pentru orice $1 \le i, j \le N$ deci vectorii $T_1, ..., T_N$ sînt versori N–dimensionali. Din relația $Y = T \cdot X$ rezultă $X = T^{-1} \cdot Y = T^T \cdot Y = (T_1| \cdots | T_N) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$ ca matrice $N \times 1$. Vom reține din componentele lui Y primele M, cu $M \ll N$ nedeterminat şi înlocuim ultimele $N - M$ componente:

$$X = X_{\text{corect}} = y_1T_1 + ... + y_MT_M + y_{M+1}T_{M+1} + ... + y_NT_N;$$
$$X^* = X_{\text{aproximat}} = y_1T_1 + ... + y_MT_M + c_{M+1}T_{M+1} + ... + c_NT_N,$$

cu c_i, $M + 1 \le i \le N$, numere reale nedeterminate. Vom determina mai întîi $c_{M+1}, ..., c_N$ cu condiția ca $X - X^*$ să aibă minimă norma euclidiană (adică abaterea pătratică); reamintim că $(\forall)\, x \in \mathbb{R}^p$, $\|x\|^2 = <x, x> = x_1^2 + ... + x_p^2$.

Atunci va fi legitimă aproximarea $X \simeq X^*$.

Avem evident $X - X^* = \sum\limits_{i=M+1}^{N}(y_i - c_i)T_i$ deci

$$\left\|X - X^*\right\|^2 = <X - X^*, X - X^*> = <\sum_{i=M+1}^{N}(y_i - c_i)T_i, \sum_{j=M+1}^{N}(y_j - c_j)T_j> =$$
$$= \sum_{i,j}(y_i - c_i)(y_j - c_j) <T_i, T_j> = \sum_{i,j}(y_i - c_i)(y_j - c_j)d_{ij} = \sum_{i=M+1}^{N}(y_i - c_i)^2.$$

Coeficienții $c_{M+1}, ..., c_N$ optimali vor fi obținuți punînd condiția ca valoarea medie a acestei abateri pătratice să fie minimă. Pentru o variabilă aleatoare z notăm $\bar{z} = Mz$, media lui z. Atunci notăm

$$(2)\qquad \mu(c_{M+1}, ..., c_N) = M\left(\sum_{i=M+1}^{N}(y_i - c_i)^2\right)$$

deci $\mu(c_{M+1},...,c_N) = \sum\limits_{i=M+1}^{N}M(y_i - c_i)^2 = \sum\limits_{i=M+1}^{N}M(y_i^2 - 2c_iy_i + c_i^2) =$

$$= \sum_{i=M+1}^{N}(My_i^2 - 2c_iMy_i + c_i^2).$$

Aşa cum am spus, coeficienții c_i optimali corespund minimizării lui $\mu(c_{M+1}, ..., c_N)$. Atunci în mod necesar, conform teoremei lui Fermat, $\dfrac{\partial\mu}{\partial c_i} = 0$, $M + 1 \le i \le N$. Deoarece $\dfrac{\partial\mu}{\partial c_i} = -2My_i + 2c_i$, rezultă

$$(3)\qquad c_i = My_i = \bar{y}_i,\ M + 1 \le i \le N.$$

Pe de altă parte, avem $X = \sum_{j=1}^{N} y_j T_j$ şi înmulţind scalar cu T_i, rezultă

$$< T_i, X > = < T_i, \sum_{j=1}^{N} y_j T_j > = \sum_{j=1}^{N} y_j < T_i, T_j > = \sum_{j=1}^{N} y_j \delta_{ij} = y_i$$

şi conform (3), $c_i = My_i = M <T_i, X> = <T_i, MX> = <T_i, \overline{X}>$. Aşadar, am dedus valorile optimale ale coeficienţilor c_i,

(4) $c_i = < T_i, \overline{X} >$, pentru $M + 1 \le i \le N$.

Calculăm valoarea minimă a funcţiei μ deci

$$\mu_{min} \overset{cf(2)}{=} M\left(\sum_{i=M+1}^{N} (y_i - c_i)^2 \right) = \sum_{i=M+1}^{N} M(y_i - c_i)^2 .$$

Dar $y_i - c_i \overset{cf.(4)}{=} < T_i, X > - < T_i, \overline{X} > = < T_i, X - \overline{X} > = T_i^T \cdot (X - \overline{X})$, deoarece pentru orice doi vectori N–dimensionali u, v avem $<u, v> = U^T \cdot V$ pentru matricile-coloană asociate. Apoi $y_i - c_i$ este un scalar deci o matrice 1×1 şi în consecinţă $(y_i - c_i)^2 = (y_i - c_i) \cdot (y_i - c_i)^T = T_i^T \cdot (X - \overline{X}) \cdot (X - \overline{X})^T \cdot T_i$, iar $M(y_i - c_i)^2 = T_i^T \cdot M\left((X - \overline{X}) \cdot (X - \overline{X})^T\right) T_i$. Reţinem deci că valoarea minimă a funcţiei $\mu(c_{M+1}, ..., c_N)$ este

(5) $$\mu = \sum_{i=M+1}^{N} T_i^T \cdot R_X \cdot T_i,$$

unde am notat $R_X = M\left((X - \overline{X})(X - \overline{X})^T\right)$, matrice $N \times N$ care este tocmai **matricea de covarianţă** a vectorului aleator X.

Determinăm acum matricea T optimală, dintre toate matricile $N \times N$ care satisfac condiţia de ortogonalitate $T^T \cdot T = I_N$. Aceasta revine în mod necesar la a determina vectorii $T_1, ..., T_N$ pentru care expresia $\mu = \sum_{i=M+1}^{N} T_i^t \cdot R_X \cdot T_i$ este minimă, cu legăturile $\|T_i\| = 1$, $M + 1 \le i \le N$, (există şi alte legături între aceşti vectori). Aplicăm metoda multiplicatorilor lui Lagrange şi considerăm funcţia

$$\Phi = \mu - \sum_{i=M+1}^{N} \lambda_i (\|T_i\|^2 - 1) \overset{cf.(5)}{=} \sum_{i=M+1}^{N} T_i^T \cdot R_X \cdot T_i - \sum_{i=M+1}^{N} \lambda_i (T_i^T \cdot T_i - 1) =$$

$$= \sum_{i=M+1}^{N} \left[T_i^T \cdot R_X \cdot T_i - \lambda_i (T_i^T \cdot T_i - 1) \right] = \sum_{i=M+1}^{N} \left[T_i^T (R_X - \lambda_i I_N) T_i + \lambda_i \right]$$

O condiţie necesară de extrem este ca $\mathrm{grad}_{T_i} \Phi = 0$ pentru $M + 1 \le i \le N$.

Sînt necesare cîteva pregătiri. Dacă $P = (u_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ este o matrice $m \times n$ şi $\varphi(P) = \varphi(u_{11}, ..., u_{1n}, u_{21}, ..., u_{m1}, ..., u_{mn})$ este o funcţie de clasă C^1, atunci se defineşte **gradientul lui φ în raport cu matricea** P ca fiind matricea $m \times n$

$$\mathrm{grad}_P\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_{ij}}\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}.$$

Iată cîteva proprietăți:

1) Dacă $m = n$ și V este un vector–coloană n–dimensional, atunci

$$\mathrm{grad}_P(V^T P^T P V) = 2P\cdot(V\cdot V^T).$$

Dacă U este un alt vector-coloană n–dimensional, atunci

$$\mathrm{grad}_P(V^T P^T V) = V\cdot U^T.$$

2) Fie R o matrice pătratică de ordin n, presupusă simetrică și U un vector-coloană n–dimensional; atunci

$$\mathrm{grad}_U(U^T R U) = 2RU \quad \text{și} \quad \mathrm{grad}_U(R^T R) = 2R.$$

Verificările necesare sînt imediate.

Aplicînd această ultimă proprietate în cazul cînd $U = T_i$ și $R = R_X - \lambda_i I_N$, rezultă $\mathrm{grad}_{T_i}\Phi = 2(R_X - \lambda_i I_N)T_i$ și condiția necesară de extrem este $2(R_X - \lambda_i I_N)T_i = 0$, adică $R_X\cdot T_i = \lambda_i T_i$. Aceasta înseamnă că T_i sînt versori proprii pentru matricea R_X, cu valorile proprii corespunzătoare λ_i, $M+1 \le i \le N$.

Conform expresiei (5) rezultă

$$\mu_{min} = \sum_{i=M+1}^{N} T_i^T R_X T_i = \sum_{i=M+1}^{N} T_i^T \lambda_i T_i = \sum_{i=M+1}^{N} \lambda_i \|T_i\| = \lambda_{M+1} + \ldots + \lambda_N.$$

De aici rezultă un criteriu de alegere a lui M, anume suma $\lambda_{M+1} + \ldots + \lambda_N$ să fie minimă.

Din cele spuse mai sus se obține următorul **algoritm de comprimare a datelor**:

Etapa I. Este dat un vector-coloană N–dimensional aleator X (setul inițial de date) și se calculează matricea $N\times N$ de covarianță

$$R_X = M(X-\overline{X})(X-\overline{X})^T, \text{ unde } \overline{X} = MX.$$

Etapa a II–a. Se calculează valorile proprii λ_i și versorii proprii T_i ai matricei R_X, $1 \le i \le N$. Deoarece R_X este simetrică și pozitivă, rezultă că λ_i sînt reale și pozitive. Ordonăm descrescător valorile proprii $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_N \ge 0$.

Etapa a III–a. Alegem $M \ll N$ astfel încît suma $\lambda_{M+1} + \ldots + \lambda_N$ să fie "suficient de mică" (ceea ce asigură apropierea de minim a lui μ). Așadar se rețin primele M valori proprii cele mai mari $\lambda_1, \ldots, \lambda_M$. Se elimină valorile y_i, $M+1 \le i \le N$ (de altfel acestea pot fi înlocuite cu constantele c_i, iar $c_i = \langle T_i, \overline{X}\rangle$; de exemplu dacă X este prelucrat astfel încît $\overline{X} = 0$ rezultă $c_i = 0$ pentru $i = M+1, \ldots, N$).

Etapa a IV–a. În locul setului de N date $x_1, \ldots, x_N$ se reține setul de M date $y_1, \ldots, y_M$, unde $y_i = \langle X, T_i\rangle$, $1 \le i \le M$. Deoarece $Y = T\cdot X$, rezultă matricea de covarianță pentru Y va fi $R_Y = TR_XT^{-1} = TR_XT^T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$; în particular, variabilele $y_1, \ldots, y_N$ sînt necorelate două cîte două și dispersiile sînt $Dy_i = \lambda_i$, $1 \le i \le N$.

OBSERVAŢIE. O electrocardiogramă măsoară activitatea electrică a inimii. Semnalul electric este generat în cursul ciclului cardiac prin depolarizarea şi repolarizarea celulelor muşchiului inimii în timpul procesului de contracţie şi relaxare a lor. Graficul semnalului este de forma indicată în fig. VI.5.

Figura VI.5.

Prin eşantionare convenabilă el este reprezentat printr-un set de N date $x = (x_1, ..., x_N)$, ca mai sus. Apoi se poate realiza compresia la $M \ll N$ date. Presupunem că există p tipuri de electrocardiograme, indicînd tot atîtea clase de stări de sănătate $C_1,..., C_p$. Acestea pot fi reprezentate prin vectori M–dimensionali $u_1, ..., u_p$ respectiv. Dacă se efectuează o nouă electrocardiogramă reprezentată printr-un vector M–dimensional u, atunci în funcţie de apropierea lui u de vreunul din vectorii $u_1, ..., u_p$ se decide clasa de sănătate a bolnavului corespunzător lui u (fig. VI.6). Astfel dacă $\|u - u_k\| = \min_{1 \le i \le p} \|u - u_i\|$, $1 \le k \le p$ atunci $u \in C_k$. Din punct de vedere medical o astfel de clasificare poate părea grosieră, dar este un punct decisiv de plecare în aplicarea cu succes a calculatorului în diagnosticarea bolilor de inimă.

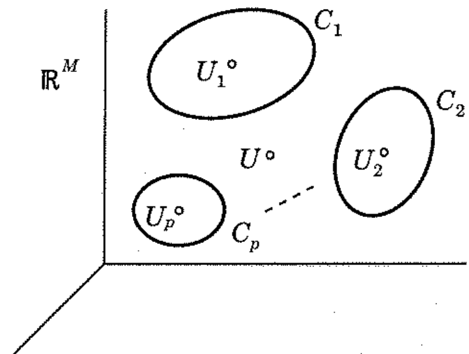


Figura VI.6.

Implementarea algoritmului Karhunen–Loéve necesită echipamente rapide de calcul, mai ales în aplicaţiile legate de prelucrarea semnalelor în timp real.

PARTEA A III-A

Capitolul VII FUNCÞII COMPLEXE

§ 1. Funcții olomorfe

1.1. Proprietăți algebrice și proprietăți topologice ale mulțimii numerelor complexe

Numerele sînt obiecte matematice cu care se fac anumite operații (adunare, înmulțire, etc.) și se află în anumite relații (relații de egalitate, de ordine etc.). Operațiile și relațiile au proprietăți bine stabilite de la început, nearbitrare ci supuse unui scop nemărturisit inițial, dar relevant pe măsură ce teoria se dezvoltă și se aplică. Notînd cu $\mathbb{R}$ mulțimea numerelor reale, reamintim că mulțimea numerelor complexe este:

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

Orice număr complex $z \in \mathbb{C}$ este deci o pereche ordonată de numere reale $z = (x, y)$ cu $x, y \in \mathbb{R}$. Pe mulțimea $\mathbb{C}$ se definesc două operații algebrice:

$$(\forall)\, z = (x, y),\, z' = (x', y') \in \mathbb{C},$$

$$z + z' \stackrel{\Delta}{=} (x + x', y + y');\;\; z \cdot z' \stackrel{\Delta}{=} (xx' - yy', xy' + x'y).$$

Notînd cu $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$ elementele neutre respective, se știe că $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ este un corp comutativ, numit **corpul numerelor complexe**.

Un rol special îl are numărul complex $i = (0, 1)$. Dacă $z = (x, y) \neq 0$, atunci $z^{-1} = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, -\dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$; așadar, $i^{-1} = (0, -1) = -i$. Numărul i a fost introdus de Euler ("...formulam $\sqrt{-1}$ littera i posterum designabo").

Dacă π este un plan și xOy este un reper ortogonal în π, atunci orice număr complex $z = (x, y)$ se identifică prin punctul de coordonate carteziene (x, y); în acest context, axa Ox se numește **axa reală,** Oy **axa imaginară,** iar π se mai numește **planul lui Gauss** al variabilei z (figura VII.1).

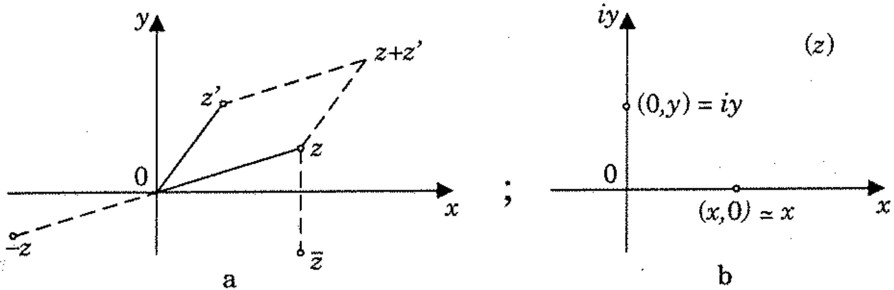


Figura VII.1

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ numărul complex $(x, 0)$ se va identifica prin numărul real x, iar $(0, x) = ix$. Aplicația $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \to (x, 0)$ este injectivă; fiind şi un morfism de corpuri, ea permite identificarea lui $\mathbb{R}$ cu un subcorp al lui $\mathbb{C}$. Deci $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ şi $\mathbb{C}$ constituie o extindere a lui $\mathbb{R}$. Evident $I^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ şi pentru orice $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, avem $z = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + yi$, obţinînd astfel scrierea uzuală numerelor complexe.

Pentru orice $z = x + iy \in \mathbb{C}$ se defineşte conjugatul $\bar{z} = x - iy$; aplicația $I : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to \bar{z}$ este o involuție (adică $I \circ I = 1_{\mathbb{C}}$, căci $\forall z \in \mathbb{C}, \bar{\bar{z}} = z$); deoarece $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$ pentru orice $z, z' \in \mathbb{C}$, rezultă că I este un izomorfism de corpuri; în plus dacă $z' \neq 0$, atunci $\overline{z / z'} = \bar{z} / \bar{z}'$.

Reamintim că pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, se definesc partea reală $\operatorname{Re} z = x$ şi partea imaginară $\operatorname{Im} z = y$ ale lui z; evident

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Atragem atenția că nu au sens inegalitățile între numere complexe, $\mathbb{C}$ nefiind un corp total ordonat [de exemplu, dacă $\mathbb{C}$ ar fi corp total ordonat şi am socoti că $i > 0$, ar rezulta $i^2 > 0$, adică $-1 > 0$; iar dacă $i < 0$, atunci $-i > 0$ şi din nou $i^2 > 0$, adică $-1 > 0$]. Se pot scrie inegalități doar între numere reale asociate numerelor complexe.

Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ se defineşte modulul său $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$; este deci evidențiată o funcție $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \to |z|$. Au loc proprietățile:

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|; \; |zz'| = |z| \cdot |z'|;$$

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|; \; |\operatorname{Im} z| \leq |z|, (\forall)\, z, z' \in \mathbb{C}.$$

Funcția $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(z, z') \to \langle z, z' \rangle = z \cdot \bar{z}'$, este un produs scalar pe $\mathbb{C}$ şi norma definită cu ajutorul acestui produs scalar este

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = |z|, \quad (\forall)\, z \in \mathbb{C},$$

deci coincide cu modulul. Pe mulțimea $\mathbb{C}$ putem defini atunci o distanță prin $d(z, z') = |z - z'|$, $(\forall)\, z, z' \in \mathbb{C}$, şi se ştie că $(\mathbb{C}, d)$ este un spațiu metric complet (deci un spațiu Hilbert).

Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ şi $r > 0$. Bila deschisă $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ se mai numeşte **discul deschis** centrat în z_0 de rază r, iar mulţimea $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ este **circumferinţa** de centru z_0 şi raza r (fig. VII.2). O mulţime $M \subset \mathbb{C}$ se zice **mărginită** dacă este conţinută într-un disc. Un şir de puncte $\{z_n\}_{n \geq 0}$ din $\mathbb{C}$ este convergent către un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ dacă $d(z_n, z_0) = |z_n - z_0|$ tinde către zero cînd $n \to \infty$.

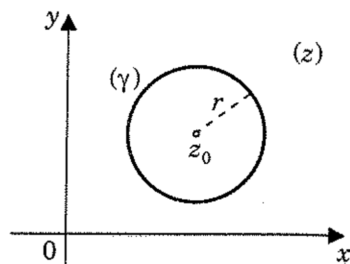


Figura VII.2.

Reamintim că o mulţime $A \subset \mathbb{C}$ este **deschisă** dacă $(\forall) z \in A$ $(\exists) r > 0$ astfel ca $B(z, r) \subset A$. Dacă $\mathbb{C} \setminus A$ este deschisă, se spune că A este **închisă**. O mulţime $K \subset \mathbb{C}$ este **compactă** dacă este închisă şi mărginită; aceasta este echivalent cu faptul că din orice şir de puncte din K se extrage un subşir convergent către un punct din K, ca şi cu faptul că din orice acoperire deschisă a lui K se poate extrage o subacoperire finită. O mulţime deschisă $D \subset \mathbb{C}$ este **conexă** dacă orice două puncte din D pot fi unite printr-o linie poligonală conţinută în D. Mulţimile deschise şi conexe se mai numesc **domenii**.

Reamintim următorul rezultat simplu, dar util:

PROPOZIŢIA 1.1. Şirul de numere complexe $\{z_n = x_n + iy_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent în $\mathbb{C}$ dacă şi numai dacă şirurile de numere reale $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sînt convergente în $\mathbb{R}$.

Demonstraţia este imediată, ţinînd cont că $z_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, $(\forall)\, n \geq 0$.

DEFINIŢIA 1.1. Spunem că şirul de numere complexe $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ are **limita infinită** dacă $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = +\infty$ în $\overline{\mathbb{R}}$. (De exemplu $\{(-2)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ are limita infinită).

Pentru multe scopuri (care vor apărea pe parcurs) este util să extindem mulţimea numerelor complexe prin introducerea unui singur **punct la infinit,** notat cu simbolul ∞. Relaţiile lui algebrice cu numerele complexe finite vor fi, prin definiţie, următoarele:

$$a + \infty = \infty + a = \infty,\ (\forall)\, a \in \mathbb{C};$$

$$b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty,\ (\forall)\, b \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\};$$

$$\frac{a}{0} = \infty,\ \ (\forall)\, a \in \mathbb{C}^* \text{ şi } \frac{b}{\infty} = 0,\ \ (\forall)\, b \in \mathbb{C}.$$

Vom punde de asemenea prin definiţie că $\infty \cdot \infty = \infty$; nu se definesc operaţiile $\infty + \infty$, $\infty - \infty$ şi $0 \cdot \infty$.

Aceste definiţii se justifică astfel: dacă $z_n \to a$, $a \in \mathbb{C}$ şi $w_n \to \infty$, atunci evident $z_n + w_n \to \infty$ (ceea ce a sugerat că $a + \infty = \infty$); la fel, dacă $z_n \to \infty$, $w_n \to \infty$, atunci $z_n \cdot w_n \to \infty$ (deci $\infty \cdot \infty = \infty$) etc.

În schimb dacă $z_n \to \infty$ şi $w_n \to \infty$, conform definiţiei 1.1 nu se poate spune nimic despre şirul $z_n + w_n$; la fel despre $z_n w_n$ în cazul cînd $z_n \to 0$, $w_n \to \infty$.

Pe mulţimea $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ vom introduce o topologie în care mulţimile deschise sînt reuniuni oarecare de discuri deschise

$$B(a, r) = B_r(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$$

sau de mulţimi de forma

$$\tilde{\mathbb{C}} \setminus \overline{B_r(0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r\} \cup \{\infty\}.$$

Evident $\mathbb{C} \subset \tilde{\mathbb{C}}$ este un subspaţiu topologic. $\tilde{\mathbb{C}}$ se numeşte **planul complex extins** cu punctul de la infinit (∞).

Are loc următorul rezultat:

TEOREMA 1.2. **$\tilde{\mathbb{C}}$ este un spaţiu topologic compact** (în sensul că din orice acoperire deschisă se poate extrage o acoperire finită).

DEMONSTRAŢIE. Fie $\tilde{\mathbb{C}} = \bigcup_{i \in I} D_i$, $D_i \subset \tilde{\mathbb{C}}$ deschişi. Atunci există $i_0 \in I$ astfel încît $\infty \in D_{i_0}$, deci $\exists\, r > 0$ astfel ca

$$\infty \in \tilde{\mathbb{C}} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le r\} \subset D_{i_0}.$$

Mulţimea $\overline{B_r(0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le r\}$, notată cu B, este un compact în $\mathbb{C}$ şi dacă notăm $G_i = D_i \cap B$, $(\forall)\, i \in I$, G_i sînt deschişi în topologia lui B (topologia indusă) şi formează o acoperire a sa, adică $B = \bigcup_{i \in I} G_i$. B fiind compact, există un număr finit de mulţimi $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_n}$ astfel încît $B = \bigcup_{i \in I}^{n} G_{i_k}$. Atunci avem:

$$\mathbb{C} = (\mathbb{C} \setminus B) \cup B \subset D_{i_0} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} D_{i_k} \right) = \bigcup_{k=0}^{n} D_{i_k} \subset \tilde{\mathbb{C}},$$

deci $\tilde{\mathbb{C}} = \bigcup_{k=0}^{n} D_{i_k}$, adică $\mathbb{C}$ este compact.

Spaţiul $\tilde{\mathbb{C}}$ se mai numeşte şi **compactificatul** planului complex.

OBSERVAŢII. 1) Conform definiţiei 1.1, şirul $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n \in \mathbb{C}$, are limită infinită dacă $(\forall)\, r > 0$ $(\exists)\, N_r \in \mathbb{N}$ astfel încît pentru orice $n \ge N_r$ să avem $|z_n| > r$, deci $z_n \in \tilde{\mathbb{C}} \setminus \overline{B_r(0)}$. Cum $\tilde{\mathbb{C}} \setminus \overline{B_r(0)}$ sînt vecinătăţi ale punctului ∞ în $\tilde{\mathbb{C}}$, rezultă că $z_n \to \infty$ în spaţiul $\tilde{\mathbb{C}}$, deci definiţia 1.1 este în concordanţă cu introducerea punctului la infinit.

2) Este de dorit să dăm un model geometric pentru planul complex extins, în care toate punctele acestuia să aibă o reprezentare concretă. Acest fapt îl vom realiza cu reprezentarea sferică a lui $\tilde{\mathbb{C}}$ obţinută cu ajutorul proiecţiei stereografice.

Considerăm sfera unitate S^2 din $\mathbb{R}^3$ (cu coordonatele X, Y, U) de ecuaţie $X^2 + Y^2 + U^2 = 1$; evident S^2 este compactă în $\mathbb{R}^3$, fiind închisă şi mărginită.

Fie P (respectiv P') polul nord (respectiv sud), de coordonate $(0, 0, 1)$ (respectiv $(0, 0, -1)$). Oricărui punct $M \in S^2$, $M \ne P$ îi asociem punctul $N = (PM) \cap \mathbb{C}$, unde $\mathbb{C}$ a fost identificat cu planul ecuatorial XOY (figura VII.3).

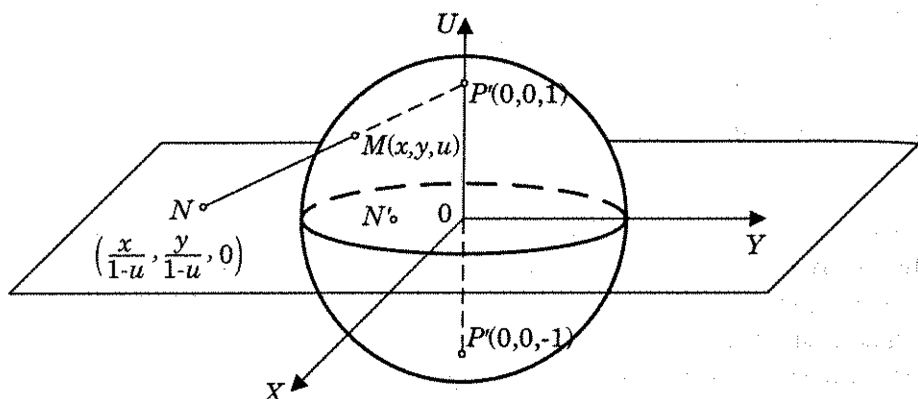


Figura VII.3.

Pentru calculul coordonatelor punctului N obținem sistemul de ecuații $\begin{cases} \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{U-1}{u-1} \\ U = 0 \end{cases}$, cu condiția $x^2 + y^2 + u^2 = 1$, deci $N\left(\frac{x}{1-u}, \frac{y}{1-u}, 0\right)$ aparține planului complex $\mathbb{C}$ și notăm $z = \frac{x}{1-u} + i\frac{y}{1-u}$.

Funcția $\varphi : S^2 \setminus \{P\} \to \mathbb{C}$, $\varphi(x, y, u) = z$, numită **proiecția stereografică** a sferei, este un homeomorfism între sfera S^2 fără polul nord P și planul complex $\mathbb{C}$. Într-adevăr, putem scrie:

$$z = \frac{x+iy}{1-u},\ |z|^2 = \frac{x^2+y^2}{(1-u)^2} = \frac{1+u}{1-u},$$

deci

$$(1) \qquad u = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1},\quad x = \frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2},\quad y = \frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)},$$

și funcția $\psi : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{P\}$, $\psi(z) = (x, y, u)$ cu x, y, u date de formulele (1), este inversa lui φ. Continuitatea funcțiilor φ și $\psi = \varphi^{-1}$ este evidentă, deci φ este un homeomorfism. Să remarcăm că emisfera $u > 0$ fără P corespunde prin φ exteriorului discului ($|z| > 1$), unde $z = X + iY = \frac{x+iy}{1-u}$, iar emisfera $u < 0$ corespunde interiorului discului ($|z| < 1$), cercul $u = 0$ ($|z| = 1$) rămînînd fix prin φ. Vom extinde pe φ astfel:

$$\varphi : S^2 \to \tilde{\mathbb{C}},\ \varphi(M) = \begin{cases} N & \text{dacă} \quad M \neq P \\ \infty & \text{dacă} \quad M = P, \end{cases}$$

și obținem un homeomorfism de la sfera S^2 la planul complex extins $\tilde{\mathbb{C}}$.

Rezultă că planul complex extins $\tilde{\mathbb{C}}$ poate fi identificat cu sfera S^2, care se mai numește și **sfera lui Riemann**. În această reprezentare geometrică a lui $\tilde{\mathbb{C}}$, punctul ∞ nu mai are rol privilegiat, fiind și el un punct pe sferă. Cu

această construcție, obținem o nouă demonstrație a faptului că $\tilde{\mathbb{C}}$ este compact.

3) Se putea face proiecția stereografică și din polul sud P' și se obținea, după încă o simetrie în raport cu axa Ox $(z' \to \bar{z}')$, punctul $\mathbb{N}' \in \mathbb{C}$ de coordonate $X = \frac{x}{1+u}$, $Y = \frac{-y}{1+u}$, $U = 0$, deci $z' = \frac{x - iy}{1+u}$. Avem: $z \cdot z' = \frac{x^2 + y^2}{1 - u^2} = 1$, deci $z' = \frac{1}{z}$ pentru $z \neq 0$ și $z \neq \infty$. În prima proiecție originea 0 $(z = 0)$ corespundea punctului P' și punctul ∞ lui P, iar în a doua proiecție originea corespundea lui P și punctul ∞ lui P'. Rezultă că putem extinde formula $z' = \frac{1}{z}$ și în cazurile $z = 0$, $z = \infty$ și obținem un homeomorfism,

$$\left(z \to \frac{1}{z} = z'\right) : \tilde{\mathbb{C}} \to \tilde{\mathbb{C}}.$$

De aici rezultă că putem înlocui $\lim\limits_{z \to \infty}$ cu $\lim\limits_{z' \to 0}$ și reciproc (homeomorfismul lui $\tilde{\mathbb{C}}$ cu S^2 justifică deci această înlocuire). Deci pentru studiul funcțiilor pe $\tilde{\mathbb{C}}$ în vecinătatea punctului ∞ (asimilat cu P) vom folosi variabila complexă $z' = \frac{1}{z}$, care se anulează în punctul ∞ (adică în P). Cele două funcții obținute cu ajutorul celor două proiecții stereografice reprezintă două hărți, care oferă sferei S^2 o structură de **varietate diferențiabilă** (vezi cap. 4, § 4). De fapt, hărțile respective oferă sferei S^2 chiar o structură de **varietate analitică**, dar nu ne vom ocupa de acest aspect în cele ce urmează.

1.2. Funcții olomorfe, condițiile Cauchy-Riemann

DEFINIȚIA 1.2. Se numește **funcție complexă** orice funcție $f : A \to \mathbb{C}$, unde $A \subset \mathbb{C}$ (deci o funcție cu valori complexe, de variabilă complexă).

Dacă notăm $w = f(z)$ cu $z \in A$ și $z = x + iy$, $w = u + iv$, unde $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, iar $f = P + iQ$ (adică $P = \operatorname{Re} f$, $Q = \operatorname{Im} f$), se pun în evidență două funcții reale $P, Q : A \to \mathbb{R}$, unde am considerat $A \subset \mathbb{R}^2$ ca o mulțime de perechi de numere reale. Atunci egalitatea $w = f(z)$ este echivalentă cu două egalități reale $u = P(x, y)$ și $v = Q(x, y)$ și funcția complexă $f : A \to \mathbb{C}$ este echivalentă cu o transformare punctuală $A \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (P(x, y), Q(x, y))$; figura VII.4.

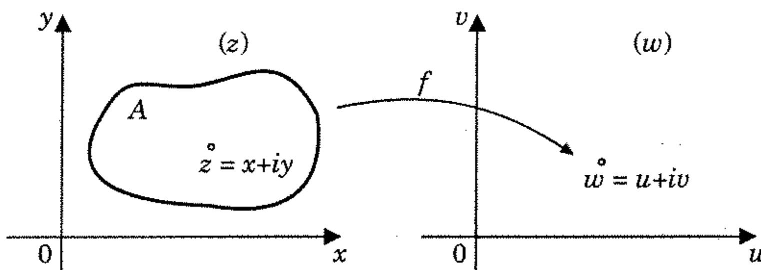


Figura VII.4.

Dacă A este o mulţime deschisă (cazul cel mai utilizat), este evident că funcţia complexă f este continuă într-un punct $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$ dacă şi numai dacă P şi Q sînt simulan continue în punctul (x_0, y_0).

EXEMPLE. 1) Fie funcţia complexă $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 + \bar{z}$; în acest caz, $u + iv = (x + iy)^2 + (x - iy)$ deci

$$u = x^2 - y^2 + x = P(x, y),\ v = 2xy - y = Q(x, y).$$

2) Fie deschisul $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ şi $w = \frac{1}{z}$; în acest caz, $u + iv = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$, deci $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$ şi $v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$.

DEFINIŢIA 1.3. Fie $f: A \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă, unde $A \subset \mathbb{C}$ este o mulţime deschisă. Funcţia f se numeşte **olomorfă într-un punct** $z_0 \in A$ (sau $\mathbb{C}$**–derivabilă** în z_0 sau **monogenă** în z_0) dacă există şi este finită (adică aparţine lui $\mathbb{C}$) limita

$$(2) \qquad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \neq z_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Limita (2) (dacă există) se notează cu $f'(z_0)$ şi se numeşte **derivata complexă** a lui f în z_0.

OBSERVAŢIE. Se constată analogia cu definiţia derivabilităţii funcţiilor reale. Dacă funcţia $f: A \to \mathbb{C}$ este olomorfă în $z_0 \in A$, atunci este evident că f este continuă în z_0 (se raţionează ca la demonstraţia faptului că o funcţie reală derivabilă într-un punct este continuă acolo). Conceptul de olomorfie este mai subtil decît cel de derivabilitate din cazul real, deoarece existenţa limitei (2) implică independenţa ei de direcţia de tindere a lui z către z_0 (ceea ce este mai restrictiv decît tinderea pe dreapta reală şi explică de ce funcţiile olomorfe au unele proprietăţi pe care nu le au funcţiile real derivabile).

DEFINIŢIA 1.4. Funcţia complexă $f: A \to \mathbb{C}$ se numeşte **olomorfă** pe deschisul A dacă ea este olomorfă în orice punct $z_0 \in A$.

Se arată simplu (ca în cazul derivabilităţii reale) că suma şi produsul a două funcţii olomorfe pe un deschis A sînt funcţii olomorfe pe A. Dacă notăm:

$$\mathcal{O}(A) = \{f: A \to \mathbb{C} \mid f \text{ olomorfă}\},$$

atunci $\mathcal{O}(A)$ este inel comutativ. Se arată, de asemenea simplu, că prin compunere a două funcţii olomorfe se obţine o funcţie olomorfă şi la fel este cîtul a două funcţii olomorfe, pe mulţimea pe care este definit.

Fie $w = f(z)$, $f: A \to \mathbb{C}$ definită pe un deschis $A \subset \mathbb{C}$ şi $z_0 \in A$, $z_0 = x_0 + iy_0$.

Dacă f este olomorfă în z_0, atunci $f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ (limita fiind independentă de direcţia de tindere a lui h spre zero în planul complex); În particular, pentru h real va rezulta că

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} = f'(z_0)$$

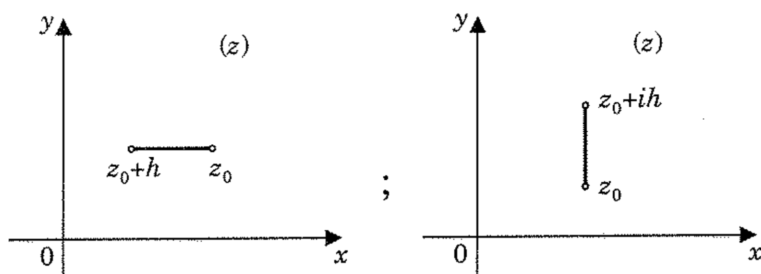


Figura VII.5.

şi ținînd cont că $f = P + iQ$, se obține

$$\lim_{h\to 0}\frac{P(x_0+h,y_0)-P(x_0,y_0)}{h}+i\cdot\lim_{h\to 0}\frac{Q(x_0+h,y_0)-Q(x_0,y_0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{P(x_0,y_0+h)-P(x_0,y_0)}{ih}+i\cdot\lim_{h\to 0}\frac{Q(x_0,y_0+h)-Q(x_0,y_0)}{ih}.$$

Dacă funcțiile P şi Q ar avea derivate parțiale în raport cu x şi y în punctul (x_0, y_0), atunci ar rezulta că

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{1}{i}\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)+\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0),$$

de unde am deduce relațiile celebre $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_0=\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_0$ şi $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_0=-\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_0$, numite **condițiile Cauchy-Riemann**. Teorema următoare precizează mai bine acest calcul şi dă caracterizarea proprietății de olomorfie.

TEOREMA 1.3. Fie $A\subset\mathbb{C}$ o mulțime deschisă. Funcția $f: A\to\mathbb{C}$, $f = P + iQ$, este olomorfă în $z_0\in A$ dacă şi numai dacă funcțiile $P, Q : A\to\mathbb{R}$ sînt diferențiabile în $z_0 = (x_0, y_0)$ şi derivatele lor parțiale în punctul (x_0, y_0) verifică condițiile Cauchy-Riemann

$$(3)\qquad \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0);\quad \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0).$$

În aceste condiții, derivata complexă $f'(z)$ verifică relațiile:

$$(4)\ f'(z_0)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(z_0)=\left(\frac{\partial Q}{\partial y}-i\frac{\partial P}{\partial y}\right)(z_0)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}-i\frac{\partial P}{\partial y}\right)(z_0)=\left(\frac{\partial Q}{\partial y}+i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(z_0).$$

DEMONSTRAȚIE. Presupunem că f este olomorfă în $z_0\in A$ şi fie $c = f'(z_0) = a + ib$. Definim

$$(4)\qquad \beta(z)=\begin{cases}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-c & \text{pentru } z\in A, z\neq z_0\\[2mm] 0 & \text{pentru}\quad z=z_0.\end{cases}$$

Avem evident $\lim\limits_{z\to z_0}\beta(z)=0$. Apoi definim

$$(5)\qquad \alpha(z)=\begin{cases}\beta(z)\dfrac{z-z_0}{|z-z_0|} & \text{pentru } z\in A, z\neq z_0\\ 0 & \text{pentru } \quad z=z_0.\end{cases}$$

Atunci $\lim\limits_{z\to z_0}|\alpha(z)|=\lim\limits_{z\to z_0}|\beta(z)|=0$, deci $\lim\limits_{z\to z_0}\alpha(z)=0$, Putem scrie

$$(6)\qquad f(z)-f(z_0)=c(z-z_0)+(z-z_0)\,\beta(z)=c(z-z_0)+\alpha(z)\,|z-z_0|.$$

Dar

$$f(z)=P(x,y)+iQ(x,y),\ c=a+ib \text{ şi } z-z_0=(x-x_0)+i(y-y_0)$$

deci

$$P(x,y)-P(x_0,y_0)+i(Q(x,y)-Q(x_0,y_0))=$$
$$=a(x-x_0)-b(y-y_0)+\operatorname{Re}\alpha(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}+$$
$$+i\left[b(x-x_0)+a(y-y_0)+\operatorname{Im}\alpha(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right].$$

Rezultă formulele

$$(7)\begin{cases}P(x,y)-P(x_0,y_0)=a(x-x_0)-b(y-y_0)+\operatorname{Re}\alpha(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\\ Q(x,y)-Q(x_0,y_0)=b(x-x_0)+a(y-y_0)+\operatorname{Im}\alpha(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\end{cases}$$

unde

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\operatorname{Re}\alpha(x,y)=0,\qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\operatorname{Im}\alpha(x,y)=0,$$

deci funcțiile P şi Q sînt diferențiabile în $z_0=(x_0,y_0)$ şi atunci

$$a=\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0), b=-\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0),$$

adică am obținut condițiile Cauchy-Riemann (3).

Reciproc, dacă P şi Q sînt diferențiabile în $z_0=(x_0,y_0)$ şi au loc condițiile Cauchy-Riemann (3), atunci avem

$$(8)\begin{cases}P(x,y)-P(x_0,y_0)=\dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+\\ \qquad +\alpha_1(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2};\\ Q(x,y)-Q(x_0,y_0)=\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+\\ \qquad +\alpha_2(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},\end{cases}$$

unde $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\alpha_1(x,y)=0,\quad \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\alpha_2(x,y)=0.$

Notând $a=\dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0),\quad b=-\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)$ şi $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$, obținem din relațiile (8) relațiile (7), iar acestea sînt echivalente cu (6) dacă notăm $c=a+ib$. Din (6) obținem (4), adică

$\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-c=\beta(z-z_0)$, pentru $z\neq z_0$, şi atunci $\lim\limits_{z\to z_0}\left(\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right)=c\in\mathbb{C}$,

deci f este olomorfă în $z_0\in\mathbb{C}$.

În plus, avem:

$$f'(z_0) = c = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(z_0) = \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - i\frac{\partial P}{\partial y}\right)(z_0) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y}\right)(z_0) = \left(\frac{\partial Q}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(z_0).$$

În cazuri concrete diferențiabilitatea funcțiilor P și Q este mai greu de verificat și de aceea dăm următorul **criteriu de olomorfie:**

COROLARUL 1. Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și $f : A \to \mathbb{C}, f = P + iQ$. Dacă $P, Q \in C^1(A)$ și dacă în orice punct $z \in A$ au loc condițiile Cauchy-Riemann

$$(\text{C} - \text{R}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases},$$

atunci funcția f este olomorfă pe A.

DEMONSTRAȚIE. Se știe de la analiză că dacă $P, Q \in C^1(A)$, atunci P, Q sînt diferențiabile în orice punct $z_0 \in A$. Avînd loc și condițiile (C – R) în orice punct $z_0 \in A$ afirmația rezultă din teorema 1.3.

Este utilă aici o scurtă notă istorică. A. Cauchy a descoperit condițiile (C – R) din cercetări ale sale privind integralele duble reale și și–a dat seama de importanța acestor ecuații arătînd că ele conțin esența teoriei de trecere de la real la complex (și invers) în studiul funcțiilor. B. Riemann a descoperit aceleași relații pornind de la alte cercetări, în domeniul ecuațiilor cu derivate parțiale, el căutînd să caracterizeze $\mathbb{C}$–derivabilitatea (deci obținînd teorema anterioară). Este interesant că D'Alembert și Euler obținuseră anterior aceleași relații din cercetări în domeniul mecanicii fluidelor, dar fără să le circumscrie rolul lor deosebit. Adevărul științific unic provine adeseori din surse diferite.

Fie $f : A \to \mathbb{C}$, A deschisă în $\mathbb{C}$, $f = P + iQ$ și $P, Q \in C^1(A)$. Deoarece P, Q au derivate parțiale în raport cu x și y, rezultă că și f are derivate parțiale în raport cu x și y (ca sumă de două funcții și nu are importanță faptul că f are valori complexe); avem

$$(9) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

DEFINIȚIA 1.5. Notăm

$$(10) \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Numărul $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)$ se numește **derivata areolară** a lui f în punctul $z_0 \in A$; această noțiunea a fost introdusă în 1912 de matematicianul român Dimitrie Pompeiu (1873–1954). Derivata areolară a fost intensiv studiată de mulți matematicieni români și străini.

COROLARUL 2. Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și $f : A \to \mathbb{C}, f = P + iQ$. Dacă $P, Q \in C^1(A)$ și $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ pe A, atunci funcția f este olomorfă pe A.

DEMONSTRAȚIE. Vom arăta că relația $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ pe A este echivalentă cu condițiile (C – R) și apoi aplicăm corolarul 1. Într-adevăr,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$

deci

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{și} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

OBSERVAȚIE. Dacă $f : A \to \mathbb{C}$ este olomorfă pe deschisul A, atunci avem:

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}$$

și

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} - i\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = f'(z),$$

adică $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z)$, $(\forall)\, z \in A$.

EXEMPLE. 1) Funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$, este olomorfă pe $\mathbb{C}$. Într-adevăr, $(\forall)\, z_0 \in \mathbb{C}$, avem: $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim\limits_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0 \in \mathbb{C}$, și $f'(z) = 2z$, $(\forall)\, z \in \mathbb{C}$.

2) Analog, funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, este olomorfă pe $\mathbb{C}$ deoarece

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = nz_0^{n-1}, \quad (\forall)\, z_0 \in \mathbb{C},$$

deci $f'(z) = nz^{n-1}$, $(\forall)\, z \in \mathbb{C}$. Atunci rezultă că funcțiile polinominale sînt olomorfe pe $\mathbb{C}$ (ca sume de funcții olomorfe). De asemenea funcțiile raționale sînt olomorfe pe domeniul lor de definiție; într–adevăr, dacă $f = \dfrac{P}{Q}$ cu P, Q polinoame, atunci f este olomorfă pe deschisul $C \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0\}$.

3) Funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$, nu este olomorfă în nici un punct din $\mathbb{C}$.
Într-adevăr, $P(x, y) = x$, $Q(x, y) = -y$ și nu sînt îndeplinite condițiile (C – R):

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial y} = -1.$$

4) Funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = |z|$, nu este olomorfă în nici un punct din $\mathbb{C}$.
Într-adevăr, $P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = 0$ și

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

pentru $z \neq 0$. Condițiile Cauchy-Riemann implică $x = y = 0$, deci $z = 0$. Dar în punctul $z = 0$ funcția P nu are derivate parțiale, deci conform teoremei 1.3 nu poate fi olomorfă în acest punct (nu este diferențiabilă în $z = 0$).

Reamintim că o funcție $u(x, y)$, $u : A \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 pe deschisul A se numește **armonică** dacă $(\forall)\, a \in A$, avem $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(a) = 0$, adică $\Delta u = 0$ în fiecare punct al lui A.

COROLARUL 3. Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și $f : A \to \mathbb{C}$, $f = P + iQ$ cu $P, Q \in C^2(A)$. Dacă f este olomorfă pe A, atunci funcțiile P, Q sînt funcții armonice pe A.

DEMONSTRAȚIE. În orice punct din A avem

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) \overset{\text{C-R}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = 0,$$

conform teoremei lui Schwartz. Deci $\Delta P = 0$ pe A. Calculul este similar pentru Q.

Se pune întrebarea dacă invers, dîndu-se funcția $P : A \to \mathbb{R}$, A deschis în $\mathbb{R}^2$ și P armonică pe A, există o funcție olomorfă $f : A \to \mathbb{C}$ astfel încît $f = P + iQ$ (adică $P = \operatorname{Re} f$)? Răspunsul la această problemă depinde de mulțimea A; anume vom indica un caz important în care răspunsul este afirmativ – cazul domeniilor simplu conexe. Sînt necesare unele precizări.

Reamintim că un spațiu metric X este **conex** dacă pentru orice submulțime $A \subset X$ nevidă, deschisă și închisă simultan, rezultă $A = X$. Vom folosi mai tîrziu următoarea:

LEMĂ. Dacă X este un spațiu metric conex și dacă $f : X \to \mathbb{C}$ este o funcție local constantă (deci constantă în vecinătatea fiecărui punct), atunci f este constantă.

Într-adevăr, $(\forall)\, a \in X$, mulțimea $A = \{x \in X \mid f(x) = f(a)\}$ este nevidă (căci $a \in X$), este deschisă (căci f este local constantă) și închisă (căci f este continuă) deci $A = X$.

Se poate arăta că un deschis $D \subset \mathbb{C}$ este conex (deci un domeniu) dacă și numai dacă pentru orice două puncte $z_1, z_2 \in D$, există un drum $\gamma : [a, b] \to D$ astfel ca $\gamma(a) = z_1$ și $\gamma(b) = z_2$. Orice disc deschis $B(z_0, r)$, $r > 0$, orice semiplan $\{\operatorname{Re} z > a\}$, $a \in \mathbb{R}$ ca și coroana $K(z_0; r, \mathbb{R}) = \{r < |z - z_0| < R\}$, unde $0 \leq r < R \leq \infty$, sînt domenii. Un domeniu D se numește **simplu conex** dacă frontiera $\operatorname{Fr} D$ este conexă. Se poate arăta că aceasta este echivalent cu faptul că orice curbă închisă cu suportul în D se poate deforma continuu către un punct. Coroana $K(z_0 : r, R)$ nu este un domeniu simplu conex.

TEOREMA 1.4. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu conex. Dacă funcția $P : D \to \mathbb{R}$ este armonică pe D, atunci există funcția $Q : D \to \mathbb{R}$, armonică pe D astfel încît funcția $f : D \to \mathbb{C}$, $f = P + iQ$ să fie olomorfă pe D.

DEMONSTRAȚIE. Dacă ar exista funcția Q armonică pe D astfel încît $f = P + iQ$ să fie olomorfă pe D, atunci Q ar verifica relațiile (C – R):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} \text{ și } \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}, \text{ deci } \quad dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy = -\frac{\partial P}{\partial y}dx + \frac{\partial P}{\partial x}dy.$$

Avînd această observație în minte, vom considera forma diferențială pe D:

$$(11) \qquad \omega = -\frac{\partial P}{\partial y}dx + \frac{\partial P}{\partial x}dy = P_1 dx + Q_1 dy.$$

Avem: $\dfrac{\partial P_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial Q_1}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}$, deci $\dfrac{\partial P_1}{\partial y} = \dfrac{\partial Q_1}{\partial x}$ deoarece $-\dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ (P fiind armonică pe D). Așadar forma ω din (11) este închisă, deci ω este exactă fiindcă D este simplu conex. Atunci există funcția Q pe D, $Q \in C^2(D)$, astfel încît $\omega = \dfrac{\partial Q}{\partial x}dx + \dfrac{\partial Q}{\partial y}dy = dQ$. Rezultă relațiile:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x},$$

adică tocmai condițiile Cauchy–Riemann. Aplicînd corolarul 1, rezultă că $f = P + iQ$ este olomorfă pe D.

OBSERVAȚII. 1) Din relația $\omega = dQ$ funcția Q rezultă unică pînă la adăugarea unei constante reale, deci f este unică pînă la adăugarea unei constante pur imaginare.

2) În mod analog rezultă că o funcție olomorfă este determinată de partea sa imaginară unic, pînă la adăugarea unei constante reale.

DEFINIȚIA 1.6. Funcțiile P și Q pentru care funcția $f = P + iQ$ este olomorfă pe D se numesc funcții **armonice conjugate** pe D.

APLICAȚIE în teoria cîmpurilor

Fie $\vec{v}$ un cîmp vectorial de clasă C^2 într-un cilindru $D \times \mathbb{R}$, cu $D \subset \mathbb{R}^2$ domeniu simplu conex. Presupunem că $\vec{v}$ este staționar (independent de timp) și plan paralel (paralel cu planul Oxy). Așadar, $\vec{v}$ asociază oricărui punct $(x, y) \in D$ un vector de forma

$$\vec{v}(x, y) = v_1(x, y)\vec{i} + v_2(x, y)\vec{j}, \text{ cu } v_1, v_2 \in C^2(D); \text{ figura VII.6.}$$

Presupunem că $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ și $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ (adică $\vec{v}$ nu are surse și nici vîrtejuri, deci este un cîmp armonic). Așadar, $\dfrac{\partial v_1}{\partial x} = -\dfrac{\partial v_2}{\partial y}$ și $\dfrac{\partial v_2}{\partial x} = \dfrac{\partial v_1}{\partial y}$, în orice punct $(x, y) \in D$.

Forma diferențială $v_1 dx + v_2 dy$ fiind închisă (deoarece $\dfrac{\partial v_1}{\partial y} = \dfrac{\partial v_2}{\partial x}$ în D), rezul-

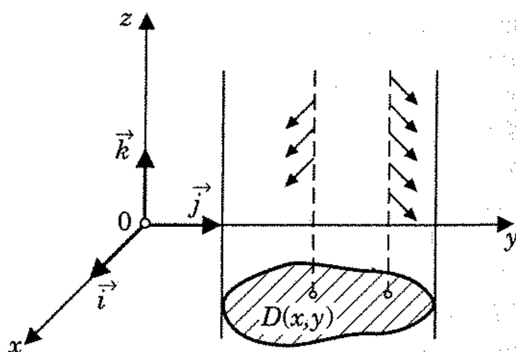


Figura VII.6.

tă că ea este exactă; ca atare, există o funcţie $P \in C^2(D)$, unică pînă la o constantă aditivă, astfel încît $dP = v_1 dx + v_2 dy$, adică $\frac{\partial P}{\partial x} = v_1$, $\frac{\partial P}{\partial y} = v_2$.

Funcţia P se numeşte **potenţialul scalar** al lui $\vec{v}$; evident, $P = \frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} = \vec{v}$. Curbele $P(x, y) = k$ constant, se numesc **linii echipotenţiale**. Deoarece funcţia P este armonică în D (pentru că $\Delta P = \text{div}(\text{grad } P) = \text{div}\,\vec{v} = 0$), rezultă, conform teoremei 1.4, că există o funcţie olomorfă $f : D \to \mathbb{C}$, numită **potenţialul complex** al lui v, astfel încît $P = \text{Re}\, f$. Dacă $Q = \text{Im}\, f$ deci $f = P + iQ$, atunci conform condiţiilor Cauchy-Riemann, rezultă $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} = -v_2$ şi $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} = v_1$. Curbele $Q(x, y) = k$, k constant, sînt linii de cîmp pentru $\vec{v}$ (deoarece în orice punct al unei astfel de curbe avem $\vec{v} \cdot \text{grad}\, Q = v_1 \frac{\partial Q}{\partial x} + v_2 \frac{\partial Q}{\partial y} = v_1(-v_2) + v_2 \cdot v_1 = 0$, deci $\vec{v}$ este tangent la curbă). Curbele $P(x, y) = k$ şi $Q(x, y) = k_1$, sînt evident ortogonale deoarece $\text{grad}\, P \cdot \text{grad}\, Q = \vec{v} \cdot \text{grad}\, Q = 0$.

Am văzut cum se determină potenţialul complex al lui $\vec{v}$. Este utilă şi legătura inversă, adică recuperarea lui $\vec{v}$ din cunoaşterea potenţialului său complex. Pentru aceasta, vom identifica orice vector plan $a\vec{i} + b\vec{j}$ cu numărul complex $a + bi$; ţinînd cont de teorema 1.3, rezultă că

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = v_1 - iv_2, \text{ de unde } \overline{f'(z)} = v_1 + iv_2 \simeq v_1\vec{i} + v_2\vec{j} = \vec{v}.$$

Aşadar, $(\forall)\, z = (x, y) \in D$, $\vec{v} = \overline{f'(z)}$ şi $\|\vec{v}\| = |\overline{f'(z)}| = |f'(z)|$.

EXEMPLE. 1)Dacă $f(z) = az$, $a = a_1 + ia_2$ fiind o constantă complexă, atunci $f(z) = (a_1 + ia_2)(x + iy)$, deci $P = \text{Re}\, f = a_1 x - a_2 y$ şi $Q = a_1 y + a_2 x$. Cîmpul este $\vec{v} = \overline{f'(z)} = \bar{a} = a_1 - ia_2 \simeq a_1\vec{i} - a_2\vec{j}$ şi liniile sale de cîmp sînt dreptele $a_2 x + a_1 y = k$; în plus $\|\vec{v}\| = |f'(z)| = |a|$.

2) Dacă $f(z) = Az + \frac{m}{z}$ cu A, m reale strict pozitive, atunci

$$f'(z) = A - \frac{m}{z^2}$$

şi cîmpul corespunzător este

$$\vec{v} = \overline{f'(z)} = \left(A - \frac{m(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}\right)\vec{i} - \frac{2mxy}{(x^2 + y^2)^2}\vec{j}.$$

Liniile de cîmp ale lui $\vec{v}$ sînt curbele $Ay - \frac{my}{x^2 + y^2} = k$, $k \in \mathbb{R}$. Pentru $z \to \infty$, adică $|z|^2 = x^2 + y^2 \to \infty$, $\vec{v}$ tinde către $A\vec{i}$ şi aceasta justifică de ce constanta A se mai notează v_∞.

1.3. Exponențiala complexă; funcția argument

Dacă $\{a_n\}_{n\geq 0}$ este un şir de numere complexe, se pot forma sumele parțiale $a_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$, $n \geq 0$. Reamintim că seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ este **convergentă**, cu suma s, dacă şirul $\{s_n\}_{n\geq 0}$ este convergent către s, adică $|s_n - s| \to 0$ (pentru $n \to \infty$).

Exemplu. Seria $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$ are sumele parțiale $s_n = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$ şi este convergentă dacă şi numai dacă $|z| < 1$, cu suma $\dfrac{1}{1-z}$.

Seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ se numeşte **absolut convergentă** (AC) dacă seria de numere reale şi pozitive $\sum\limits_{n\geq 0} |a_n|$ este convergentă; orice serie $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ absolut convergentă este convergentă şi în plus $\left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Dacă seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ este absolut convergentă, atunci se ştie că pentru orice bijecție $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, avem $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Se cunosc tot din anul I, sau se extind fără dificultate, rezultatele de bază privind seriile de puteri $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$ (lema lui Abel, disc de convergență etc.).

Dacă $u = \{u_n\}_{n\geq 0}$, $v = \{v_n\}_{n\geq 0}$ sînt două şiruri de numere complexe, atunci **convoluția lor discretă** este şirul $w = \{w_n\}_{n\geq 0}$, unde $w_n = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}$ (se mai scrie $w = u * v$). Seria $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$ se mai numeşte **seria–produs** a seriilor $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$.

Lema 1.5. Dacă seriile $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ sînt absolut convergente, atunci seria-produs $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$ este absolut convergentă şi suma ei este egală cu produsul sumelor seriilor date.

Demonstrație. Fie $\alpha_p = \sum\limits_{n\geq p} |u_n|$, $\beta_q = \sum\limits_{n\geq q} |v_n|$ pentru orice $p, q \geq 0$. Atunci $(\forall)\, n \geq 0$, $|w_n| \leq \sum\limits_{p=0}^{n} |u_p| \cdot |v_{n-p}|$ şi $(\forall)\, m \geq 0$,

$$\sum_{n=0}^{m} |w_n| \leq \sum_{n=0}^{m} \left(\sum_{p=0}^{n} |u_p| \cdot |v_{n-p}| \right) \leq \left(\sum_{p=0}^{m} |u_p| \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{m} |v_q| \right) \leq \alpha_0 \cdot \beta_0.$$

Aşadar, seria $\sum\limits_{n\geq 0} |w_n|$ este convergentă (sumele ei parțiale fiind mărginite).

În plus, pentru $m \geq 2n$, avem

$$\left|\sum_{k=0}^{m} w_k - \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)\right| \leq \sum_{\substack{p,q=0 \\ p\geq n+1 \text{ sau } q\geq n+1}}^{m} |u_p|\cdot|v_q| \leq \alpha_{n+1}\beta_0 + \beta_{n+1}\alpha_0.$$

Făcînd $n \to \infty$, $m \to \infty$, rezultă că $\alpha_{n+1}\beta_0 + \beta_{n+1}\alpha_0 \to 0$ și

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{p=0}^{\infty} u_p\right)\cdot\left(\sum_{q=0}^{\infty} v_q\right).$$

OBSERVAȚIE. Notăm cu l_1 mulțimea șirurilor de numere complexe $u = \{u_n\}_{n\geq 0}$ astfel încît, seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ să fie absolut convergentă. Lema 1.5 arată că dacă $u, v \in l_1$, atunci $u * v \in l_1$. Se poate arăta că l_1 este un spațiu Banach complex relativ la norma $\|u\| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

Vom studia acum în detaliu un exemplu foarte important de funcție complexă, anume exponențiala. Evident, seria de puteri $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{1}{n!}z^n$ are raza de convergență $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}/\frac{1}{(n+1)!}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \infty$.

DEFINIȚIA 1.7. Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ notăm

$$\exp z = e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n.$$

Funcția $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to e^z$, se numește **exponențiala complexă**.

Concentrăm proprietățile principale ale exponențialei complexe în teorema următoare:

TEOREMA 1.6. Avem

a) $e^0 = 1$;

b) **pentru orice** $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$;

c) **pentru orice** $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$, **și** $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

d) **pentru orice** $y \in \mathbb{R}$ **are loc următoarea formulă celebră:**

$e^{iy} = \cos y + i \sin y$ (**formula lui Euler**).

e) **funcția** $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ **este olomorfă și periodică de perioadă** $2\pi i$.

DEMONSTRAȚIE. a) este evident.

b) Considerăm seriile $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$, unde $u_n = \frac{z_1^n}{n!}$, $v_n = \frac{z_2^n}{n!}$, care sînt evident absolut convergente. Cu notațiile anterioare, rezultă

$$w_n = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!(n-p)!}z_1^p z_2^{n-p} = \frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n,$$

pentru orice $n \geq 0$.

Conform lemei 1.5, rezultă că

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n=\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}z_1^p\right)\cdot\left(\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{q!}z_2^q\right),$$

adică $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$,

c) Conform b) şi a) rezultă $e^z\cdot e^{-z}=e^0=1$.

d) Avem

$$e^{iy}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(iy)^n=1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n}+\ldots+$$
$$+i\left(y-\frac{y^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}y^{2n+1}+\ldots\right)=\cos y+i\sin y,$$

ţinînd cont de dezvoltările în serie ale funcţiilor trigonometrice reale cos şi sin.

e) Pentru orice $z\in\mathbb{C}$, avem $e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)$, deci părţile reală şi imaginară ale lui exp sînt respectiv $P(x,y)=e^x\cos y$, $Q(x,y)=e^x\sin y$.

Evident P şi Q sînt de clasă C^1 pe $\mathbb{C}$ şi în fiecare punct din $\mathbb{C}$,

$$\frac{\partial P}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial Q}{\partial y}\quad\text{şi}\quad\frac{\partial P}{\partial y}=-e^x\sin y=-\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Conform corolarului 1 al teoremei 1.3, funcţia exp este olomorfă pe $\mathbb{C}$. De asemenea, pentru orice $z\in\mathbb{C}$ avem

$$e^{z+2\pi i}=e^{x+iy+2\pi i}=e^x\cdot e^{i(y+2\pi)}=e^x\left(\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi)\right)=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z,$$

deci exp este periodică de perioadă $2\pi i$. Teorema 1.6 este demonstrată.

APLICAŢIE.

Fie $\omega>0$ fixat. Orice funcţie de forma $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ cu $A\geq 0$ şi φ real se numeşte **semnal sinusoidal de pulsaţie** ω; mulţimea acestora se notează S_ω. Orice funcţie $f\in S_\omega$ este evident periodică de perioadă principală $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Funcţia $g(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ se mai numeşte **conjugata** lui f. Să notăm $z(t)=g(t)+if(t)$. Atunci

$$z(t)=A[\cos(\omega t+\varphi)+\mathrm{i}\sin(\omega t+\varphi)]=A\cdot e^{i(\omega t+\varphi)}=Ae^{i\varphi}\cdot e^{i\omega t}.$$

Se verifică uşor că aplicaţia $\Phi_\omega:S_\omega\to\mathbb{C}$, $f\to Ae^{i\varphi}$ este un izomorfism de spaţii vectoriale reale (numit **izomorfismul lui A. J. Fresnel**, 1788–1827).

Evident, $(\forall)\, f\in S_\omega$, avem

$$f'(t)=A\omega\cos(\omega t+\varphi)=A\omega\sin\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right),$$

deci

$$\Phi_\omega(f')=A\omega e^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}=i\omega Ae^{i\varphi}=i\omega\Phi_\omega(f).$$

De exemplu, dacă (L,R) este un circuit în serie, în curent alternativ, cu diferenţa de potenţial la borne $u(t)=B\sin(\omega t+\varphi)$, atunci curentul $i(t)$ satisface ecuaţia $u(t)=Li'(t)+Ri(t)$, $(\forall)\, t\in\mathbb{R}$. Aplicînd izomorfisul lui Fresnel, rezultă

$\Phi_\omega(u) = Li\omega\, \Phi_\omega(i) + R\, \Phi_\omega(i)$; cîtul $\Phi_\omega(u) / \Phi_\omega(i) = Li\omega + R$ se numeşte **impedanţa** complexă a circuitului.

Argumentul unui număr complex nenul

Notăm cu $S^1 = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| = 1\}$ circumferinţa unitate. Pentru orice $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, avem evident $\frac{z}{|z|} \in S^1$. Se observă că S^1 este un grup relativ la înmulţire şi aplicaţia, evident surjectivă, $e : \mathbb{R} \to S^1$, $y \to e^{iy}$ este un morfism de grupuri $(\mathbb{R}, +, 0) \to (S^1, \cdot, 1)$.

[Într-adevăr, $e(y_1 + y_2) = e^{i(y_1+y_2)} = e^{iy_1} \cdot e^{iy_2} = e(y_1) \cdot e(y_2)$, pentru orice $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$]. Nucleul morfismului e este:

$$\operatorname{Ker} e = \{y \in \mathbb{R} \mid e^{iy} = 1\} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \overset{\text{notat}}{=} 2\pi\,\mathbb{Z}.$$

Notăm cu $\mathbb{R} / 2\pi\,\mathbb{Z}$ mulţimea claselor de echivalenţă $\hat{x}$ cu $x \in \mathbb{R}$ (relativ la relaţia de echivalenţă pe $\mathbb{R}$: $x_1 \sim x_2 \leftrightarrow x_1 - x_2 \in 2\pi\,\mathbb{Z}$); aşadar, pentru $x \in \mathbb{R}$ fixat, $\hat{x} = \{x + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Evident, $\mathbb{R} / 2\pi\,\mathbb{Z}$ este un grup relativ la adunare şi în plus, avem un izomorfism de grupuri.

$$\tilde{e} : \mathbb{R} / 2\pi\,\mathbb{Z} \to S^1,\ \hat{y} \to e^{iy}.$$

Cu aceste pregătiri, trecem la definiţia argumentului unui număr complex nenul şi a ramurilor funcţiei-argument.

DEFINIŢIA 1.8. Pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$, se numeşte **argumentul lui** z, clasa de echivalenţă

$$\operatorname{Arg} z = \tilde{e}^{-1}\left(\frac{z}{|z|}\right) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid e^{iy} = \frac{z}{|z|}\right\}.$$

Funcţia-argument este funcţia

$$\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R} / 2\pi\,\mathbb{Z},\ z \to \tilde{e}^{-1}\left(\frac{z}{|z|}\right).$$

Dacă nu dorim să "lucrăm" cu clase de echivalenţă ci cu numere reale, atunci sîntem nevoiţi să folosim funcţii multiforme (care asociază unei valori z mai multe valori numerice). Pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$ să notăm cu θ unicul număr real $\theta \in (-\pi, \pi]$ astfel încît $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}$. Atunci $\operatorname{Arg} z = \{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

EXEMPLE. 1) Fie $z = 1 + i$; atunci $\frac{z}{|z|} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ şi luăm $\theta = \frac{\pi}{4}$. Deci

$$\operatorname{Arg}(1 + i) = \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

2) Dacă $z = -3$, atunci $\frac{z}{|z|} = -1$ şi $\theta = \pi$; ca atare,

$$\operatorname{Arg}(-3) = \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

3) Pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$, notăm $\rho = |z|$ şi alegînd $\theta \in (-\pi, \pi]$ astfel încît $e^{i\theta} = \frac{z}{\rho}$, obţinem că $z = \rho\, e^{i\theta}$ (**forma exponenţială** a lui z). Astfel,

$$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ şi } -3=3e^{i\pi}.$$

DEFINIŢIA 1.9. Fie $A\subset\mathbb{C}^*$ (adică $0\notin A$) o mulţime deschisă. Se numeşte **ramură continuă a argumentului pe** A, orice funcţie continuă $\varphi:A\to\mathbb{C}$ cu proprietatea că

$$e^{i\varphi(z)}=\frac{z}{|z|},\ (\forall)\,z\in A.$$

Deoarece $\left|\frac{z}{|z|}\right|=1$, rezultă că $\left|e^{i\varphi(z)}\right|=1$, deci $e^{-\operatorname{Im}\varphi(z)}=1$, de unde $\operatorname{Im}\varphi(z)=0$, adică funcţia φ ia valori reale. Nu pe orice deschis $A\subset\mathbb{C}^*$ există ramură continuă a argumentului. Spre exemplu avem următoarea:

PROPOZIŢIA 1.7. Nu există ramuri continue ale argumentului pe deschisul $\mathbb{C}^*$.

DEMONSTRAŢIE. Presupunem că există o ramură continuă a argumentului pe $\mathbb{C}^*$, adică există $\varphi:\mathbb{C}^*\to\mathbb{R}$ continuă astfel încît $e^{i\varphi(z)}=\frac{z}{|z|}$, $(\forall)\,z\in\mathbb{C}^*$.

Notăm tot cu φ restricţia $S^1\to\mathbb{R}$, care este bineînţeles, continuă (şi neconstantă). Dar S^1 este conex şi compact, deci mulţimea $\varphi(S^1)\subset\mathbb{R}$ este conexă şi compactă, adică este un interval închis, $\varphi(S^1)=[m,M]$. Vom arăta că funcţia continuă $\varphi:S^1\to[m,M]$ este injectivă (deci bijectivă). Fie $z_1,z_2\in S^1$ cu $\varphi(z_1)=\varphi(z_2)$; atunci $e^{i\varphi(z_1)}=e^{i\varphi(z_2)}$, deci $z_1=z_2$ (căci $|z_1|=|z_2|=1$).

Rezultă că $\varphi^{-1}:[m,M]\to S^{-1}$ este continuă (deoarece S^1 este compact şi φ^{-1} întoarce închişi în închişi). Fie acum $a=\varphi^{-1}(m)$, $b=\varphi^{-1}(M)$, evident $a\neq b$ căci $m\neq M$. Funcţia restricţie $\varphi^{-1}:(m,M)\to S^1\setminus\{a,b\}$ este continuă şi, deoarece (m,M) este conex, rezultă că $\varphi^{-1}(m,M)=S^1\setminus\{a,b\}$ ar fi conex; contradicţie (figura VII.7).

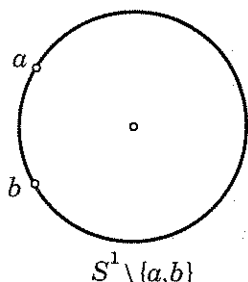


Figura VII.7.

Vom da ulterior încă o demonstraţie a propoziţiei 1.7.

Vom considera semidreapta $T=\{z\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}z=0,\operatorname{Re}z\le 0\}$, numită ad-hoc **tăietură** în planul complex (figura VII.8).

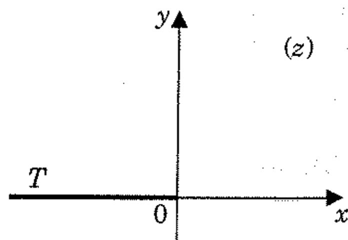


Figura VII.8.

PROPOZIŢIA 1.8. În domeniul $\mathbb{C}\setminus T$ există ramuri continue ale argumentului.

DEMONSTRAŢIE. Într-adevăr, să considerăm funcţia $\arg:\mathbb{C}\setminus T\to(-\pi,\pi)$, unde $\arg(z)=$ "acel unic $\theta\in(-\pi,\pi)$ cu proprietatea $e^{i\theta}=\frac{z}{|z|}$" (adică, unicul

reprezentant din $(-\pi, \pi)$ al clasei de echivalență $\text{Arg}(z)$).

Să arătăm că funcția **arg** astfel definită este continuă.

Fie $z_0 \in \mathbb{C} \setminus T$ arbitrar și fie $z_n \in \mathbb{C} \setminus T$ cu $z_n \to z_0$.

Atunci avem: $|z_n| \to |z_0|$ și $\frac{z_n}{|z_n|} \to \frac{z_0}{|z_0|}$. Dar

$\arg(z_n) = \arg\left(\frac{z_n}{|z_n|}\right) = \theta_n$ și

$\arg(z_0) = \arg\left(\frac{z_0}{|z_0|}\right) = \theta_0$, deci

putem presupune $|z_0| = 1$ și $z_n \to z_0$ cu $|z_n| = 1$ (figura VII.9).

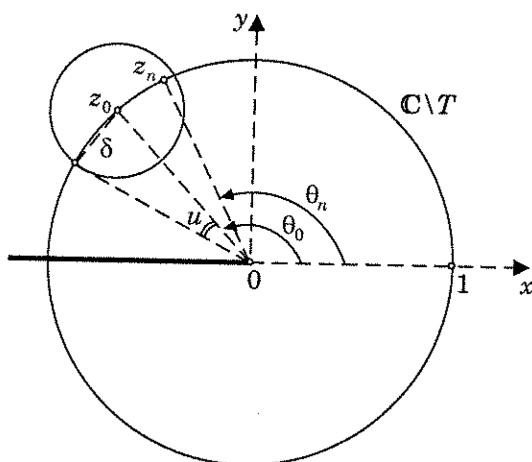


Figura VII.9.

Trebuie să arătăm că $\theta_n \to \theta_0$, adică $(\forall)\, \varepsilon > 0\ (\exists)\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încît $(\forall)\, n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |\theta_n - \theta_0| < \varepsilon$.

Dacă $\varepsilon \geq 2\pi$, atunci $|\theta_n - \theta_0| < \varepsilon\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$, deoarece $\theta_n, \theta_0 \in (-\pi, \pi)$. Dacă $0 < \varepsilon < 2\pi$ și $z_0 = 1$ alegem $\delta \in \mathbb{R}_+$ astfel încît $0 < \delta < \min\left\{2\sin\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, iar dacă $z_0 \neq 1$ alegem $\delta \in \mathbb{R}_+$ astfel încît $0 < \delta < \min\left\{2\sin\frac{\varepsilon}{2}, \frac{|\text{Im}\, z_0|}{2}\right\}$.

Deoarece $z_n \to z_0$ $(\exists)\, N_\delta \in \mathbb{N}^*$ astfel încît $(\forall)\, n \geq N_\delta \Rightarrow |z_n - z_0| < \delta$. Alegem $N_\varepsilon = N_\delta$ și avem $|\theta_n - \theta_0| < u$. Dar $u = 2\arcsin\frac{\delta}{2} < \varepsilon$, deci $|\theta_n - \theta_0| < \varepsilon$.

OBSERVAȚII. 1) Evident funcția $\arg : \mathbb{C} \setminus T \to (-\pi, \pi)$ se poate extinde la $\mathbb{C}^*$, adică $\arg : \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi]$, dar nu mai este o funcție continuă (vezi propoziția 1.7).

2) Se poate arăta mai general că în orice domeniu simplu conex $D \subset \mathbb{C}^*$ deci care nu conține originea, există ramuri continue ale argumentului.

DEFINIȚIA 1.10. Funcția $\arg : \mathbb{C} \setminus T \to (-\pi, \pi)$ se numește **ramura principală a argumentului.** Extinsa sa $\arg : \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi]$ se numește **determinare pricipală a argumentului**.

Așadar, $\theta \in (-\pi, \pi)$ și $z = \rho\theta^{i\theta}$. Punctele u, v din $\mathbb{C} \setminus T$ nu pot fi considerate "apropiate"; $\arg u$ este "apropiat" de π, iar $\arg v$ de $-\pi$. Privite însă în $\mathbb{C}^*$ punctele u, v sînt "apropiate", ceea ce arată că funcția extinsă arg nu este continuă în $\mathbb{C}^*$ (figura VII.10).

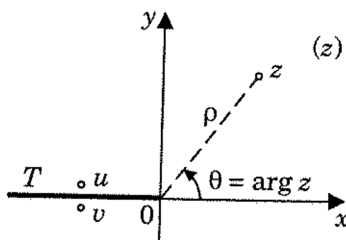


Figura VII.10.

TEOREMA 1.9. Fie $A \subset \mathbb{C}^*$ mulţime deschisă, conexă şi $\varphi_1; \varphi_2 : A \to \mathbb{R}$ ramuri continue ale argumentului. Atunci ele diferă printr-o constantă.

DEMONSTRAŢIE. Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(z) = \frac{1}{2\pi}(\varphi_1(z) - \varphi_2(z))$, $(\forall) z \in A$; evident f este continuă. Deoarece φ_1; φ_2 sînt ramuri continue ale argumentului pentru $(\forall) z \in A$ avem $e^{i\varphi_1(z)} = \frac{z}{|z|} = e^{i\varphi_2(z)}$, deci $e^{i(\varphi_1(z)-\varphi_2(z))} = 1$.

Rezultă că $i(\varphi_1(z) - \varphi_2(z)) = 2k_z\pi i$, $k_z \in \mathbb{Z}$, deci $f(z) = k_z$, $(\forall) z \in A$. Atunci funcţia continuă $f : A \to \mathbb{R}$ ia numai valori întregi deci f este local constantă şi conform lemei anterioare teoremei 1.4, f este constantă. [De altfel mulţimea $f(A) \subset \mathbb{Z}$ este conexă deci $f(A) = \{k\}$, adică $f(z) = k \in \mathbb{Z}$, constantă, $(\forall) z \in A$].

Rezultă că $\varphi_1(z) - \varphi_2(z) = 2k\pi$, $(\forall) z \in A$.

COROLAR. Orice ramură continuă a argumentului în $\mathbb{C} \setminus T$ este de forma $\varphi : \mathbb{C} \setminus T \to \mathbb{R}$, $\varphi(z) = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ constantă, unde arg **este ramura principală.**

1.4. Funcţia logaritmică, funcţia radical, funcţiile trigonometrice complexe. Ideea suprafeţelor riemanniene asociate unor funcţii multiforme

a) Am definit în paragraful anteior funcţia olomorfă "exp". Am văzut că funcţia exponenţială nu ia valoarea zero, adică $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$.

Pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$, fixat, ne punem acum problema să aflăm toate soluţiile $w = u + iv \in \mathbb{C}$ ale ecuaţiei $e^w = z$. Folosind funcţia $\arg : \mathbb{C}^* \to (-\pi, \pi]$ (definiţia 1.10) obţinem: $z = |z| e^{i \arg z}$ deci

$$e^w = z \Rightarrow |e^w| = |z|, \text{ adică } e^u = |z|,$$

de unde rezultă că $u = \ln|z|$ este unic determinat. Obţinem apoi că $e^{iv} = e^{i \arg z}$ şi ţinînd cont că exp este periodică de perioadă $2\pi i$, rezultă $iv = i \arg z + 2k\pi i$, deci $v = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. În concluzie, toate soluţiile ecuaţiei $e^w = z (z \in \mathbb{C}^*)$ sînt: $w = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

DEFINIŢIA 1.11. Se numeşte **logaritmul numărului complex** $z \in \mathbb{C}^*$ mulţimea de numere complexe

$$\operatorname{Ln} z \overset{\Delta}{=} \{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Aşadar, $\operatorname{Ln} z = \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}$.

OBSERVAŢIE. Ln z este o funcţie multiformă, ca şi funcţia Arg z.

EXEMPLE. Fie $z = 1 + i$ deci $|z| = \sqrt{2}$ şi $\arg z = \frac{\pi}{4}$. Atunci

$$\operatorname{Ln}(1 + i) = \{\frac{1}{2}\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

În mod similar,

$$\operatorname{Ln}(-i) = \{i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \mid k \in \mathbb{Z}\}; \ \operatorname{Ln} 1 = \{2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

şi

$$\text{Ln}(-5) = \{\ln 5 + i(\pi + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

DEFINIȚIA 1.12. Fie $A \subset \mathbb{C}^*$ o mulțime deschisă. Se numeşte **ramură continuă a logaritmului** în A, orice funcție continuă $f: A \to \mathbb{C}$ astfel încît $e^{f(z)} = z$, $(\forall)\, z \in A$.

Definim acum **ramura principală a logaritmului.** Fie deschisul $A = \mathbb{C} \setminus T$, unde $T = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}\, z = 0, \text{Re}\, z \leq 0\}$. Definim funcția

$$\ln : \mathbb{C} \setminus T \to \mathbb{C},\ \ln z \overset{\Delta}{=} \ln|z| + i \arg z,\ (\forall)\, z \in \mathbb{C} \setminus T,$$

care este continuă pe $\mathbb{C} \setminus T$, deoarece funcțiile $(z \to \ln |z|) : \mathbb{C} \setminus T \to \mathbb{C}$, $\arg : \mathbb{C} \setminus T \to \mathbb{C}$, sînt continue. Avem în mod evident relația $e^{\ln z} = z$, $(\forall)\, z \in \mathbb{C} \setminus T$, deci funcția $\ln : \mathbb{C} \setminus T \to \mathbb{C}$ este o ramură continuă a logaritmului pe deschisul $\mathbb{C} \setminus T$, care se numeşte **ramura principală a logaritmului.**

EXEMPLE. Avem $\ln(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$, $\ln(-i) = -i\frac{\pi}{2}$, $\ln 1 = 0$, $\ln(-5)$ nu este deocamdată definit, deoarece $-5 \in T$ (mai tîrziu vom pune

$$\ln(-5) = \ln 5 + i\pi).$$

PROPOZIȚIA 1.10. Dacă $f_1, f_2 : A \to \mathbb{C}$ sînt ramuri continue ale logaritmului în deschisul conex $A \subset \mathbb{C}^*$, atunci ele diferă printr-o constantă de forma $2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$.

DEMONSTRAȚIE. Fie $f: A \to \mathbb{C}$, $f = \frac{1}{2\pi i}(f_1 - f_2)$; deoarece f este continuă, $f(A)$ este conexă. Din $e^{f_1(z)} = z = e^{f_2(z)}$, $(\forall)\, z \in A$, rezultă că

$$e^{\text{Re} f_1(z)} \cdot e^{i \text{Im} f_1(z)} = e^{\text{Re} f_2(z)} \cdot e^{i \text{Im} f_2(z)},\text{pentru orice } z \in A, \text{ deci}$$

$\text{Re}\, f_1(z) = \text{Re}\, f_2(z)$ şi $i(\text{Im}\, f_1(z) - \text{Im}\, f_2(z)) = 2k_z\pi i$, $(\forall)\, z \in A$,unde $k_z \in \mathbb{Z}$.

Atunci $f(z) = k_z \in \mathbb{Z}$, $(\forall)\, z \in A$, deci $f(A)$ este o mulțime discretă.

Rezultă că $f(A) = \{k\}$, adică $f(z) = k$ (k constantă întreagă), deci

$$f_1(z) - f_2(z) = 2\pi i k,\ (\forall)\, z \in A,\ k \in \mathbb{Z}.$$

COROLAR. Orice ramură continuă a logaritmului în deschisul $\mathbb{C} \setminus T$ este de forma $f: \mathbb{C} \setminus T \to \mathbb{C}$, $f(z) = \ln z + 2\pi i k$, $(\forall)\, z \in A$, $k \in \mathbb{Z}$.

OBSERVAȚII. 1) Ca şi în cazul funcției argument, se poate arăta că nu există ramură continuă a logaritmului pe întreg deschisul $\mathbb{C}^*$.

2) Putem extinde analog funcția ln la $\mathbb{C}^*$ $\ln : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $(\forall)\, z \in \mathbb{C}^*$; acesta se numeşte **determinarea principală a logaritmului** (ea nu este continuă în $\mathbb{C}^*$).

3) Atît pentru funcția argument cît şi pentru funcția logaritm putem defini ramuri continue în orice deschis de forma $\mathbb{C} \setminus T_1$, unde T_1 este o semidreaptă oarecare cu capătul în 0 (şi mai general, în orice domeniu simplu conex care nu conține originea).

b) Funcțiile trigonometrice **cos** şi **sin** în complex se definesc astfel:

DEFINIȚIA 1.13. Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ punem

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \text{ (Euler)},$$

deci **cos**, **sin** : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Rezultă imediat că avem:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$
$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1,$$
$$\sin 2z = 2\sin z \cos z \text{ etc.}$$

DEFINIȚIA 1.14. Avem

$$\mathbf{tg} : \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}} \to \mathbb{C},\ \operatorname{tg} z \triangleq \frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}};$$

$$\mathbf{ctg} : \mathbb{C} \setminus \{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}} \to \mathbb{C},\ \operatorname{ctg} z \triangleq \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

OBSERVAȚIE. Funcțiile **sin**, **cos**, **tg**, **ctg** sînt funcții complexe uniforme (nu sînt multiforme) și toate formulele de trigonometrie din cazul real rămîn valabile pentru ele. Apar însă unele fenomene noi. De exemplu, ecuația $\sin z = 2$ admite soluții în $\mathbb{C}$. Se definesc de asemenea funcțiile **hiperbolice complexe**: $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$ (pentru $\operatorname{ch} z \neq 0$) etc.

Abia în domeniul complex se vede legătura strînsă între funcțiile hiperbolice și cele trigonometrice; anume, $(\forall)\, z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{sh} z = -i \sin(iz)$, $\operatorname{ch} z = \cos(iz)$ etc.

c) **Funcția putere** de exponent $\alpha \in \mathbb{C}$ se definește ca o funcție multiformă: $(\forall)\, z \in \mathbb{C}^*$,

$$z^\alpha \triangleq e^{\alpha \operatorname{Ln} z} = \left\{e^{\alpha\left(\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)\right)}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

De exemplu, $i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = \{e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \mid_{k\in\mathbb{Z}}\}$.

d) **Funcția radical** se definește ca o funcție multiformă $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ fixat: $\sqrt[n]{z} \triangleq \left\{w \in \mathbb{C} \,\middle|\, w^n = z\right\}$.

Dacă $z = 0$ obținem $\sqrt[n]{z} = \{0\}$, iar dacă $z \neq 0$, $z = re^{i\theta}$ (cu $r > 0$ și $\theta = \arg z \in (-\pi, \pi]$) deci obținem:

$$\sqrt[n]{z} = \left\{\sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \in \mathbb{C} \,\middle|\, k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\right\}.$$

OBSERVAȚIE. Pentru $z \in \mathbb{C}^*$ putem defini funcția radical cu ajutorul funcției putere. Într-adevăr, putem scrie

$$\sqrt[n]{z} \triangleq z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\operatorname{Ln} z} = \{e^{\frac{1}{n}(\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi))}\}_{k\in\mathbb{Z}} =$$
$$= \{e^{\frac{1}{n}\ln|z|} \cdot e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{\sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{\sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \mid k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

DEFINIȚIA 1.15. Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulțime deschisă. Se numește **ramură continuă a radicalului de ordin** n în A orice funcție continuă $f : A \to \mathbb{C}$ astfel încît $(f(z))^n = z$, $(\forall)\, z \in A$.

PROPOZIȚIA 1.11. În deschisul $\mathbb{C} \setminus T$ [$T = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\}$] există ramuri continue ale radicalului de ordin n.

DEMONSTRAŢIE. Este suficient să alegem o ramură continuă a logaritmului în $\mathbb{C} \setminus T$, de exemplu $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ şi atunci funcţia

$$(\sqrt[n]{z})_0 = e^{\frac{1}{n}\ln z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z}{n}}, \quad (\forall)\, z \in \mathbb{C} \setminus T,$$

este evident o ramură continuă a radicalului de ordin n **(ramura principală a radicalului)**.

OBSERVAŢIE. Se poate arăta că în $\mathbb{C} \setminus T$ există exact n ramuri continue ale radicalului de ordin n şi ele sînt următoarele:

$$(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

e) "Inversarea" funcţiilor trigonometrice complexe conduce la alte funcţii multiforme. Astfel, rezolvînd ecuaţia $z = \sin w$, rezultă:

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \quad \text{sau} \quad e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0,$$

de unde

$$e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2} \quad \text{şi} \quad iw = \mathrm{Ln}(iz \pm \sqrt{1 - z^2}).$$

Se defineşte de aceea

$$\mathrm{Arcsin}\, z = -i\mathrm{Ln}(iz \pm \sqrt{1 - z^2}).$$

În mod similar se obţin Arccosz, Arctgz, Argshz etc.

Scurt istoric al funcţiilor complexe elementare

Funcţiile polinomiale complexe $w = P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + ... + a_n$ $(a_i \in \mathbb{C})$, $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ au fost practic introduse o dată cu apariţia numerelor complexe.

Acelaşi lucru se poate afirma despre funcţiile raţionale $w = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ cu P, Q polinomiale; evident, o astfel de funcţie este olomorfă în deschisul $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = 0\}$.

Cea mai importantă funcţie transcendentă este exponenţiala complexă şi ea a fost definită de Euler. Tot lui Euler îi datorăm extinderea în domeniul complex a funcţiilor trigonometrice. Inversarea funcţiei exponenţiale complexe, deci definirea logaritmului complex, este atribuită lui Bernoulli şi Leibniz, în jurul anilor 1750, într-o controversă a lor privind "logaritmii numerelor negative şi imaginare", cînd au arătat că orice număr nenul admite o infinitate de logaritmi. Faptul că i^i este real a fost descoperit de Euler, ca şi definiţia funcţiei putere. Abel a stabilit formula $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ şi pentru orice $\alpha \in \mathbb{C}$ ("seria binomială"). Asupra funcţiilor elementare vom reveni în legătură cu transformările conforme.

Fundamentele teoriei funcţiilor complexe au fost puse de Gauss, Cauchy, Riemann, Weirstrass; am văzut şi vom vedea cîteva din principalele lor contribuţii. Riemann a avut şi ideea de a considera o funcţie complexă multiformă ca o funcţie în sens uzual, înlocuind însă variabila complexă cu un punct variabil pe o anumită suprafaţă avînd mai multe "foi", fiecare foaie fiind

obținută din planul complex. Astfel de suprafețe se numesc **suprafețe riemanniene** și studiul lor a condus la o dezvoltare extraordinară a analizei complexe. Vom construi ca exemplu suprafețele riemanniene asociate radicalului și logaritmului complex.

Este util să introducem mai întîi o noțiune simplă. Dacă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este o funcție complexă, se numește **domeniu de injectivitate** (sau **de univalență**) al lui f orice domeniu $\Delta \subset \mathbb{C}$ astfel încît restricția $f\,|\Delta$ să fie injectivă (deci $(\forall)\ z_1 \neq z_2$ în Δ, $f(z_1) \neq f(z_2)$). Un domeniu de injectivitate Δ care nu poate fi extins (în sensul că dacă $\Delta \subsetneqq \Delta'$, atunci $f\,|\Delta'$ nu mai este injectivă) se numește **maximal**. De exemplu, pentru $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_1(z) = z^2$, un domeniu maximal de injectivitate este semiplanul drept $\text{Re} z > 0$ (altul este semiplanul superior $\text{Im}\, z > 0$). Mai general, pentru funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ ($n \geq 2$ întreg), unghiurile

$$G_0 = \left\{-\frac{\pi}{n} < \arg z < \frac{\pi}{n}\right\},\ G_1 = \left\{\frac{\pi}{n} < \arg z < \frac{3\pi}{n}\right\}, \ldots,\ G_{n-1} = \left\{-\frac{3\pi}{n} < \arg z < -\frac{\pi}{n}\right\}$$

sînt domenii maximale de injectivitate (figura VII.11).

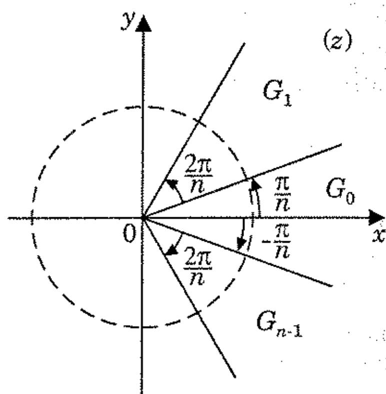


Figura VII.11.

De asemenea, pentru funcția $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, g(z) = e^z$, orice bandă orizontală de lățime 2π, $\{\alpha < \text{Im}\, z < \alpha + 2\pi\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, este un domeniu maximal de injectivitate.

În particular, se pot considera domeniile maximale de injectivitate

$$G'_k = \{z \in \mathbb{C} \mid (2k-1)\pi < \text{Im}\, z < (2k+1)\pi\},$$
$k \in \mathbb{Z}$ (figura VII.12).

Trecem acum la construirea suprafețelor riemanniene pentru $\sqrt{z}, \sqrt[n]{z}$ și $\text{Ln}\, z$.

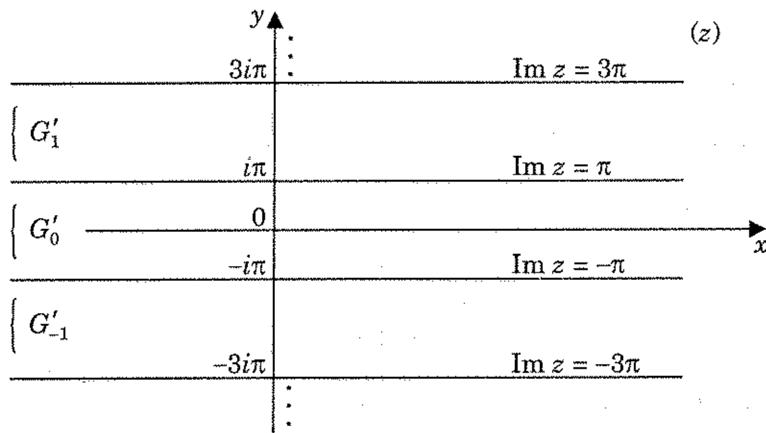


Figura VII.12.

EXEMPLU 1. Să considerăm funcția $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(w)=w^2$. Alegem determinarea $\arg:\mathbb{C}^*\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ a funcției argument în planul (w).

Funcția $z=w^2$ transformă bijectiv și continuu unghiul (de fapt semiplanul drept),

$$G_0=\left\{w\in\mathbb{C}^*\mid -\frac{\pi}{2}<\arg w<\frac{\pi}{2}\right\}\cup 0$$

pe mulțimea $D=(\mathbb{C}\setminus T)\cup\{0\}$; este suficient să observăm pentru aceasta că punctele de pe semidreptele $d_1=\left\{\arg w=\frac{\pi}{2}\right\}$ și $d_2=\left\{\arg w=-\frac{\pi}{2}\right\}$ sînt transformate prin f în puncte de pe semidreapta T. În mod similar, unghiul $G_1=\left\{w\in\mathbb{C}^*\mid \frac{\pi}{2}<\arg w<\frac{3\pi}{2}\right\}\cup 0$ este aplicat prin f tot pe mulțimea D.

Recunoaștem că $G_0\setminus\{0\}$ și $G_1\setminus\{0\}$ sînt domenii maximale de injectivitate pentru f; (figura VII.13)

Figura VII.13.

Se pot considera două "inverse", la fel de îndreptățite, notate $(\sqrt{z})_0:D\to G_0$ și $(\sqrt{z})_1:D\to G_1$ și numite **ramuri ale radicalului** $\sqrt{z}$. De exemplu, pentru $z=2i=2e^{i\frac{\pi}{2}}$, avem $(\sqrt{2i})_0=\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}=1+i$ și $(\sqrt{2i})_1=\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}=-(1+i)$. Iar dacă $z=5$, atunci $(\sqrt{5})_0=\sqrt{5}$ și $(\sqrt{5})_1=-\sqrt{5}$.

Este însă posibilă și o construcție unitară și importantă prin dezvoltările ei ulterioare. Anume, vom extinde mulțimea D nu la $\mathbb{C}$ ci la o altă mulțime, notată U_0, în care fiecărui punct din T cu excepția lui 0 (căci oricărui $z\in\mathbb{C}$ cu $z=\operatorname{Re} z<0$ și $y=\operatorname{Im} z=0$) îi corespund două puncte, unul pe "marginea superioară a foii" și celălalt pe "marginea inferioară a foii", ca în figura VII.14.

Figura VII.14.

Extindem bijectiv și continuu funcția $z=w^2$

între unghiul închis $\overline{G_0}$ și U_0. În mod analog, funcția $z = w^2$ transformă bijectiv mulțimea G_1 pe D și se poate extinde bijectiv și continuu de la unghiul închis $\overline{G_1}$ la U_1 ($U_1 = U_0$ dar alegem $\arg_1 = \arg_0 + 2\pi$ pe U_1; $\arg_0$ extinde arg la $[-\pi, \pi]$). Vom "lipi" cele două foi U_0 și U_1, identificînd marginea superioară a lui U_0 cu marginea inferioară a lui U_1 și marginea superioară a lui U_1 cu cea inferioară a lui U_0, obținînd suprafață notată $U_0 * U_1$, avînd două foi ca în figura VII.15 și numită **suprafața riemanniană a lui $\sqrt{z}$**.

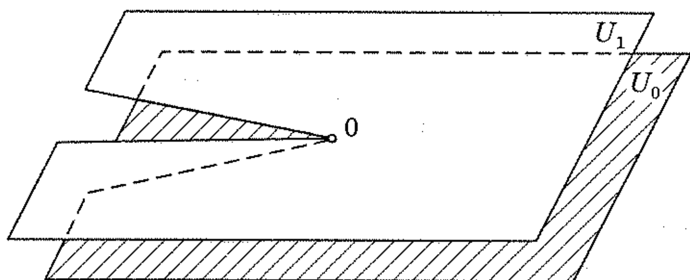


Figura VII.15.

Atunci funcția $z = w^2$ definește o aplicație bijectivă și continuă $\overline{G_0} \cup \overline{G_1} \to U_0 * U_1$; funcția radical $w = \sqrt{z}$ este inversa bine definită a acesteia

$$\sqrt{z} = \begin{cases} \sqrt{|z|} \cdot e^{i\frac{\arg_0 z}{2}} & \text{dacă } z \in U_0 \\ \sqrt{|z|} \cdot e^{i\frac{\arg_0 z + 2\pi}{2}} = -\sqrt{|z|} e^{i\frac{\arg_0 z}{2}} & \text{dacă } z \in U_1 \end{cases}$$

Mai general, să considerăm funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(w) = w^n = z$ ($n \geq 2$ întreg) și alegem determinarea $\arg : \mathbb{C}^* \to \left(-\frac{\pi}{n}, -\frac{\pi}{n} + 2\pi\right]$ a funcției argument în planul (w). Funcția $z = w^n$ transformă bijectiv și continuu unghiul

$$G_0 = \left\{ w \in \mathbb{C}^* \mid -\frac{\pi}{n} < \arg w < \frac{\pi}{n} \right\} \cup 0$$

pe mulțimea $D = (\mathbb{C} \setminus T) \cup \{0\}$. Extindem bijectiv și continuu funcția $z = w^n$ între unghiul $\overline{G_0}$ și U_0; analog, funcția $z = w^n$ va transforma bijectiv mulțimea

$$G_1 = \left\{ w \in \mathbb{C}^* \mid \frac{\pi}{n} < \arg w < \frac{3\pi}{n} \right\} \cup 0$$

pe D și o putem extinde (bijectiv și continuu) la o funcție $\overline{G_1} \to U_1$; avem $\overline{G_0} \cap \overline{G_1} = \left\{ w \in \mathbb{C}^* \mid \arg w = \frac{\pi}{n} \right\} \cup 0$ și vom lipi cele două foi U_0 și U_1 identificînd marginea superioară a lui U_0 cu marginea inferioară a lui U_1. Putem atunci considera că $z = w^n$ definește o aplicație bijectivă și continuă de la $\overline{G_0} \cup \overline{G_1}$ la $U_0 * U_1$. Continuînd procedeul, va rezulta că $z = w^n$ definește o aplicație

bijectivă și continuă de la $\mathbb{C} = \overline{G_0} \cup \overline{G_1} \cup \ldots \cup \overline{G_{n-1}}$ la o suprafață cu n foi, notată $U_0 * U_1 * \ldots * U_{n-1}$ (unde marginea superioară a lui U_{n-1} se identifică la rîndul ei cu marginea inferioară a lui U_0; o astfel de lipire nu se poate vizualiza fără intersecții nedorite ale foilor). Suprafața cu n foi

$$\tilde{S} = U_0 * U_1 * \ldots * U_{n-1}$$

se numește suprafața riemanniană asociată lui $\sqrt[n]{z}$. Aplicația $\tilde{S} \to \mathbb{C}$ definită anterior este o funcție uniformă (deci în sens uzual); în mod explicit,

$$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} w_0 = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\arg_0 z}{n}} & \text{dacă } z \in U_0 \\ w_1 = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\arg_1 z}{n}} & \text{dacă } z \in U_1 (\arg_1 = \arg_0 + 2\pi) \\ \vdots & \\ w_{n-1} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\arg_{n-1} z}{n}} & \text{dacă } z \in U_{n-1} (\arg_{n-1} = \arg_{n-2} + 2\pi.) \end{cases}$$

Funcțiile $w_k : D \to G_k$, $0 \le k \le n - 1$, definite anterior sînt uneori numite **ramurile** radicalului de ordin n; $w_0(z) = \sqrt[n]{z} e^{i\frac{\arg z}{n}}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus T)$, $w_0(0) = 0$, se numește **ramura principală**. Punctul $0 \in \tilde{S}$ se numește un **punct critic algebric** (sau **punct de ramificare**) pentru $\sqrt[n]{z}$; punctul $z = \infty$ este de asemenea un punct critic pentru $\sqrt[n]{z}$.

Exemplul 2. Vom analiza acum funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z = f(w) = e^w$. Punem $z = x + iy$, $w = u + iv$ și avem $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$. Fie $G_0 = \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} w < \pi\}$ o bandă în $\mathbb{C}$. Punctele dreptei $v = \alpha$, $\alpha \in (-\pi, \pi)$, se află în G_0 și imaginea acestei drepte prin funcția f este semidreapta de ecuații parametrice $x = e^u \cos \alpha$, $y = e^u \sin \alpha$ (adică de ecuație $x \sin \alpha - y \cos \alpha = 0$ și care face cu axa Ox unghiul α). Rezultă că funcția $z = e^w$ duce bijectiv și continuu banda deschisă G_0 pe $\mathbb{C} \setminus T$ (figura VII.16).

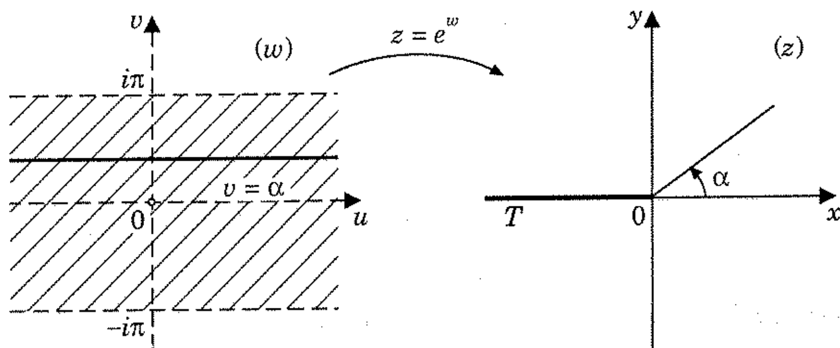


Figura VII.16.

Dreptele $v = -\pi$ și $v = \pi$ sînt duse prin funcția f în semidreapta T, deoarece $x = -e^{-u} < 0$ și $y = e^u \sin(\pm\pi) = 0$. Folosind notațiile anterioare, rezultă că putem extinde funcția de mai sus la o funcție bijectivă și "continuă" de la banda închisă G_0 la $U_0 \setminus \{0\} = U_0^*$. În mod analog, banda

$$G_k = \{w \in \mathbb{C} \mid (2k-1)\pi < \operatorname{Im} w < (2k+1)\pi\},\ k \in \mathbb{Z},$$

este un domeniu maximal de injectivitate pentru exp şi este dusă bijectiv şi continuu de $z = e^w$ pe $\mathbb{C} \setminus T$; putem să extindem funcția exponențială la o funcție bijectivă şi "continuă" de la $\overline{G_k}$ la $U_k^* = U_k \setminus \{0\}$ (alegem $\arg_k = \arg_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

"Lipind" ca mai sus foile U_k^* obținem o suprafață cu o infinitate numărabilă de foi $\tilde{S} = \underset{k\in\mathbb{Z}}{*} U_k^*$ şi putem defini logaritmul Ln ca o funcție uniformă, definită pe $\tilde{S}$ şi valori în $\mathbb{C}$:

$$\operatorname{Ln} z = \begin{cases} \vdots \\ w_1 = \ln|z| + i\arg_1 z; & z \in U_1^* \\ w_0 = \ln|z| + i\arg_0 z; & z \in U_0^* \\ w_{-1} = \ln|z| + i\arg_{-1} z; & z \in U_{-1}^* \\ \vdots \end{cases}$$

Suprafața $\tilde{S}$ se numeşte **suprafața riemanniană asociată funcției multiforme** $w = \operatorname{Ln} z$, iar punctul 0 se numeşte **punct critic logaritmic** al funcției $\operatorname{Ln} z$ (sau **punct de ramificare**); analog $z = \infty$ este un punct critic logaritmic pentru $\operatorname{Ln} z$.

Am văzut că în deschisul $\mathbb{C} \setminus T$ există n ramuri continue distincte pentru $\sqrt[n]{z}$. Anume, notînd cu "arg" ramura principală a argumentului, aceste ramuri sînt

$$(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}},\quad 0 \le k \le n-1.$$

Logaritmul complex admite o infinitate de ramuri continue distincte în $\mathbb{C} \setminus T$, definite prin

$$(\operatorname{Ln} z)_k = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Pentru $k = 0$ se obține ramura principală a logaritmului.

1.5. Inversarea locală a funcțiilor olomorfe, aplicații, exemple.

TEOREMA 1.12. (teorema de inversare locală a funcțiilor olomorfe). Fie $f: D \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe deschisul $D \subset \mathbb{C}$, $f = P + iQ$, $P, Q \in C^1(D)$, $z_0 \in D$ şi $f'(z_0) \neq 0$; fie $w_0 = f(z_0)$. Atunci există o vecinătate deschisă $U \ni z_0$ astfel încît $f(U)$ să fie o vecinătate deschisă a lui w_0 şi restricția $f: U \to f(U)$ este inversabilă, iar inversa ei f^{-1} este olomorfă.

În plus, are loc relația $(f^{-1})'(w_0) = \dfrac{1}{f'(z_0)}$.

DEMONSTRAȚIE. Funcția f este echivalentă cu funcția

$$F = (P, Q): D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (P(x, y), Q(x, y)).$$

Matricea jacobiană a lui F în punctul $z_0 = (x_0, y_0)$ este:

$$J_F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}(x_0, y_0)$$

şi atunci, folosind condiţiile $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ şi faptul că $f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}$, rezultă

$$\det J_F(x_0, y_0) = \left(\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2\right)(x_0, y_0) = |f'(z_0)|^2 \neq 0.$$

Putem să aplicăm funcţiei F teorema de inversiune locală din analiza reală şi rezultă că există o vecinătate deschisă U a lui z_0, astfel încît funcţia $F : U \to f(U)$ ($f(U)$ deschisă) este inversabilă şi inversa este de clasă C^1.

Atunci, dacă notăm $w = f(z)$, pentru $z \in U$ avem $w \in f(U)$ şi $z \to z_0 \leftrightarrow w \to w_0$ (am folosit continuitatea lui F şi F^{-1}). Rezultă:

$$(f^{-1})'(w_0) = \lim_{w \to w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Vom analiza acum cazul în care derivata unei funcţii olomorfe este identic nulă.

Propoziţia 1.13. Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe domeniul $D \subset \mathbb{C}$, $f = P + iQ$, $P, Q \in C^1(D)$. Atunci $f'(z) = 0$, $(\forall) z \in D$, dacă şi numai dacă f este constantă pe D.

Demonstraţie. Dacă $f = k$ (constantă) pe D, atunci $f'(z) = 0$, $(\forall) z \in D$.

Pentru a demonstra reciproca, conform lemei care precede teorema 1.4, este suficient să arătăm că f este local constantă. Fie $z_0 \in D$ fixat şi $f(z_0) = k = k_1 + ik_2$. Există $r > 0$ astfel încît $B(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\} \subset D$, deoarece D este deschisă. Pentru orice $z_1 = x_1 + iy_1 \in B(z_0; r)$, numărul $x(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$, $t \in [0, 1]$, reprezintă un punct pe segmentul $[z_0, z_1]$.

Funcţia $(t \to P(z(t))) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ este derivabilă în raport cu t şi avem

$$P(z(t))' = \frac{\partial P}{\partial x}(z(t)) \cdot (x_1 - x_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(z(t)) \cdot (y_1 - y_0) = 0,$$

conform ipotezei. Atunci $P(z(t))$ este constantă, $(\forall) t \in [0, 1]$, deci $P(x_1, y_1) = P(x_0, y_0) = k_1$. Cum z_1 a fost ales arbitrar în discul $B(z_0; r)$ rezultă că $P(x, y) = P(x_0, y_0) = k_1$ în acest disc. Analog rezultă că $Q(x, y) = Q(x_0, y_0) = k_2$ în discul $B(z_0; r)$, deci $f(z) = f(z_0) = k$, $(\forall) z \in B(z_0; r)$.

Corolar. Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe domeniul $D \subset \mathbb{C}$.

Atunci f este constantă pe D dacă şi numai dacă cel puţin una din funcţiile $P = \text{Re} f$, $Q = \text{Im} f$, $|f|$, $\arg f$ este constantă pe D.

Demonstraţie. O implicaţie este evidentă. Să presupunem acum că $P = \text{Re} f = k$; atunci $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ pe D şi deci $f' = 0$ pe D, de unde rezultă că

f = constantă. Dacă $Q = \text{Im} f = k_2$, atunci $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$ pe D, deci $f' = 0$ pe D, de unde f = constantă.

Dacă $P^2 + Q^2 = a \neq 0$, atunci $P\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ și $P\frac{\partial P}{\partial y} + Q\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$.

Din relațiile Cauchy–Riemann avem:

$$\begin{cases} P\dfrac{\partial P}{\partial x} + Q\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ Q\dfrac{\partial P}{\partial x} - P\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

deci $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ și $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, adică $f' = 0$ pe D și f = constantă. Dacă $a = 0$, atunci direct $P = Q = 0$ și $f = 0$.

Fie $\arg f = \alpha$ = constant ($\alpha \in (-\pi, \pi]$). Dacă $P = 0$ pe D atunci f = constantă, deci putem presupune că $(\exists) z_0 \in D$ astfel încît $P(z_0) \neq 0$. Atunci, din $\arg f$ = constant rezultă $\frac{Q}{P} = b$ = constant sau $Q - bP = 0$ în D (din continuitate, repetînd raționamentul din propoziție). Funcția $g = (-b - i)f$ are $\text{Re}\, g = Q - bP = 0$ și fiind olomorfă, este constantă pe D. Atunci și f este constantă pe D.

TEOREMA 1.14. Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu și $f : D \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe D. Fie $f = P + iQ$, $P, Q \in C^1(D)$ și $f'(z) \neq 0$, $(\forall) z \in D$. Atunci $f(D)$ este un domeniu.

DEMONSTRAȚIE. Din faptul că f este olomorfă pe D rezultă că f este continuă pe D, deci $f(D)$ este conex. Să arătăm că $f(D)$ este deschis. Pentru orice $w = f(z) \in f(D)$, conform teoremei 1.12 de inversare locală, există o vecinătate deschisă $U_w \ni z$ $(U_w \subset D)$ astfel încît $f(U_w)$ să fie deschisă $(w \in f(U_w) \subset f(D))$.

Atunci $f(D) = \bigcup_{w \in f(D)} f(U_w)$, deci $f(D)$ este deschis, adică $f(D)$ este domeniu.

COROLARUL 1 (TEOREMA de inversare globală). Fie $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfă pe domeniul $D \subset \mathbb{C}$, $f = P + iQ$, $P, Q \in C^1(D)$, $f'(z) \neq 0$ $(\forall) z \in D$ și fie f injectivă. Atunci funcția $f^{-1} : f(D) \to D$ este olomorfă pe $f(D)$.

DEMONSTRAȚIE. Conform teoremei anterioare $f(D)$ este un domeniu. Restricția $f : D \to f(D)$ este bijectivă, deci există $f^{-1} : f(D) \to D$. Conform teoremei de inversare locală f^{-1} este olomorfă în orice punct $w \in f(D)$.

OBSERVAȚIE. Se poate arăta că, în ipoteza mai slabă că f olomorfă și neconstantă, rezultă $f(D)$ domeniu. De asemenea se poate arăta că dacă f este olomorfă și injectivă, atunci $f'(z) \neq 0$, $(\forall) z \in D$.

COROLARUL 2. a) Orice ramură continuă a logaritmului pe $\mathbb{C} \setminus T$ este olomorfă și are derivata $\frac{1}{z}$.

b) Orice ramură continuă a radicalului pe $\mathbb{C} \setminus T$ este olomorfă.

DEMONSTRAŢIE. a) Aplicăm teorema de inversare globală funcţiei $z = f(w) = e^w$, $f : B_k \to \mathbb{C} \setminus T$, unde $B_k = \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi + 2k\pi < \operatorname{Im} w < \pi + 2k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Aplicăm teorema de inversare globală funcţiei $z = f(w) = w^n$, $f : D_k \to \mathbb{C} \setminus T$, unde $D_k = \left\{w \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n} < \arg w < \frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right\}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

1.6. Transformări conforme

Fie $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to D \subset \mathbb{C}$ două drumuri netede (de clasă C^1 şi nesingulare), astfel încît să existe $t_0 \in [a, b]$ cu $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = z_0$. Unghiul θ dintre cele două drumuri (curbe) în punctul lor comun z_0 este prin definiţie unghiul dintre vectorii tangenţi la ele în z_0, măsurat în sens trigonometric direct. Dacă θ_1, θ_2 sînt unghiurile făcute de cei doi vectori tangenţi cu semiaxa Ox, atunci $\theta = \theta_2 - \theta_1$ (figura VII.17).

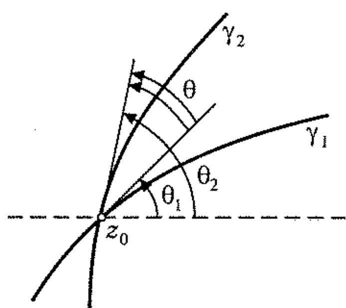


Figura VII.17.

Fie $f : D \to \mathbb{C}$, D domeniu în $\mathbb{C}$, $f = P + iQ$, $P, Q \in C^1(D)$. Atunci $\tilde{\gamma}_1 = f \circ \gamma_1$ şi $\tilde{\gamma}_2 = f \circ \gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{C}$ sînt două drumuri de clasă C^1 ce au în comun punctul $w_0 = f(z_0)$, numite **imaginile** lui γ_1 şi respectiv γ_2 prin f.

Să presupunem că cele două drumuri $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ sînt nesingulare; atunci putem defini unghiul lor în punctul w_0. Vom spune că f **păstrează unghiurile în punctul** z_0 dacă pentru orice două drumuri netede (adică de clasă C^1 nesingulare) γ_1, γ_2 care trec prin z_0, $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ *sînt* netede şi unghiul dintre $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ este egal cu unghiul dintre γ_1, γ_2.

DEFINIŢIA 1.16. Fie $A, B \subset \mathbb{R}^2$ doi deschişi şi $F : A \to B$ o transformare punctuală. Funcţia F se numeşte **transformare conformă a lui** A **pe** B dacă au loc proprietăţile:

1) $F \in C^1(A)$;

2) F este bijectivă;

3) F păstrează unghiurile în orice punct din A.

Transformările conforme sînt numite uneori şi **reprezentări conforme**.

În legătură cu transformările conforme, se pun în mod natural două probleme:

a) fiind dat un domeniu $A \subset \mathbb{C}$ şi o funcţie olomorfă $f : A \to \mathbb{C}$, să se determine $B = f(A)$;

b) fiind date două domenii A, B în $\mathbb{C}$ să se determine (dacă este posibil) o transformare conformă a lui A pe B. Nu vom studia aceste probleme în cazul general. Un rezultat fundamental este cuprins în

TEOREMA 1.15. Fie $f: D \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe domeniul $D \subset \mathbb{C}$, $f = P + iQ$, $P, Q \in C^1(D)$, f injectivă și $f'(z) \neq 0$, $(\forall)\, z \in D$. Atunci f este o transformare conformă a lui D pe $f(D)$.

DEMONSTRAȚIE. Din teorema 1.14, rezultă că $f(D)$ este domeniu, deci funcția $f: D \to f(D)$ este de clasă C^1 și este bijectivă. Rămîne de arătat că f păstrează unghiurile în orice punct $z_0 \in D$. Fie $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to D$ două drumuri netede astfel încît $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = z_0$, pentru un $t_0 \in [a, b]$. Fie

$$\tilde{\gamma}_1 = f \circ \gamma_1,\ \tilde{\gamma}_2 = f \circ \gamma_2 : [a, b] \to f(D) \text{ și fie } w_0 = f(z_0).$$

Vectorii tangenți la γ_1, respectiv γ_2, în z_0 sînt dați de $\gamma_1'(t_0)$, respectiv $\gamma_2'(t_0)$, iar vectorii tangenți la $\tilde{\gamma}_1$, respectiv $\tilde{\gamma}_2$, în w_0 sînt dați de $\tilde{\gamma}_1'(t_0)$, respectiv $\tilde{\gamma}_2'(t_0)$. Fie $\gamma_1(t) = x_1(t) + iy_1(t)$, $\gamma_2(t) = x_2(t) + iy_2(t)$, $t \in [a, b]$. Avem

$$\tilde{\gamma}_1'(t_0) = \big(P(x_1(t), y_1(t)) + iQ(x_1(t), y_1(t))\big)'_{t_0} =$$

$$= \left[\frac{\partial P}{\partial x}\cdot x_1' + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot y_1' + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cdot x_1' + \frac{\partial Q}{\partial y}\cdot y_1'\right)\right]_{t_0} =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{t_0} \cdot x_1'(t_0) + i\left(-i\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)_{t_0} \cdot y_1'(t_0) = f'(z_0)\cdot\gamma_1'(t_0) \neq 0$$

și analog, $\tilde{\gamma}_2'(t_0) = f'(z_0)\cdot\gamma_2'(t_0) \neq 0$.

Dar unghiul făcut de un vector tangent $\gamma'(t)$ cu axa Ox este $\arg\gamma\,'(t)$, deci unghiul dintre $\tilde{\gamma}_1$ și $\tilde{\gamma}_2$ în punctul $w_0 = f(z_0)$ este egal cu:

$$\tilde{\theta} = \arg\tilde{\gamma}_2'(t_0) - \arg\tilde{\gamma}_1'(t_0) = \arg\gamma_2'(t_0) + \arg f'(z_0) -$$
$$- (\arg\gamma_1'(t_0) + \arg f'(z_0)) = \arg\gamma_2'(t_0) - \arg\gamma_1'(t_0) = \theta,$$

adică f păstrează unghiurile în orice punct $z_0 \in D$.

OBSERVAȚIE. Dacă f păstrează mărimea unghiurilor dar schimbă semnul lor, f se numește **transformare anticonformă**. Se poate arăta că atunci conjugata f este conformă.

EXEMPLE de transformări conforme

1) Fie $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, fixat. Considerăm aplicația $\tau_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to w = z + \alpha$.

Punînd $z = x + iy$, $w = u + iv$, rezultă $u = x + \alpha$, $v = y + b$ și recunoaștem că aplicația τ_α este tocmai translația de vector (a, b) în planul complex. Evident, τ_α este o transformare conformă și mulțimea $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$ formează grup relativ la compunere ($\tau_\alpha \circ \tau_{\alpha'} = \tau_{\alpha+\alpha'}$).

Pentru orice $\theta \in \mathbb{R}$, aplicația $\rho_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to w = ze^{i\theta}$ se numește **rotație de unghi** θ în jurul originii. Într-adevăr, $|w| = |z| \cdot |e^{i\theta}| = |z|$ și $\arg w = \arg z + \theta \pmod{2\pi}$, iar din relația $u + iv = (x + iy)(\cos\theta + i\sin\theta)$, rezultă $u = x\cos\theta - y\sin\theta$, $v = x\sin\theta + y\cos\theta$ și recunoaștem formulele rotației în plan. Mulțimea rotațiilor $\{\rho_\theta\}\theta\in\mathbb{R}$ este evident grup relativ la compunere

$$(\rho_\theta \circ \rho_{\theta'} = \rho_{\theta+\theta'}).$$

De asemenea, pentru orice $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ se poate considera **omotetia de raport** k în raport cu originea $\omega_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to w = kz$; evident $|w| = k|z|$ și $\arg w = \arg z$ și ω_k reprezintă din nou o transformare conformă a planului complex pe el însuși. Mulțimea $\{\omega_k\}_{k>0}$ este un grup, deoarece $\omega_k \circ \omega_{k'} = \omega_{kk'}$ pentru orice $k > 0$, $k' > 0$ (v. figura. VII.18).

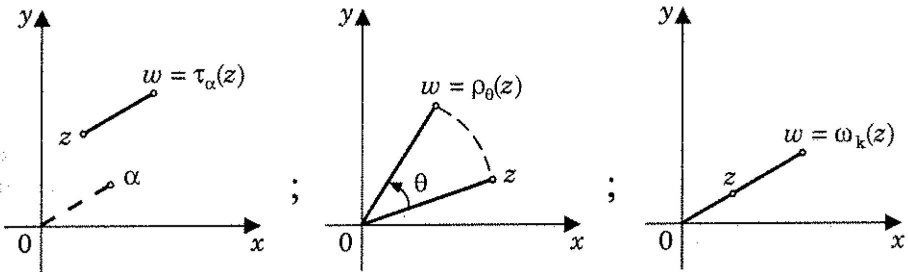


Figura VII.18.

2) Funcția $z = f(w) = e^w$, $f : B \to \mathbb{C} \setminus T$, unde $B = \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} w < \pi\}$, este olomorfă în banda B, este bijectivă și $f'(w) = e^w \neq 0$. Așadar, f stabilește o transformare conformă a benzii B pe $\mathbb{C} \setminus T$.

În mod similar funcția $z = g(w) = w^n$, $g : D \to \mathbb{C} \setminus T$, unde $D = \left\{w \in \mathbb{C}^* \mid -\frac{\pi}{n} < \arg w < \frac{\pi}{n}\right\}$, $n \geq 2$, este olomorfă în unghiul D, este bijectivă și $g'(w) = nw^{n-1} \neq 0$. Prin urmare, g stabilește o transformare conformă a unghiului D pe $\mathbb{C} \setminus T$.

Studiem acum o clasă importantă de funcții complexe, definind totodată transformări remarcabile. Se numesc **funcții omografice** funcțiile de forma

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \text{cu } a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0.$$

(Dacă $ad - bc = 0$, atunci f este constantă, caz pe care îl excludem). Dacă $c \neq 0$, atunci funcția

$$f : \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

este bijectivă, cu inversa $z = f^{-1}(w) = \dfrac{-dw+b}{cw-a}$. Apoi f este olomorfă în $D = \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ și $f'(z) = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$ pentru orice $z \in D$. Conform teoremei 1.15, f este o transformare conformă a lui D pe $\mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$.

Dacă $c = 0$ funcția omografică devine o funcție polinomială de gradul întîi, numită și **transformare afină.**

PROPOZIȚIA 1.16. Orice transformare afină $w = \alpha z + \beta$ ($\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\beta \in \mathbb{C}$) **este compunerea unor rotații, omotetii și translații.**

DEMONSTRAŢIE. Fie $\alpha = re^{i\theta}$ $(r > 0)$ deci $w = re^{i\theta}z + \beta$. Notăm $e^{i\theta} \cdot z = w_1$ şi $rw_1 = w_2$. Atunci $z \to w = \alpha z + \beta$ se scrie ca o compunere de trei funcţii: $z \to w_1 = e^{i\theta} \cdot z$ (rotaţie), $w_1 \to w_2 = rw_1$ (omotetie) şi $w_2 \to w = w_2 + \beta$ (translaţie). Propoziţia este demonstrată.

Analizăm acum cazul special de funcţie omografică cînd $a = d = 0$ şi $b = c \neq 0$ deci $w = f(z) = \dfrac{1}{z}$, $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ numită **inversiunea complexă**.

Avem $|w| = \dfrac{1}{|z|}$ şi $\arg w = -\arg z$. dacă se consideră cercul unitate, atunci pentru orice $z \in \mathbb{C}^*$ există un unic $z' \in \mathbb{C}$ astfel încît O, z, z', să fie coliniare şi $|z| \cdot |z'| = 1$; punctul z' se numeşte transformatul lui z prin **inversiune reală** faţă de cercul unitate. Avem, $\overline{z}' = w$; într-adevăr, $|\overline{z}'| = |z'| = \dfrac{1}{|z|}$ şi $\arg \overline{z}' = -\arg z' = -\arg z = \arg w$. În concluzie, inversiunea complexă este o compunere a inversiunii reale faţă de cercul unitate cu simetria faţă de axa reală $(z' \to \overline{z}')$.

Are loc următoarea

PROPOZIŢIE 1.17. Orice funcţie omografică $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ este o compunere de rotaţii, omotetii, translaţii şi inversiuni complexe.

DEMONSTRAŢIE. Dacă $c = 0$, $w = f(z) = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}$ $(d \neq 0)$ este afină şi se aplică propoziţia 1.16.

Dacă $c \neq 0$, atunci avem:

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz+d)} = \frac{a}{c} + w', \quad w' = \frac{1}{\gamma z + \delta} = \frac{1}{w''},$$

unde $w'' = \gamma z + \delta$. Obţinem atunci compunerea din figura VII.19, care realizează funcţia $w = f(z)$.

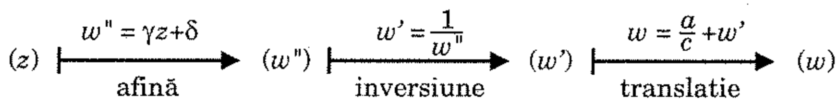


Figura VII.19.

COROLAR. Funcţiile omografice păstrează unghiurile şi cercurile (dreptele se consideră cercuri de rază infinită).

DEMONSTRAŢIE. Din propoziţia anterioară rezultă că o funcţie omografică este o compunere de transformări geometrice care au aceste proprietăţi.

Păstrarea unghiurilor rezultă şi din teorema 1.15. Inversiunea fiind mai puţin cunoscută, vom demonstra că şi ea păstrează cercurile

$$w = f(z) = \frac{1}{z},\ f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*,\ z = x + iy,\ w = u + iv \text{ şi } u = \frac{x}{x^2 + y^2},\ v = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Ecuaţia comună în planul xOy a dreptelor şi cercurilor este:

$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$; dar $x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$, $y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}$, deci obţinem în planul uOv ecuaţia: $d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$, adică tot drepte şi cercuri.

PROPOZIŢIA 1.18. Funcţiile omografice păstrează biraportul.

DEMONSTRAŢIE. Biraportul a patru puncte $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ se defineşte astfel:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \triangleq \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} : \frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}.$$

Dacă $w=f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$, trebuie să arătăm că

$$(w_1, w_2, w_3, w_4)=(z_1, z_2, z_3, z_4),$$

unde $w_j=f(z_j)$, $j=1,2,3,4$. Conform propoziţiei 1.17 este suficient să verificăm acest fapt pentru o funcţie afină şi pentru o inversiune complexă.

Fie $w=az+b$ o funcţie afină. Atunci avem:

$$w_3-w_1=a(z_3-z_1),\ w_3-w_2=a(z_3-z_2),$$
$$w_4-w_1=a(z_4-z_1),\ w_4-w_2=a(z_4-z_2)$$

deci evident

$$\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} : \frac{w_4-w_1}{w_4-w_2} = \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} : \frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}.$$

Fie $w=\dfrac{1}{z}$ inversiunea complexă. Atunci avem:

$$w_3-w_1=\frac{z_3-z_1}{-z_1z_3},\ w_3-w_2=\frac{z_3-z_2}{-z_2z_3},$$
$$w_4-w_1=\frac{z_4-z_1}{-z_1z_4},\ w_4-w_2=\frac{z_4-z_2}{-z_2z_4}$$

şi evident:

$$(w_1, w_2, w_3, w_4)=(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

EXEMPLE. Considerăm alte cîteva exemple de transformări conforme:

1) Fie $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*$, $w=f(z)=z^2$. Deoarece f este olomorfă şi $f'(z)=2z\neq 0$, f este conformă. Avem $u=x^2-y^2$, $v=2xy$. Dreptele $x=a$, $y=b$ (paralele cu axele) sînt aplicate prin f în parabolele $v^2=4a^2(a^2-u)$ şi respectiv

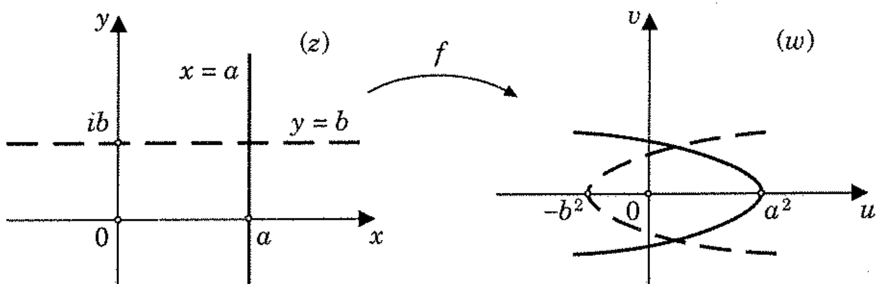


Figura VII.20.

$v^2 = 4b^2(b^2 + u)$. Rețeaua ortogonală de drepte paralele cu axele se transformă într-o rețea de parabole ortogonale (figura VII.20).

2) **Transformarea lui N. E. Jukovski** (1847–1921): $J : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $w = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ este utilizată în aerodinamică, la studiul aripei. Evident, J este olomorfă şi deoarece $J'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$, ea păstrează unghiurile în punctele $z \neq 0, 1, -1$. Să notăm $r = |z|$, $\xi = \frac{x}{r}$ şi $\eta = \frac{y}{r}$. Atunci

$u = \operatorname{Re} J = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\xi$, $v = \operatorname{Im} J = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\eta$. Deoarece $\xi^2 + \eta^2 = 1$, rezultă

$$\frac{u^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1 \quad \text{şi} \quad \frac{u^2}{\xi^2} + \frac{v^2}{\eta^2} = 1.$$

Remarcăm că $D_1 = \{|z| < 1\}$ şi $D_2 = \{|z| > 1\}$ sînt domenii maximale de injectivitate pentru funcția J. Imaginea prin J a circumferinței $|z| = r \neq 1$ va fi în planul (w) elipsa de axe $\frac{1}{r} + r$ şi $\left|\frac{1}{r} - r\right|$; iar circumferința $|z| = 1$ este aplicată pe segmentul $[-1, 1]$ din planul (w). Apoi imaginea oricărei raze $z = ct$, $0 < t < 1$, $|c| = 1$ este o hiperbolă. Toate elipsele şi hiperbolele sînt omofocale (cu focarele -1 şi 1). Discul D_1 este aplicat pe planul (w) cu tăietura $[-1, 1]$ şi aceeaşi proprietate o are domeniul D_2.

În figura VII.21 indicăm sugestiv aceste corespondențe.

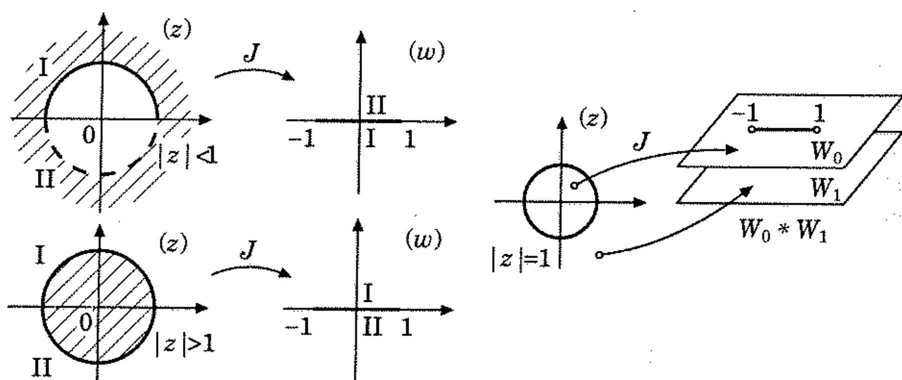


Figura VII.21.

Considerăm două plane complexe W_0, W_1 cu tăietura $[-1, 1]$ numite foi şi le aşezăm unul peste altul, lipite astfel încît marginea inferioară a tăieturii în W_0 să coincidă cu marginea superioară a tăieturii în W_1 şi invers. Se obține

suprafața Riemann $W_0 * W_1$ asociată funcției lui Jukovski și funcția $J : \mathbb{C} \to W_0 * W_1$ este bijectivă și continuă.

3) **Transformarea lui Cayley** $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ stabilește o transformare conformă a semiplanului superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ pe discul unitate $\mathbb{E} = \{\,|w| < 1\}$; este suficient să observăm că dacă $z \in \operatorname{Fr} \mathbb{H}$, adică z este real, atunci $|w| = \dfrac{|z-i|}{|z+i|} = 1$.

Apoi aplicația $q : \mathbb{H} \to \mathbb{C} \setminus T$, $q(z) = -z^2$ este evident olomorfă și bijectivă și pe de altă parte, aplicația $p : \mathbb{E} \to \mathbb{C} \setminus T$, $p(z) = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$. Se verifică imediat că $p^{-1} \circ q$ este tocmai transformarea lui Cayley.

Observație. Am stabilit astfel transformări conforme între domeniile $\mathbb{H}, \mathbb{E}, \mathbb{C} \setminus T$. O teoremă celebră a lui Riemann afirmă că pentru orice domeniu simplu conex $\Delta \neq \mathbb{C}$, există o transformare conformă a lui Δ pe discul unitate $\mathbb{E}$.

§ 2. Integrala complexă

2.1. Integrala unei funcții complexe, proprietăți

Fie $\gamma : [a, b] \to A \subset \mathbb{C}$, unde A este o mulțime deschisă și γ este un drum (curbă) de clasă C^1 pe porțiuni. Fie apoi $f : A \to \mathbb{C}$ o funcție complexă continuă, $f = P + \mathrm{i}Q$.

Vom nota $\gamma(t) = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$, deci $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ sînt funcții de clasă C^1 pe porțiuni. Reamintim că $\gamma^- : [a, b] \to A$ este drumul opus lui γ, $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$; uneori notăm $-\gamma$ în loc de γ^-.

Fie $\Delta_n : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Această diviziune împarte drumul γ în n arce $l_0, l_1, \ldots, l_{n-1}$; începutul arcului l_k este punctul $z_k = \gamma(t_k)$ și sfîrșitul lui l_k este punctul $z_{k+1} = \gamma(t_{k+1})$. Alegem arbitrar în fiecare interval $[t_k, t_{k+1}]$ o valoare τ_k și arcul l_k obținem un punct intermediar $\zeta_k = \gamma(\tau_k) = \xi_k + i\eta_k$ (figura VII.22).

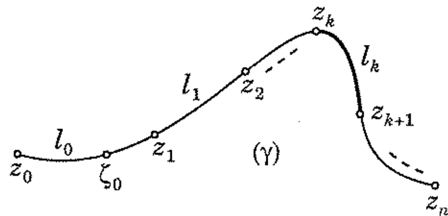


Figura VII.22.

Definiția 2.1. Suma $\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k)$ se numește **sumă integrală complexă** (relativ la $\gamma, f, \Delta_n, \zeta_k$).

Vom nota cu $\nu(\Delta_n) = \max\{(t_1 - t_0), (t_2 - t_1), \ldots, (t_n - t_{n-1})\}$, norma diviziunii Δ_n. Are loc următoarea:

PROPOZIȚIE 2.1. În ipotezele de mai sus, pentru orice alegere a punctelor ζ_k, există limita

$$\lim_{\nu(\Delta_n)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1}-z_k)=\int_\gamma P\mathrm{d}x-Q\mathrm{d}y+i\int_\gamma Q\mathrm{d}x+P\mathrm{d}y$$

(două integrale curbilinii reale).

DEMONSTRAȚIE. Cu notațiile anterioare avem:

$$f(\zeta_k)=P(\xi_k,\eta_k)+iQ(\xi_k,\eta_k);\ z_{k+1}-z_k=(x_{k+1}-x_k)+i(y_{k+1}-y_k),$$

deci

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1}-z_k)=\sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k,\eta_k)(x_{k+1}-x_k)-\sum_{k=0}^{n-1} Q(\xi_k,\eta_k)\cdot(y_{k+1}-y_k)+$$

$$+i\sum_{k=0}^{n-1} Q(\xi_k,\eta_k)(x_{k+1}-x_k)+i\sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k,\eta_k)(y_{k+1}-y_k).$$

Prin ipoteză f este continuă, deci P și Q sînt continue, iar x, y sînt funcții de clasă C^1 pe porțiuni. Rezultă că

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(\xi_k,\eta_k)(x_{k+1}-x_k)\to\int_\gamma P\mathrm{d}x \quad \text{și} \quad \sum_{k=0}^{n-1} Q(\xi_k,\eta_k)(y_{k+1}-y_k)\to\int_\gamma Q\mathrm{d}y, \text{ etc.}$$

DEFINIȚIA 2.2. Limita

$$\lim_{\substack{\nu(\Delta_n)\to 0\\ (orice\,\zeta_k)}}\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1}-z_k)$$

se numește **integrala complexă a funcției f de-a lungul curbei** γ și se notează cu $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.

COROLAR. Avem $\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,\mathrm{d}t$, unde $\gamma: z=z(t),\ t\in[a,b]$.

DEMONSTRAȚIE. Din propoziția anterioară avem

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\int_\gamma P\,\mathrm{d}x-Q\,\mathrm{d}y+i\int_\gamma Q\,\mathrm{d}x+P\,\mathrm{d}y.$$

Dar

$$\int_\gamma P\,\mathrm{d}x-Q\,\mathrm{d}y=\int_a^b\left[P(x(t),y(t))\cdot x'(t)-Q(x(t),y(t))\cdot y'(t)\right]\mathrm{d}t$$

$$\int_\gamma Q\,\mathrm{d}x+P\,\mathrm{d}y=\int_a^b\left[Q(x(t),y(t))\cdot x'(t)+P(x(t),y(t))\cdot y'(t)\right]\mathrm{d}t,$$

deci

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b[P(x(t),y(t))+iQ(x(t),y(t))](x'(t)+iy'(t))\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Așadar, o integrală complexă revine la o pereche de integrale Riemann reale.

PROPOZIȚIA 2.2. (proprietățile integralei complexe). În ipotezele anterioare avem:

a) $\int_{\gamma^-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$ **(schimbarea sensului);**

b) $(\forall)\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ **şi** $g : A \to \mathbb{C}$, **continuă,**

$\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))\,dz = \lambda \int_\gamma f(z)\,dz + \mu \int_\gamma g(z)\,dz$ **(liniaritatea);**

c) Fie $\gamma_1 : [a, b] \to A$, $\gamma_2 : [b, c] \to A$ **drumuri de clasă** C^1 **pe porţiuni cu** $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ **şi** $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ **(juxtapunerea lor). Atunci**

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \quad \textbf{(aditivitatea);}$$

d) $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,ds$;

e) **Fie** L **lungimea drumului** γ **şi fie** $M = \sup_{z\in A} |f(z)| < \infty$. **Atunci**

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le M \cdot L \ \textbf{(limitarea modulului integralei).}$$

DEMONSTRAŢIE. Afirmaţiile a), b), c) rezultă din proprietăţile integralelor curbilinii reale, studiate în anul I.

d) Cu aceleaşi notaţii avem:

$$(1) \quad \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k)\right| \le \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)| \cdot |z_{k+1} - z_k| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)| \cdot \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)| \sqrt{x'^2(\tau_k') + y'^2(\tau_k'')} \cdot (t_{k+1} - t_k),$$

unde la ultima egalitate am aplicat teorema lui Lagrange ($\tau_k', \tau_k'' \in [t_k, t_{k+1}]$), iar $\zeta_k = \gamma(\tau_k)$, $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$, nu a fost încă precizat. Fie $M = \sup_{t\in[a, b]} |f(\gamma(t))|$.

Alegem $\tau_k = \tau_k'$ şi inegalitatea (1) se poate transforma astfel:

$$(2) \quad \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k)\right| \le \sum_{k=0}^{n-1} |f(\gamma(\tau_k'))| \cdot \sqrt{x'^2(\tau_k') + y'^2(\tau_k')} \cdot (t_{k+1} - t_k) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)| \left(\sqrt{x'^2(\tau_k') + y'^2(\tau_k'')} - \sqrt{x'^2(\tau_k') + y'^2(\tau_k')}\right) \cdot (t_{k+1} - t_k).$$

Ţinînd seamă de inegalitatea evidentă

$$\left|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}\right| \le \big||b| - |c|\big|, \ (\forall)\ a, b, c \in \mathbb{R},$$

termenul al doilea T_n din membrul drept al inegalităţii (2) se majorează (în modul) astfel:

$$(3) \quad |T_n| \le M \sum_{k=0}^{n-1} \big||y'(\tau_k'')| - |y'(\tau_k')|\big| (t_{k+1} - t_k).$$

Pentru orice $k = 0, 1,..., n - 1$ pentru care $|y'(\tau_k'')| < |y'(\tau_k')|$ schimbăm notaţia lui τ_k'' cu τ_k' şi reciproc; atunci inegalitatea (3) se scrie astfel:

$$|T_n| \le M\left(\sum_{k=0}^{n-1} |y'(\tau_k'')|(t_{k+1} - t_k) - \sum_{k=0}^{n-1} |y'(\tau_k')|(t_{k+1} - t_k)\right).$$

Deoarece funcţia $|y'|$ este continuă pe porţiuni este integrabilă pe $[a, b]$ şi atunci, făcînd $\nu(\Delta_n) \to 0$, obţinem că $|T_n| \to 0$. Trecînd la limită în inegalitatea (2) obţinem

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,ds.$$

e) Din proprietatea d) obţinem:

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,ds \le M\int_\gamma ds = M \cdot L.$$

EXEMPLE. 1) Reţinem că dacă $\gamma : [a, b] \to A$ este un drum de clasă C^1 pe porţiuni şi dacă $f : A \to \mathbb{C}$ este o funcţie continuă pe deschisul A, atunci punînd $z = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$, avem

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt.$$

În particular, dacă $f(z) \equiv 1$, atunci $\int_\gamma dz = \int_a^b \gamma'(t)\,dt$.

2) Fie $u, v \in \mathbb{C}$ şi γ segmentul care uneşte u, v deci $\gamma(t) = (1 - t)u + tv$, $t \in [0, 1]$. Atunci

$$\int_\gamma dz = \int_0^1 (v - u)\,dt = v - u$$

şi

$$\int_\gamma z\,dz = \int_0^1 [(1 - t)u + tv](v - u)\,dt = \frac{v^2 - u^2}{2}.$$

3) Notînd $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, rezultă că lungimea unui drum γ de clasă C^1 pe porţiuni este $L = \int_\gamma |dz|$ (Recunoaştem că $|dz|$ este de fapt "elementul de arc").

2.2. TEOREMA lui Cauchy

Vom deomonstra acum un rezultat fundamental al lui Cauchy, care stabileşte o proprietate esenţială a funcţiilor olomorfe, din care vom deduce apoi multe alte proprietăţi remarcabile ale lor. Vom face mai întîi cîteva precizări despre topologia curbelor în plan. Se ştie că o curbă închisă jordaniană γ în plan (deci curbă fără autointersecţii în $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$) împarte planul în două domenii disjuncte care au aceeaşi frontieră, $\Gamma = \operatorname{Im}\gamma$; unul din domenii este mărginit (şi se numeşte **interiorul lui** γ notat Int γ), iar celălalt domeniu este nemărginit (şi se numeşte **exteriorul lui** γ). Remarcăm că deşi acest rezultat al lui Jordan pare "intuitiv" simplu, demonstraţia lui riguroasă este dificilă.

Fie $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{C}$ două drumuri parametrizate continue, care au aceleaşi capete: $\alpha = \gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ şi $\beta = \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Vom spune că γ_1 **este omotop cu** γ_2 dacă există o funcţie continuă $\varphi : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ cu proprietăţile:

$$\varphi(t, 0) = \gamma_1(t);\ \varphi(t, 1) = \gamma_2(t),\ (\forall)\ t \in [a, b]$$
$$\varphi(a, u) = \alpha;\ \varphi(b, u) = \beta,\ (\forall)\ u \in [0, 1],$$

şi vom scrie $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Funcţia φ se numeşte **deformare continuă a lui** γ_1 **în** γ_2.

Dacă $\alpha \in \mathbb{C}$ este un punct fixat vom numi **drumul nul (zero) al lui** α, drumul $0 : [a, b] \to \mathbb{C}$, $0(t) = \alpha$, $(\forall)\, t \in [a, b]$. Dacă $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ este un drum închis (continuu) de capăt α ($\gamma(a) = \gamma(b) = \alpha$), vom spune că drumul γ este **omotop cu zero**, şi vom scrie $\gamma \sim 0$, dacă există o deformare continuă a lui γ în 0.

Aşa cum am mai amintit, un domeniu $D \subset C = \mathbb{R}^2$ se numeşte **simplu conex** dacă frontiera sa Fr D este conexă. Se poate arăta că această proprietate a domeniului D este echivalentă cu oricare din următoarele proprietăţi:

a) Orice două drumuri în D cu aceleaşi capete sînt omotope;

b) Orice drum închis în D este omotop cu zero;

c) Orice drum închis jordanian în D are interiorul său conţinut în D.

OBSERVAŢIE. Un domeniu care nu este simplu conex se numeşte domeniu **multiplu conex**.

TEOREMA 2.3. (Cauchy). Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe D astfel încît $P = \operatorname{Re} f$, $Q = \operatorname{Im} f$ să fie de clasă $C^1(D)$. Dacă $\gamma : [a, b] \to D$ este o curbă închisă jordaniană de clasă C^1 pe porţiuni astfel încît compactul Int γ **să verifice condiţiile formulei Green–Riemann, atunci** $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

DEMONSTRAŢIE. Ipotezele asupra funcţiilor P, Q şi asupra lui γ permit aplicarea formulei Green–Riemann:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma P\, dx - Q\, dy + i\int_\gamma Q\, dx + P\, dy = \iint_K \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy +$$

$$\iint_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx \wedge dy, \quad \text{unde } K = \overline{\operatorname{Int} \gamma}.$$

Deoarece f este olomorfă, au loc condiţiile $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ deci cele două integrale duble sînt nule.

OBSERVAŢIE. Teorema 2.3 se poate demonstra în condiţii mai generale:

Dacă $f : D \to \mathbb{C}$ este olomorfă într–un deschis D şi γ este un drum închis jordanian de clasă C^1 pe porţiuni, situat în D şi omotop cu zero, atunci $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

COROLAR. Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe un domeniu simplu complex $D \subset \mathbb{C}$ şi fie γ_1, γ_2 două drumuri de clasă C^1 avînd aceleaşi capete şi situate în D. Atunci

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz.$$

DEMONSTRAŢIE. Fie $\gamma = \gamma_2 \cup \gamma_1^-$, juxtapunerea lui γ_2 cu opusul lui γ_1 (v. figura VII.23). Drumul γ este închis şi aplicăm teorema 2.3. Rezultă

$$0 = \int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz - \int_{\gamma_2} f(z)\, dz,$$

de unde corolarul.

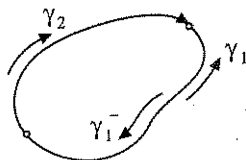


Figura VII.23.

Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe D; fixăm un punct $z_0 \in D$. Dacă $z \in D$ este un punct arbitrar, iar $\gamma : [a, b] \to D$ este un drum de clasă C^1 pe porţiuni, oarecare, cu capetele $z_0 = \gamma(a)$ şi $z = \gamma(b)$, atunci funcţia $F(z) = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$ nu depinde (conform corolarului anterior) de alegerea drumului γ, ci numai de capetele z_0 şi z. Vom nota

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta.$$

TEOREMA 2.4. Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă şi $z_0 \in D$ fixat. Atunci funcţia $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$ este olomorfă pe D şi $F'(z) = f(z)$, $(\forall)\, z \in D$.

DEMONSTRAŢIE. Fie $z_1 \in D$ un punct oarecare. Deoarece D este deschis există o bilă $B(z_1, \rho) \subset D$, cu $\rho > 0$. Pentru orice $z \in B(z_1, \rho)$ $z \neq z_1$, fie $\lambda(t) = z_1 + t(z - z_1)$, $\lambda : [0, 1] \to D$, drumul care are imaginea segmentul $\overline{z_1 z}$ în D. Dacă γ este un drum de clasă C^1 pe porţiuni ce uneşte în D punctele z_0 şi z_1, atunci $F(z_1) = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$. Drumul $\gamma \cup \lambda$ uneşte punctele z_0 şi z, deci $F(z) = \int_{\gamma\cup\lambda} f(\zeta)\,d\zeta$. Atunci avem

$$F(z) - F(z_1) = \int_{\gamma\cup\lambda} f(\zeta)\,d\zeta - \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_\lambda f(\zeta)\,d\zeta;$$

$$\frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) = \frac{\int_\lambda f(\zeta)\,d\zeta - f(z_1)(z - z_1)}{z - z_1} = \frac{\int_\lambda (f(\zeta) - f(z_1))\,d\zeta}{z - z_1}.$$

Funcţia f este continuă în z_1, deci $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, \delta > 0$ astfel încît dacă $|z - z_1| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_1)| < \varepsilon$. Alegînd $\delta \le \rho$ obţinem:

$$\left|\frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1)\right| = \left|\frac{\int_\lambda (f(\zeta) - f(z_1))\,d\zeta}{z - z_1}\right| \le \frac{\varepsilon \cdot \text{lung}\,\lambda}{|z - z_1|} = \varepsilon.$$

În concluzie există.

$$\lim_{z \to z_1} \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} = f(z_1) = F'(z_1), \quad (\forall)\, z_1 \in D.$$

DEFINIŢIA 2.3. Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe D. O funcţie $\Phi : D \to \mathbb{C}$ olomorfă pe D cu $\Phi'(z) = f(z)$, $(\forall)\, z \in D$, se numeşte **primitivă a lui f pe D.**

COROLAR. Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu simplu conex şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe D. Atunci orice primitivă $\Phi : D \to \mathbb{C}$ a lui f este de forma:

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta + c, \quad \text{unde } c \in \mathbb{C} \textbf{ este o constantă.}$$

DEMONSTRAȚIE. Conform teoremei 2.6, funcția

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,\quad (\forall)\, z\in D,$$

este primitivă a lui f pe D ($z_0 \in D$ este fixat). Fie $G(z)=\Phi(z)-F(z)$, $G: D\to\mathbb{C}$.

Funcția G este olomorfă pe D și $G'(z)=\Phi'(z)-F'(z)=f(z)-f(z)=0$, $(\forall)\, z\in D$. Atunci din prop. 1.13, rezultă că $G(z)=c$, $c\in\mathbb{C}$, constantă, $(\forall)\, z\in D$. Deci

$$\Phi(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta+c.$$

OBSERVAȚIE. Punînd în formula anterioară $z=z_0$, obținem $\Phi(z_0)=c$, deci

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\Phi(z)-\Phi(z_0)\quad \textbf{(formula Leibniz–Newton)}.$$

Vom aplica acum teorema Cauchy pentru a obține o variantă a teoremei Cauchy pentru domenii multiplu conexe.

TEOREMA 2.5. Fie $D\subset\mathbb{C}$ un domeniu, K un compact cu frontiera $\Gamma=\mathrm{Fr}\,K\subset D$ de clasă C^1 pe porțiuni, conexă, jordaniană, orientată pozitiv. Fie Δ interiorul curbei Γ și $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m:[a,b]\to\Delta$ curbe închise de clasă C^1 pe porțiuni, jordaniene, orientate pozitiv; fie $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_m$ interioarele curbelor închise $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m$. Fie $\tilde{D}\subset D$ un domeniu care conține compactul $\overline{\Delta}\setminus(\Delta_1\cup\Delta_2\cup\ldots\cup\Delta_m)$ și fie $f:\tilde{D}\to C$ o funcție olomorfă. Atunci

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{m}\int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

DEMONSTRAȚIE. Ipotezele teoremei sînt ilustrate în figura VII.24.

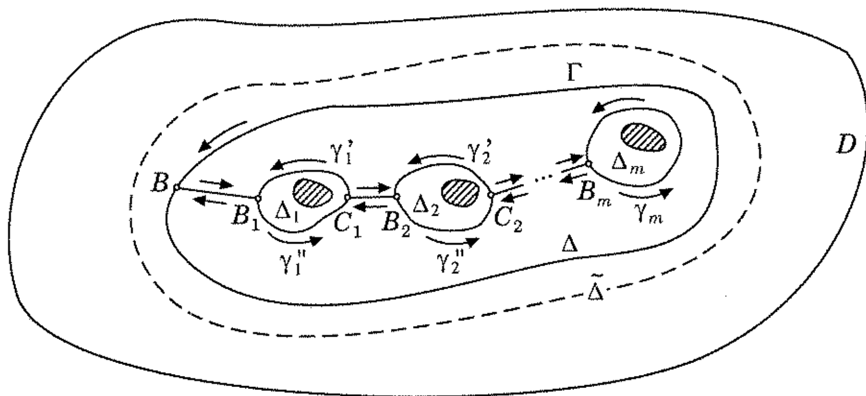


Figura VII.24.

Fie punctele $B\in \Gamma, B_1, C_1 \in \gamma_1,..., B_{m-1}, C_{m-1} \in \gamma_{m-1}, B_m \in \gamma_m$ alese astfel încît împart curbele γ_k în două curbe γ_k', γ_k''. Considerăm în D drumul închis

$$\gamma = \Gamma \cup BB_1 \cup (-\gamma_1') \cup C_1B_2 \cup (-\gamma_2') \cup ... \cup C_{m-1}B_m \cup (-\gamma_m) \cup$$
$$\cup B_mC_{m-1} \cup (-\gamma''_{m-1}) \cup ... \cup B_2C_1 \cup (-\gamma_1'') \cup B_1B,$$

care este omotop cu zero în domeniul $\widetilde{D}$, În care funcția f este olomorfă. Conform observației de după teorema 2.3, afirmația teoremei Cauchy este adevărată și în acest caz, deci:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Ținînd seama de proprietățile integralei complexe, obținem:

$$0 = \int_\gamma f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz + \int_{BB_1} f(z)dz - \int_{\gamma_1'} f(z)dz + \int_{C_1B_2} f(z)dz - ... +$$
$$+\int_{B_2C_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1''} f(z)\,dz + \int_{B_1B} f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)dz - \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} f(z)dz,$$

deci

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz.$$

2.3. Formula integrală Cauchy

Vom stabili în acest subparagraf o formulă deosebit de importantă, cu numeroase aplicații. Ea va permite, între altele, stabilirea unor legături între "date pe contur" și "date în interiorul conturului", precum și stabilirea unei formule de reprezentare integrală a funcțiilor olomorfe și a derivatelor acestora. Este necesar mai întîi un rezultat pregătitor, elementar dar foarte important.

Fie $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r > 0\}$ un cerc considerat ca un drum închis jordanian de clasă C^1, orientat pozitiv (parcurs o singură dată în sens trigonometric direct).

LEMA 2.6. Pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ avem

$$\int_C (z-a)^n\,dz = \begin{cases} 0\ ; & n \neq -1 \\ 2\pi i\ ; & n = -1. \end{cases}$$

DEMONSTRAȚIE. Fie $z(t) = a + re^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$, parametrizarea cercului. Avem $z'(t) = rie^{it}$ și din corolarul propoziției 2.1 rezultă că:

$$\int_C (z-a)^n\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} (re^{it})^n ri\,e^{it}\,dt = r^{n+1} i \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)t}\,dt.$$

Dacă $n \neq -1$, atunci

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)t}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+1)t\,dt + i \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+1)t\,dt = 0.$$

Dacă $n = -1$, atunci

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i0t} dt = 2\pi \text{ deci } \int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

OBSERVAȚIE. Putem arăta (altfel!) că în $\mathbb{C}^*$ nu există ramuri continue ale logaritmului (deci nici ale argumentului). Dacă $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ ar fi o astfel de funcție, atunci ar rezulta că $\varphi'(z) = \frac{1}{z}$, $(\forall) z \in \mathbb{C}^*$ și luînd $C = \{|z| = 1\}$, am avea $\int_C \frac{1}{z}\, dz = \int_C \varphi'(z)\, dz = 0$, cf. formulei Leibniz–Newton; dar lema 2.6 arată că $\int_C \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$; absurd.

TEOREMA 2.7. Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu și $f : D \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe D. Fie $\overline{\Delta} \subset D$, unde Δ este un domeniu simplu conex, mărginit cu frontiera γ o curbă închisă jordaniană, de clasă C^1 pe porțiuni, orientată pozitiv. Atunci, pentru orice punct $a \in \Delta$ fixat, are loc formula:

(1) $f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz$ **(formula integrală Cauchy).**

DEMONSTRAȚIE. Alegem două discuri

(2) $\overline{B}(a;\ r_0) \subset \overline{B}(a;\ \rho) \subset \Delta$,

și fie C frontiera discului $\overline{B}(a,\ \rho)$ orientată pozitiv. În domeniul $D \setminus \overline{B}(a;\ r_0)$ funcția $\frac{f(z)}{z-a}$ este olomorfă și putem aplica teorema 2.5 (figura VII.25).

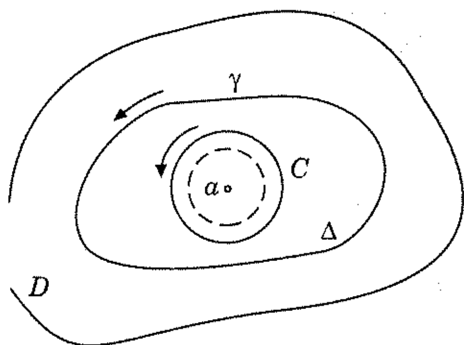


Figura VII.25.

Rezultă că

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_C \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

Acum putem scrie:

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_C \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\, dz + \int_C \frac{f(a)}{z-a}\, dz =$$

$$= J + f(a) \int_C \frac{dz}{z-a} = J + 2\pi i f(a),$$

(conform lemei 2.6), unde cu J am notat prima integrală din membrul drept al relației de mai sus. Vom arăta că $J = 0$. Funcția f este olomorfă în a, deci continuă în a. Pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$, $(\exists)\ \delta > 0$, astfel încît

$$|z-a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

Deoarece discurile din condiția (2) erau alese arbitrar, vom alege $\rho < \delta$ și atunci rezultă:

$$|J| = \left| \int_C \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \right| \le \int_C \frac{|f(z) - f(a)|}{|z-a|} ds < \frac{\varepsilon}{2\pi\rho} \int_C ds = \varepsilon.$$

Dar ε este arbitrar ($\varepsilon \to 0$) deci obținem $J = 0$ și atunci

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

COROLARUL 1. (TEOREMA de medie). Fie $D\subset\mathbb{C}$ un domeniu, $f:D\to\mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe D, $z_0\in D$ un punct fixat și discul $\overline{B}(z_0;\rho)\subset D$. Atunci

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{it})\,dt.$$

DEMONSTRAȚIE. Dacă C este frontiera discului $B(z_0;\rho)$, din formula integrală Cauchy rezultă:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz,\quad z=z_0+\rho e^{it},\ t\in[0,2\pi].$$

Deci $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+\rho e^{it})}{\rho e^{it}}\cdot\rho i e^{it}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{it})dt.$

COROLARUL 2 (TEOREMA maximului modulului).

a) Dacă funcția $f:D\to\mathbb{C}$ este olomorfă pe domeniul D și există un punct $z_0\in D$ astfel încît $|f(z)|\le|f(z_0)|$, $(\forall)\ z\in D$, atunci f este constantă pe D.

b) Dacă funcția $f:\overline{D}\to\mathbb{C}$ este olomorfă pe domeniul mărginit D și este continuă pe $\overline{D}$, atunci

$$\max_{z\in\overline{D}}|f(z)|=\max_{z\in \mathrm{Fr}\,D}|f(z)|.$$

DEMONSTRAȚIE. a) Alegem $R>0$ astfel încît $B(z_0;R)\subset D$. Pentru orice $r\in(0,R)$ avem

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz,$$

unde $C_r=\mathrm{Fr}\,B(z_0,r)$. Alegînd parametrizarea lui C_r de forma $z(t)=z_0+re^{2\pi i t}$, $t\in[0,1]$, obținem:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\frac{f(z(t))}{re^{2\pi i t}}\,r2\pi i e^{2\pi i t}\,dt=\int_0^1 f(z(t))\,dt.$$

De aici și din ipoteză deducem:

$$|f(z_0)|\le\int_0^1|f(z(t))|\,dt\le|f(z_0)|,$$

$$\text{deci}\quad |f(z_0)|=\int_0^1|f(z(t))|\,dt,\quad \text{adică}\int_0^1|f(z_0)|\,dt=\int_0^1|f(z(t))|\,dt,$$

$$\text{sau}\quad\int_0^1\big(|f(z_0)|-|f(z(t))|\big)\,dt=0.$$

Dar funcția de sub integrală este reală, continuă și pozitivă, deci rezultă că

$$|f(z(t))|=|f(z_0)|,\ (\forall)\ t\in[0,1].$$

Cum $r\in(0,R)$ a fost ales arbitrar rezultă că $|f(z_0)|=|f(z)|$, $(\forall)\ z\in B(z_0;R)$.

Fie $k=|f(z_0)|$ și fie funcția $F:D\to\mathbb{R}$, $F(z)=|f(z)|$, care este continuă (f

fiind olomorfă). Submulțimea lui D, $F^{-1}(\{k\})$ este închisă (deoarece $\{k\} \subset \mathbb{R}$ este închisă și F este continuă) și deschisă (deoarece $B(z_0; R) \subset F^{-1}(\{k\})$ și pentru orice alt punct $z_1 \in F^{-1}(\{k\})$ se repetă raționamentul anterior). Dar D este conex, deci $D \setminus F^{-1}(\{k\}) = \phi$, adică $D = F^{-1}(\{k\})$. Atunci funcția $F = |f|$ este constantă pe D, deci f este constantă pe D (conform corolarului propoziției 1.13).

b) Funcția f fiind continuă pe compactul $\overline{D}$ își atinge maximul într-un punct $z_0 \in \overline{D}$. Dacă $z_0 \in D$, conform punctului a) rezultă că f este constantă pe D și, din continuitate, este constantă și pe $\overline{D}$, deci

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in \mathrm{Fr}\, D} |f(z)|.$$

Dacă $z_0 \in \mathrm{Fr}D$ atunci, evident, are loc egalitatea cerută.

OBSERVAȚIE. În condițiile b) din corolarul 2, dacă f este diferită de zero în fiecare punct din $\overline{D}$, rezultă că

$$\max_{z \in \overline{D}} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = \max_{z \in \mathrm{Fr}\, D} \left| \frac{1}{f(z)} \right| \quad \text{deci} \quad \min_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \min_{z \in \mathrm{Fr}\, D} |f(z)|.$$

COROLARUL 3 (formula de reprezentare integrală). În condițiile teoremei 2.7, pentru orice $z \in D$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(u)}{u - z} \, du.$$

Aceasta este doar o retranscriere a teoremei 2.7, cu notații schimbate.

Este interesant de arătat că matematicianul român D. Pompeiu a stabilit în 1912 o generalizare a formulei anterioare, fără a presupune că f este olomorfă: Anume, dacă $f : D \to \mathbb{C}$ este o funcție de clasă C^1 (adică $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ sînt de clasă C^1 pe D) și dacă B este un disc astfel încît $\overline{B} \subset D$, atunci $(\forall)\, z \in B$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{Fr}\, B} \frac{f(u)}{u - z} \, du + \frac{1}{2\pi i} \iint_B \frac{\partial f}{\partial \overline{u}} \cdot \frac{1}{u - z} \, du \wedge d\overline{u}$$

(dacă $u = x + iy$, atunci $du \wedge d\overline{u} = 2i\, dx \wedge dy$). Această formulă a fost utilizată în ultimii ani în teoria funcțiilor complexe de mai multe variabile.

DEFINIȚIA 2.4. Fie $\gamma : [a, b] \to \mathrm{C}$ un drum închis de clasă C^1 pe porțiuni (γ funcție continuă) și $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, unde $\Gamma = \mathrm{Im}\, \gamma$. Se numește **indexul lui** γ în raport cu punctul z_0 numărul

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

TEOREMA 2.8. Indexul are următoarele proprietăți:

a) $n(-\gamma, z_0) = -n(\gamma, z_0)$;

b) $n(\gamma_1 \cup \gamma_2, z_0) = n(\gamma_1, z_0) + n(\gamma_2, z_0)$ (γ_1, γ_2 **ca în DEFINIȚIA 2.4**).

c) **Dacă** γ_1 **este omotop cu** γ_2 **în domeniul** $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, **atunci** $n(\gamma_1, z_0) = n(\gamma_2, z_0)$;

d) $n(\gamma, z_0)$ **este un număr întreg;**

e) **Funcția** $(z_0 \to n(\gamma, z_0)) : \mathbb{C} \setminus \Gamma \to \mathbb{R}$ **este constantă pe orice componentă conexă a lui** $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

f) **Dacă $\gamma = \text{Fr}\, B(z_0; r)$ jordaniană şi orientată pozitiv şi $z_1 \in B(z_0; r)$, atunci $n(\gamma, z_1) = 1$.**

g) **Deschisul $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ are o singură componentă conexă nemărginită. Dacă z_0 se află în această componentă atunci $n(\gamma, z_0) = 0$.**

DEMONSTRAŢIE. a) şi b) sînt proprietăţi simple ale integralei complexe.

c) Dacă $\gamma_1 \sim \gamma_2$ atunci $\gamma_1 \cup (-\gamma_2) \sim 0$ şi aplicînd teorema Cauchy funcţiei olomorfe în $C \setminus \{z_0\}$, $\dfrac{1}{z - z_0}$, rezultă $\displaystyle\int_{\gamma_1 \cup (-\gamma_2)} \frac{1}{z - z_0} \mathrm{d}z = 0$, deci $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}$, adică $n(\gamma_1, z_0) = n(\gamma_2, z_0)$.

d) Fie $z = z(t)$ ecuaţia parametrică a lui γ şi fie $h : [a, b] \to C$,

$$h(t) = \int_a^t \frac{z'(t)}{z(t) - a} \mathrm{d}t.$$

Funcţia h este derivabilă pe $[a, b]$ şi $h'(t) = \dfrac{z'(t)}{z(t) - z_0}$ (se verifică simplu derivînd părţile reală şi imaginară; aici h este o funcţie de variabilă reală t).

Să calculăm derivata funcţiei $g(t) = e^{-h(t)}(z(t) - z_0)$, $t \in [a, b]$. Obţinem

$$g'(t) = -\frac{z'(t)}{z(t) - z_0} \cdot e^{-h(t)} \cdot (z(t) - z_0) + e^{-h(t)} \cdot z'(t) = 0,$$

$(\forall)\, t \in [a, b]$, cu excepţia, eventual, a unui număr finit de puncte unde funcţia $z'(t)$ nu există. Deoarece g este continuă rezultă că g este constantă pe intervalul $[a, b]$, deci

$$e^{-h(t)}(z(t) - z_0) = e^{-h(a)}(z(a) - z_0).$$

Dar $h(a) = 0$, de unde rezultă că $e^{h(t)} = \dfrac{z(t) - z_0}{z(a) - z_0}$.

Punem $t = b$ şi obţinem $e^{h(b)} = \dfrac{z(b) - z_0}{z(a) - z_0} = 1$, căci $z(a) = z(b)$, drumul γ fiind închis. Atunci $h(b) = 2k\pi\mathrm{i}$ şi $n(\gamma, z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} h(b) = k \in \mathbb{Z}$.

e) Din proprietăţile integralelor reale rezultă că funcţia $I(z_0) = n(\gamma, z_0)$ (γ fixat) este continuă pe $C \setminus \Gamma$, deoarece $\dfrac{1}{z - z_0}$ este o funcţie continuă în raport cu $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Dacă G este o componentă conexă a lui $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, atunci $I(G)$ este conex şi cum $I(G) \subset \mathbb{Z}$ (punctul d)), rezultă că $I(G) = \{k\} \subset Z$, adică I este constantă pe G.

f) Dacă $z_1 = z_0$ conform lemei 2.6 rezultă că $n(\gamma, z_0) = 1$. Dar mulţimea $B(z_0; r)$ este conexă şi atunci, conform punctului e), $n(\gamma, z_1) = n(\gamma, z_0) = 1$ (indexul fiind constant pe componenta conexă $B(z_0; r)$).

g) Mulţimea Γ fiind compactă este mărginită, deci există $r > 0$ astfel încît $\Gamma \subset B(0; r)$. Atunci $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0; r)} \subset \mathbb{C} \setminus \Gamma$ şi există o unică componentă conexă a lui $C \setminus \Gamma$, care conţine mulţimea conexă $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0; r)}$ (exteriorul unui disc), şi este

deci, nemărginită. Celelalte componente conexe sînt disjuncte de $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0; r)}$ deci se află în $\overline{B(0; r)}$ adică sînt mărginite.

Fie $z_n \in G$, $z_n \to \infty$. Avem:

$$0 \le |n(\gamma, z_n)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{dz}{z - z_n}\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{1}{|z - z_n|}\, ds \le \frac{L}{2\pi} \cdot \frac{1}{|z_n| - r},$$

deoarece $|z - z_n| \ge |z_n| - |z| \ge |z_n| - r$ (L este lungimea lui γ). Dar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{L}{2\pi} \cdot \frac{1}{|z_n| - r} = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} n(\gamma, z_n) = 0$. Deoarece indexul ia valori întregi pe G şi este constant pe G rezultă că $n(\gamma, z_0) = 0$ $(\forall)$ $z_0 \in G$.

EXEMPLU. Fie $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ drumul $z = \gamma(t) = e^{ikt}$ (circumferinţa unitate parcursă pozitiv de k ori, $k \in \mathbb{Z}$). Indexul lui γ în raport cu originea $z_0 = 0$ va fi

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - 0} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ik e^{ikt}\, dt}{e^{ikt}} = k.$$

Conform proprietăţii e), pentru orice z_0 cu $|z_0| < 1$ indexul este tot k, iar dacă $|z_0| > 1$, indexul este nul.

În general, indexul lui γ în raport cu un punct z_0 arată "de cîte ori γ înconjoară z_0 ".

OBSERVAŢIE. Se poate arăta că dacă $f : D \to \mathbb{C}$ este o funcţie olomorfă pe domeniul D şi dacă $\gamma : [a, b] \to D$ este un drum închis, de clasă C^1 pe porţiuni, $\Gamma = \operatorname{Im} \gamma$, atunci $(\forall)$ $z_0 \in D \setminus \Gamma$ avem $n(\gamma, z_0) \cdot f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$ **(formula integrală Cauchy pentru un drum care nu este neapărat jordanian).**

§ 3. Analiticitate şi olomorfie

3.1. Funcţii analitice complexe

Fie $\mathbb{C}[[X]]$ inelul seriilor formale cu coeficienţi complecşi. O serie formală $S = \sum\limits_{n\ge 0} c_n X^n$ se numeşte **serie de puteri convergetă** dacă există $z \in \mathbb{C}^*$ astfel încît seria numerică $\sum\limits_{n\ge 0} c_n z^n$ să fie convergentă. Submulţimea lui $\mathbb{C}[[X]]$ a seriilor de puteri convergente se notează cu $\mathbb{C}\{X\}$ şi este un inel comutativ cu unitate. Se spune că seria S este **absolut convergentă** în punctul $z \in \mathbb{C}^*$ dacă seria numerică reală $\sum\limits_{n\ge 0} |c_n||z|^n$ este convergentă.

Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime nevidă; se spune că seria S este **uniform convergentă pe** A dacă şirul de funcţii $S_m(z) = \sum\limits_{n=0}^{m} c_n z^n$ este uniform convergent pe

A. Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ un punct fixat; seria de puteri $\sum_{n\geq 0} c_n(z-z_0)^n$ se numeşte **serie de puteri centrată în punctul z_0 definită de seria S.**

Teoria seriilor de puteri în corpul complex $\mathbb{C}$ este analoagă teoriei în corpul real $\mathbb{R}$. Astfel, se demonstrează la fel afirmațiile următoare (Abel–Cauchy–Hadamard):

Fie $S = \sum_{n\geq 0} c_n X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ şi $z_0 \in \mathbb{C}$ fixat.

a) Presupunem că seria S este convergentă în punctul $z_1 \neq z_0$ (deci este convergentă) şi fie $\rho = |z_1 - z_0| > 0$. Atunci seria de puteri centrată în z_0 este absolut convergentă în orice punct z din discul $|z - z_0| < \rho$ şi uniform convergentă în discul compact $|z - z_0| \leq r$, pentru orice r cu $0 < r < \rho$.

Fie acum

$$R = \sup\left\{ r \in \mathbb{R} \,|\, r \geq 0 \text{ seria } \sum_{n\geq 0} |c_n| r^n \text{ convergentă} \right\};$$

evident, $0 \leq R \leq \infty$ şi R se numeşte **raza de convergență a seriei** S, iar discul $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ se numeşte **discul de convergență** al seriei S. Facem următoarea convenție: pentru $R = 0$, $B(z_0, R) = \{z_0\}$, iar pentru $R = \infty$, $B(z_0, R) = \mathbb{C}$.

b) Fie $0 < R \leq \infty$; atunci seria de puteri centrată în z_0 este absolut convergentă în orice punct z cu $|z - z_0| < R$ şi uniform convergentă în orice disc $|z - z_0| \leq r$, pentru orice r cu $0 < r < R$. Fie $0 \leq R < \infty$; atunci seria de puteri centrată în z_0 este divergentă în orice punct z cu $|z - z_0| > R$.

c) Pentru orice serie S are loc formula

$$R_1 = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1}.$$

d) Presupunem că există $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = l \geq 0$; atunci $R = \frac{1}{l}$.

e) Presupunem că există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = l \geq 0$; atunci $R = \frac{1}{l}$.

PROPOZIȚIA 3.1. Fie $S = \sum_{n\geq 0} c_n X^n$ o serie convergentă şi fie $R>0$ raza sa de convergență. Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ un punct fixat şi $S(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z-z_0)^n$, $(\forall)\, z$ cu $|z - z_0| < R$, suma seriei centrate în punctul z_0. Atunci, funcția $S(z)$ este olomorfă în orice punct $z \in B(z_0, R)$ seria $T = \sum_{n\geq 1} nc_n X^{n-1}$ are raza de convergență R şi $S'(z) = \sum_{n\geq 1} nc_n \cdot (z-z_0)^{n-1}$, $(\forall)\, z \in B(z_0, R)$.

DEMONSTRAȚIE. Avem

$$R_1 = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|c_n|} \right)^{-1},$$

deoarece seria $\sum_{n\geq 1} nc_n X^{n-1}$ este convergentă dacă și numai dacă seria $\sum_{n\geq 0} nc_n X^n$ este convergentă.

Deci

$$R_1 = \left(\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}\right)\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1} = 1\cdot\left(\frac{1}{R}\right)^{-1} = R.$$

Fie $z_1 \in B(z_0, R)$ un punct oarecare; alegem ρ astfel încît $|z_1 - z_0| < \rho < R$.

Deoarece seria T este absolut și uniform convergentă în discul $|z - z_0| \leq \rho$ rezultă că $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ n_0(\varepsilon) = n_0$ astfel încît pentru $(\forall)\ n \geq n_0$ să avem relația

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} j|c_j|\rho^{j-1} < \varepsilon.$$

Notăm $\varphi(z) = \sum_{n\geq 1} nc_n(z - z_0)^{n-1}$ pentru orice $z \in B(z_0, R)$. Pentru orice punct z cu $|z - z_0| \leq \rho$, $z \neq z_1$, putem scrie:

$$\left|\frac{S(z) - S(z_1)}{z - z_1} - \varphi(z_1)\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z - z_0)^n - (z_1 - z_0)^n}{z - z_1} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z_1 - z_0)^{n-1}\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n\left[(z - z_0)^{n-1} + (z - z_0)^{n-2}\cdot(z_1 - z_0) + \ldots + (z_1 - z_0)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z_1 - z_0)^{n-1}\right]\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{n=1}^{n_0} c_n\left[(z - z_0)^{n-1} + \ldots + (z_1 - z_0)^{n-1} - n(z_1 - z_0)^{n-1}\right]\right| + 2\sum_{n=n_0+1}^{\infty} n|c_n|\rho^{n-1}.$$

Primul termen din membrul drept al inegalității obținute tinde la zero cînd z tinde la z_1, deci va fi mai mic decît ε pentru $|z - z_1| < \delta(\varepsilon)$. Al doilea termen din membrul drept este mai mic decît 2ε datorită alegerii lui n_0.

Atunci obținem că:

$$\left|\frac{S(z) - S(z_1)}{z - z_1} - \varphi(z_1)\right| < 3\varepsilon,$$

pentru orice $z \in \overline{B(z_0; \rho)}$ cu $|z - z_1| < \delta(\varepsilon)$, deci funcția $S(z)$ este olomorfă în discul de convergență $B(z_0, R)$ și derivata sa este:

$$S'(z) = \sum_{n\geq 1} nc_n(z - z_0)^{n-1},\ (\forall)\ z \in B\ (z_0; R).$$

Corolar. Fie $S = \sum_{n\geq 0} c_n X^n$ o serie convergentă și fie $R > 0$ raza sa de convergență. Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ un punct fixat și fie $S(z) = \sum_{n\geq 0} c_n(z - z_0)^n$, $(\forall)\ z \in B(z_0, R)$, suma seriei centrate în punctul z_0. Atunci funcția $S(z)$, are derivate complexe de orice ordin în orice punct $z \in B(z_0, R)$ și

$$c_k = \frac{S^{(k)}(z_0)}{k!},\ (\forall)\ k \in \mathbb{N}.$$

DEMONSTRAȚIE. Aplicînd propoziția 3.1 seriei $S'(z) = \sum_{n\geq 1} nc_n(z-z_0)^{n-1}$ rezultă că există $S''(z) = \sum_{n\geq 2} n(n-1)c_n(z-z_0)^{n-2}$, etc. Pentru $(\forall)\ k \in \mathbb{N}$ rezultă

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n\geq k} n(n-1)\ldots(n-k+1)c_n(z-z_0)^{n-k}.$$

Luăm $z = z_0$ și obținem $S^{(k)}(z_0) = k(k-1)\ldots 2 \cdot 1 \cdot c_k$, deci $c_k = \dfrac{S^{(k)}(z_0)}{k!}$.

DEFINIȚIA 3.1. Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulțime deschisă. Funcția $f : A \to \mathbb{C}$ se numește **analitică pe** A dacă $(\forall)\ z_0 \in A$, $(\exists)$ o serie formală $\sum_{n\geq 0} c_n X^n$ convergentă într–un disc de rază $R > 0$, astfel încît $(\exists)$ discul $B(z_0, r) \subset A$, $0 < r \leq R$, cu proprietatea că

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \qquad (\forall)\ z \in B(z_0; r).$$

PROPOZIȚIA 3.2. Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulțime deschisă și $f : A \to \mathbb{C}$ o funcție analitică pe A. Atunci există derivatele complexe de orice ordin ale lui f în A și într-o vecinătate a oricărui punct $z_0 \in A$ avem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

DEMONSTRAȚIE. Din definiția 3.1 rezultă că există $0 < r \leq R$ și seria $S = \sum_{n\geq 0} c_n X^n$ cu raza de convergență $R > 0$ astfel încît

$$f(z) = S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,\ (\forall)\ z \in B(z_0; r) \subset A.$$

Din corolarul anterior rezultă că există derivatele complexe de orice ordin ale lui f în $B(z_0; r)$ și că

$$c_n = \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

deci

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,\ (\forall)\ z \in B(z_0; r) \subset A.$$

OBSERVAȚII. 1) Propoziția 3.2 arată că o funcție analitică pe deschisul A admite, local, o dezvoltare în serie Taylor.

2) Se observă imediat că dezvoltarea în serie, local, a unei funcții analitice este unică. Într-adevăr, dacă $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ este o altă dezvoltare pentru

$$|z-z_0| < r'\ (0 < r'),\ \text{atunci}\ b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = c_n,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}.$$

3) Evident, suma, produsul, cîtul (acolo unde este definit) de funcții analitice sînt funcții analitice.

3.2. Echivalenţa noţiunilor de analiticitate şi olomorfie

Vom demonstra acum următorul rezultat fundamental, atribuit celor trei fondatori ai analizei complexe, K. WEIERSTRASS (1815–1897), G. F. B. RIEMANN (1826–1866), A. L. CAUCHY (1789–1857).

TEOREMA 3.3. (Weierstrass–Riemann–Cauchy). Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{C}$ o funcţie complexă. Atunci f este analitică pe A dacă şi numai dacă f este olomorfă pe A.

DEMONSTRAŢIE. Presupunem f analitică pe A. Din propoziţia 3.2, rezultă că f este olomorfă pe A. De fapt, această afirmaţie rezultă direct din definiţia funcţiei analitice. Într-adevăr, fie $z_0 \in A$ un punct oarecare. Atunci $(\exists)\ B(z_0; r) \subset A$ $(r > 0)$ astfel încît $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, $(\forall)\ z \in B(z_0; r)$. Deoarece $f(z_0) = c_0$ putem scrie: $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n-1}$, pentru $z \neq z_0$, $z \in B(z_0; r)$ şi atunci $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = c_1 \in \mathbb{C}$.

Reciproc, presupunem că f este olomorfă pe A şi fie $z_0 \in A$ un punct fixat oarecare. Fie $\rho = d(z_0, \text{Fr}\, A) > 0$ şi fie $B(z_0; r) \subset A$ cu $0 < r < \rho$. Fie $C = \text{Fr}\, B(z_0; r)$, circumferinţă parcursă în sens trigonometric direct. Atunci, din formula integrală Cauchy, rezultă:

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(u)}{u - z}\, du, \ (\forall)\ z \in B(z_0; r).$$

Vom scrie:

$$\frac{1}{u - z} = \frac{1}{(u - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{u - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{u - z_0}},$$

şi notînd $\frac{z - z_0}{u - z_0} = w$ ($u \in C$, deci $u \neq z_0$) avem:

$|w| = \frac{|z - z_0|}{|u - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$. Atunci seria $\sum_{n \ge 0} w^n$ este convergentă şi $\sum_{n \ge 0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1 - w}$, deci obţinem:

$$\frac{1}{u - z} = \frac{1}{u - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{u - z_0} \right)^n; \quad \frac{f(u)}{u - z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(u) \frac{(z - z_0)^n}{(u - z_0)^{n+1}}.$$

Pentru $z \in B(z_0; r)$ fixat putem scrie:

$$\left| f(u) \frac{(z - z_0)^n}{(u - z_0)^{n+1}} \right| \le \sup_{u \in C} |f(u)| \cdot \frac{|z - z_0|^n}{r^{n+1}} = M \cdot \frac{|z - z_0|^n}{r^{n+1}},$$

deoarece $|f|$ este o funcţie continuă pe compactul $C \subset A$. Rezultă că seria de funcţii

$$(2) \qquad \sum_{n \ge 0} f(u) \frac{(z - z_0)^n}{(u - z_0)^{n+1}}$$

este majorată (în modul) de seria numerică convergentă

$\frac{M}{r}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^n$ (progresie geometrică cu rația $\frac{|z-z_0|}{r}<1$). Atunci seria de funcții (2) converge uniform în raport cu $u\in C$ (C compact: criteriul Weierstrass) și poate fi integrată termen cu termen (părțile reală și imaginară converg uniform și aplicăm rezultatele de la integralele reale). Deci, din formula (1) obținem:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\sum_{n=0}^{\infty}f(u)\cdot\frac{(z-z_0)^n}{(u-z_0)^{n+1}}\,du=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_C\frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}\,du\right)\cdot(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

unde

$$(3)\qquad c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}\,du,\ (\forall)\,n\in\mathbb{N}.$$

Deoarece c_n nu depinde de punctul z, ci numai de f și de z_0 și cum seria $\sum_{n\geq 0}c_n(z-z_0)^n$ este convergentă pentru orice $z\in B(z_0;r)$, rezultă că funcția f este analitică pe A (z_0 a fost fixat arbitrar).

OBSERVAȚIE. Din demonstrație rezultă că, pentru o funcție olomorfă f pe A, seria $\sum_{n\geq 0}c_n(z-z_0)^n$ este convergentă la $f(z)$ în discul $B(z_0,\rho)$ (r, cu $0<r<\rho$, a fost arbitrar), unde ρ este distanța de la punctul z_0 la frontiera deschisului A.

COROLARUL 1 (principiul identității funcțiilor olomorfe). Fie $D\subset\mathbb{C}$ un domeniu și fie $f,g:D\to\mathbb{C}$ două funcții olomorfe astfel încît mulțimea $U=\{z\in D\mid f(z)=g(z)\}$ să aibă cel puțin un punct de acumulare în D. Atunci $f\equiv g$ pe D.

DEMONSTRAȚIE. Trebuie să arătăm că $U=D$. Fie $h=f-g$; atunci $U=\{z\in D\mid h(z)=0\}$. Vom arăta că $h\equiv 0$ pe D, ceea ce va demonstra afirmația.

Fie $z_0\in D$ un punct de acumulare al lui U și $r>0$ astfel încît $B(z_0,r)\subset D$ și $h(z)=\sum_{n\geq 0}c_n(z-z_0)^n$, $(\forall)\,z\in B(z_0,r)$ (am folosit faptul că D este deschis și faptul că h este analitică pe D). Deoarece z_0 este un punct de acumulare al lui U există un șir de puncte distincte $\{z_k\}_{k\geq 1}$, $z_k\neq z_0$, $z_k\in B(z_0,r)\cap U$ cu $\lim_{k\to\infty}z_k=z_0$.

Funcția h este continuă în z_0 și $h(z_k)=0$, $(\forall)\,k\geq 1$, deci $\lim_{k\to\infty}h(z_k)=h(z_0)=0$; dar $h(z_0)=c_0$ și prin urmare $c_0=0$. Presupunem că am arătat că

$$c_0=c_1=\ldots=c_{m-1}=0.$$

Atunci

$$0=h(z_k)=\sum_{n\geq m}c_n(z_k-z_0)^n=(z_k-z_0)^m\cdot\sum_{n\geq m}c_n(z_k-z_0)^{n-m}$$

deci $u(z_k) = \sum_{n \ge m} c_n (z_k - z_0)^{n-m} = 0$, unde am notat $u(z) = \sum_{n \ge m} c_n (z - z_0)^{n-m}$; dar u este funcţie continuă în z_0 (fiind olomorfă în z_0). Atunci rezultă că $\lim_{k \to \infty} u(z_k) = u(z_0) = 0 = c_m$. Aşadar, $c_n = 0$, $(\forall)\, n = 0, 1, 2, \ldots$, deci $h(z) = 0$, $(\forall)\, z \in B(z_0, r)$. Fie acum $C = \{z \in D \mid h$ este nulă în vecinătatea lui $z\}$.

Mulţimea C este evident deschisă şi închisă în D ($z_n \to z$, $z_n \in C \Rightarrow z \in C$); fiind şi nevidă (deoarece $z_0 \in C$, conform celor arătate). Deoarece D este conex, rezultă $C = D$ şi ca atare, h este nulă pe D.

OBSERVAŢIE. Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu şi $A \subset D$ o mulţime care are cel puţin un punct de acumulare în D. Dacă $f : A \to \mathbb{C}$ este o funcţie complexă, se numeşte **prelungire analitică** (sau olomorfă) a sa la domeniul D o funcţie $\tilde{f} : D \to \mathbb{C}$ analitică (olomorfă) cu proprietatea că $\tilde{f} \mid A = f$. Conform corolarului 1, prelungirea analitică, dacă există, este unică. Astfel, rezultă că extinderea funcţiilor elementare din real în complex este unică.

COROLARUL 2. Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi fie $f : A \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe A. Dacă $f = P + iQ$, atunci $P, Q \in C^\infty(A)$.

DEMONSTRAŢIE. Funcţia f fiind olomorfă este analitică pe A, deci are derivate complexe de orice ordin. Deoarece

$$f' = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y}$$

iar f' este olomorfă, rezultă că $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}$ sînt continue pe A şi au derivate parţiale de ordinul II pe A (criteriul Cauchy–Riemann de olomorfie), etc.

TEOREMA 3.4. Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi fie $f : A \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe A. Fie $z_0 \in A$ şi $\overline{B(z_0; r)} \subset A$; dacă $C = \mathrm{Fr}\, \overline{B(z_0; r)}$, fie $M = \sup_{z \in C} |f(z)|$. Atunci $|f^{(n)}(z_0)| \le n! \frac{M}{r^n}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ (inegalităţile Cauchy).

DEMONSTRAŢIE. Fie $f(z) = \sum_{n \ge 0} c_n (z - z_0)^n$ dezvoltarea Taylor lui f în discul $B(z_0; r)$, unde $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$. În demonstraţia teoremei 3.3 am obţinut formulele coeficienţilor:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \qquad (\forall)\, n \in \mathbb{N},$$

deci

$$(4) \qquad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz,\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}.$$

Atunci

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}}\, ds \le \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = n! \frac{M}{r^n}.$$

OBSERVAȚIE. Formula (4) se numește formula integrală Cauchy pentru derivatele funcției olomorfe f. Cu notații schimbate,

$$(*) \qquad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}\,du,\ (\forall)\, n \in \mathbb{N},\ (\forall)\, z \in A.$$

COROLARUL 1 (J. Liouville 1809–1882). Orice funcție $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ olomorfă și mărginită este o constantă.

DEMONSTRAȚIE. Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ un punct oarecare și fie $C = \mathrm{Fr}B(z_0, r)$ cu $r > 0$ arbitrar. Fie $M = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| < +\infty$ (f este mărginită pe $\mathbb{C}$). Din inegalitățile Cauchy obținem: $|f'(z_0)| \le \frac{M}{r}$. Făcînd $r \to \infty$ rezultă $|f'(z_0)| = 0$, deci $f' = 0$ pe $\mathbb{C}$ (z_0 fiind arbitrar). Conform propoziției 1.13 rezultă că f este constantă pe $\mathbb{C}$.

COROLARUL 2 (teorema fundamentală a algebrei). Orice polinom $P \in \mathbb{C}[X]$ de grad mai mare sau egal cu unu are cel puțin o rădăcină în $\mathbb{C}$.

DEMONSTRAȚIE. Prespunem că P nu are nici o rădăcină în $\mathbb{C}$. Atunci funcția $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ este definită, nenulă și olomorfă (cît de funcții olomorfe) pe $\mathbb{C}$. Deoarece $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, există $r > 0$ astfel încît $(\forall)\, z \in \mathbb{C}$ cu $|z| > r$, $|f(z)| \le 1$.

Dar $M = \sup\limits_{z\in\overline{B(0,r)}} |f(z)| < +\infty$, deoarece $\overline{B(0,r)}$ este compactă și f este continuă. Atunci $|f(z)| \le M + 1$, $(\forall)\, z \in \mathbb{C}$, deci funcția f este mărginită pe $\mathbb{C}$.

Conform teoremei lui Liouville, $f(z) = c$, $(\forall)\, z \in \mathbb{C}$, unde c este o constantă (evident nenulă). Rezultă că $P(z) = \frac{1}{c}$, deci grad $P = 0$; contradicție.

OBSERVAȚII. 1) Fie $f(x,z) = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$, $x \in [-1, 1]$. Pentru x fixat, funcția $z \to f(x,z)$ este olomorfă în vecinătatea lui $z = 0$ și are loc o dezvoltare de forma $f(x,z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} Q_n(x) z^n$, unde $Q_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial z^n}\Big|_{z=0}$. Dar

$$\frac{\partial^n f}{\partial z^n}\bigg|_{z=0} \overset{\text{cf. }(*)}{=} \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(x,u)}{u^{n+1}}\,du,$$

unde γ este o circumferință centrată în origine (parcursă pozitiv o dată).

Punînd $\sqrt{1-2xu+u^2} = 1 - uv$, rezultă

$$Q_n(x) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{\frac{1}{2^n\cdot n!}(v^2-1)^n}{(v-x)^{n+1}}\,dv,\quad n \ge 0$$

unde γ_1 este un drum închis în jurul lui x. Așadar, cf.(*), rezultă

$$Q_n(x) = \frac{1}{2^n\cdot n!}\left[(v^2-1)^n\right]^{(n)}\bigg|_{v=x} = \widetilde{P}_n(x).$$

Se obține astfel o altă demonstrație pentru teorema 1.4 din cap.6.

2) Fie $P \in \mathbb{C}[X]$ un polinom și $z_0 \in \mathbb{C}$ o rădăcină a sa. Atunci $P(z_0) = 0$, $P'(z_0) = 0$, ..., $P^{(k-1)}(z_0) = 0$ și $P^{(k)}(z_0) \neq 0$, unde k ($1 \leq k \leq \text{grad } P$) este multiplicitatea rădăcinii z_0. De asemenea, putem scrie $P(z) = (z - z_0)^k Q(z)$, cu $Q(z_0) \neq 0$. Pentru funcții analitice (olomorfe) avem următorul rezultat:

TEOREMA 3.5. Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu și fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă, neidentic nulă. Fie $z_0 \in D$ un zerou al funcției f (adică $f(z_0) = 0$). **Atunci:**

a) **Există $r > 0$ astfel încît $B(z_0, r) \subset D$ și $f(z) \neq 0$, $(\forall) z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ (adică zerourile lui f sînt izolate);**

b) **Există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încît $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 0$,..., $f^{(k-1)}(z_0) = 0$ și $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, și un $\rho > 0$ pentru care $B(z_0, \rho)$ (adică zerourile lui f au ordin finit).**

DEMONSTRAȚIE. a) Procedăm prin reducere la absurd; presupunem că există un șir de numere pozitive $r_n \to 0$ și un șir de puncte distincte z_n, $z_n \to z_0$, astfel încît $z_n \in B(z_0, r_n)$ și $f(z_n) = 0$. Dar mulțimea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ are un punct de acumulare $z_0 \in D$, deci $f \equiv 0$ pe D (principiul identității), contradicție.

b) Funcția f fiind olomorfă pe D este analitică pe D și fie $\rho = d(z_0; \text{Fr } D) > 0$; fie $f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$ dezvoltarea Taylor a lui f în discul $B(z_0, \rho) \subset D$, unde $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Avem $c_0 = f(z_0) = 0$; dacă toți coeficienții c_n, $n = 0, 1, 2,...$ ar fi nuli, atunci $f(z) = 0$ $(\forall) z \in B(z_0, \rho)$, deci $f \equiv 0$ pe D, contradicție. Rezultă că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încît $c_n = 0$ pentru $n = 0, 1, ..., k - 1$ și $c_k \neq 0$. Dar $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, deci $f^{(n)}(z_0) = 0$ pentru $n = 0, 1,..., k - 1$ și $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Atunci

$$f(z) = \sum_{n \geq k} c_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{n \geq k} c_n (z - z_0)^{n-k} = (z - z_0)^k \cdot g(z),$$

unde $g(z) = \sum_{n \geq k} c_n (z - z_0)^{n-k}$ este olomorfă în $B(z_0, \rho) \subset D$ și $g(z_0) = c_k \neq 0$.

EXEMPLE. Indicăm cîteva dezvoltări în serie, o dată cu razele de convergență respective. Aceste dezvoltări sînt utilizate în mod curent:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ...; \; R = \infty.$$

$$z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + ... + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...; \; R = \infty.$$

$$z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ...; \; R = \infty.$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + ...; \; R = 1.$$

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots;\ R=1.$$

$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$, unde B_n sînt numerele Bernoulli ($B_0=1$, $B_1=\frac{1}{6}$, $B_2=\frac{-1}{30}$ etc.).

Am văzut că orice funcție olomorfă într-un deschis D este analitică în fiecare punct $z_0 \in D$. Nu există un rezultat similar în cazul funcțiilor derivabile reale. Astfel funcția

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, dar nu este analitică în origine (căci $f^{(n)}(0)=0$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$ și dacă f ar fi analitică în origine, ar rezulta că f se anulează într-o întreagă vecinătate a originii).

3.3. Serii Laurent, funcții olomorfe într-o coroană circulară (P. A. Laurent, 1813–1854)

DEFINIȚIA 3.2. Se numește **serie Laurent centrată în punctul** $z_0\in\mathbb{C}$ orice serie de funcții de forma

$$(5)\qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n,\ c_n\in\mathbb{C}.$$

Seria (5) se numește **convergentă** dacă seriile $\sum_{n\geq 0} c_n(z-z_0)^n$ și $\sum_{n\geq 1} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ sînt simultan convergente și în acest caz suma seriei (5) este

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Seria $\sum_{n\geq 1} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ se numește **partea principală a seriei Laurent** (5), iar seria $\sum_{n\geq 0} c_n(z-z_0)^n$ se numește **partea Taylor a seriei Laurent** (5).

Are loc următorul rezultat:

TEOREMA 3.6 (a coroanei de convergență). Fie seria Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ **și fie** $r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_{-n}|}$, $\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$; **presupunem că** $0\leq r<R$.

Atunci:

a) În coroana circulară

$$B(z_0;r,R)=\{z\in\mathbb{C}\ |\ r<|z-z_0|<R\}$$

seria Laurent converge absolut și uniform pe compacți.

b) În mulțimea $\mathbb{C}\setminus\overline{B(z_0;r,R)}$ **seria Laurent diverge.**

c) Suma seriei Laurent $S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ **este funcție olomorfă pe coroana** $B(z_0; r, R)$.

DEMONSTRAȚIE. Afirmațiile rezultă simplu folosind rezultatele de la serii de puteri:

a) Seria de puteri $\sum_{n\geq 0} c_n (z-z_0)^n$ are raza de convergență R, și converge absolut și uniform pe compacți în discul $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$. Seria de puteri $\sum_{n>0} c_{-n}(z-z_0)^{-n} = \sum_{n>0} c_{-n} w^n$ (am notat $\frac{1}{z-z_0} = w$ are raza de convergență $\frac{1}{r}$, deci converge absolut și uniform pe compacți în discul

$$B\left(0, \frac{1}{r}\right) = \left\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < \frac{1}{r}\right\},$$ deci în exteriorul discului

$\overline{B(z_0, r)}\left(|w| < \frac{1}{r} \Leftrightarrow |z - z_0| > r\right)$. În concluzie seria Laurent (ca sumă a celor două serii de funcții) converge absolut și uniform pe compacți în coroana circulară $B(z_0; r, R)$.

b) În $\mathbb{C} \setminus \overline{B(z_0; r, R)}$ seria Laurent este suma a două serii, dintre care una este convergentă și cealaltă divergentă, deci este divergentă.

c) Conform propoziției 3.1 funcția $S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ este olomorfă pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z - z_0| < R$ și funcția $S_2(w) = \sum_{n>0}^{\infty} c_{-n} w^n$ este olomorfă pentru orice $w \in \mathbb{C}$ cu $|w| < \frac{1}{r}$. Funcția

$$z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r \to \left\{w \in \mathbb{C} \mid |w| < \frac{1}{r}\right\},\ z \to w = \frac{1}{z - z_0}$$ este, evident, olomorfă,

deci compunerea $S_2(z) = \sum_{n>0} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ este o funcție olomorfă pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z - z_0| > r$. Atunci $S(z) = S_1(z) + S_2(z)$ este o funcție olomorfă pentru orice $z \in B(z_0; r, R)$. Mai mult, rezultă că $S'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n c_n (z-z_0)^{n-1}$.

OBSERVAȚIE. Dacă $r = 0$ și $R < +\infty$, atunci coroana circulară $B(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$ se numește **disc punctat** de rază R (fără z_0). Dacă $r > 0$ și $R = +\infty$, atunci coroana $B(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0|\}$ este exteriorul unui disc.

TEOREMA 3.7. Fie $f : B(z_0; r, R) \to \mathbb{C}$ **o funcție olomorfă pe coroana** $D = B(z_0; r, R)$ $(0 \leq r < R)$. **Atunci există o unică serie Laurent**

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-z_0)^n$ a cărei coroană de convergență include coroana D astfel încît în D avem:

$$(6) \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

DEMONSTRAȚIE. Fie $z \in D$ un punct oarecare fixat. Alegem cercurile C_1; C_2 orientate pozitiv, de centru z_0, de raze ρ_1, ρ_2 astfel încît $r < \rho_1 < \rho_2 < R$ și $z_0 \in B(z_0; \rho_1, \rho_2)$. Fie C' frontiera orientată pozitiv a discului $B(z, r') \subset B(z_0; \rho_1, \rho_2)$; figura VII.26.

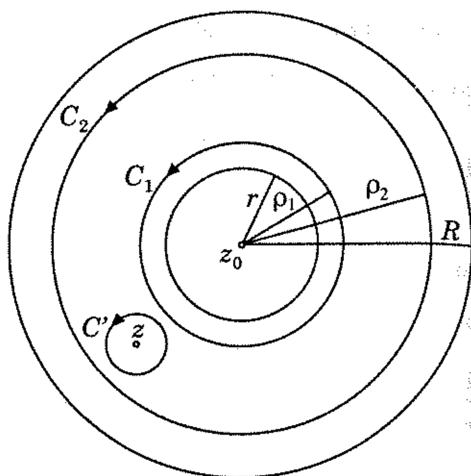


Figura VII.26.

Aplicînd teorema 2.5 funcției $\frac{f(u)}{u-z}$ (z fixat), obținem că

$$\int_{C'} \frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u = \int_{C_2} \frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u - \int_{C_1} \frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u.$$

Aplicînd formula integrală Cauchy pentru cercul C' avem

$$\int_{C'} \frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u = 2\pi i f(z),$$

deci obținem:

$$(7) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u$$

(formula integrală Cauchy pentru coroană).

Pentru prima integrală din (7) procedăm ca în demonstrația teoremei 3.3: $\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-z_0} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{u-z_0}\right)^n$. Atunci $\frac{f(u)}{u-z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(u)\frac{(z-z_0)^n}{(u-z_0)^{n+1}}$ este o serie de funcții uniform convergentă în raport cu $u \in C_2$, deci poate fi integrată termen cu termen. Obținem:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

unde

$$(8) \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}u,\ n \in \mathbb{N}.$$

Pentru a doua integrală din (7) procedăm analog:

$$-\frac{1}{u-z} = \frac{1}{(z-z_0)-(u-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{u-z_0}{z-z_0}}.$$

Notăm $\dfrac{u-z_0}{z-z_0} = w$ şi avem $|w| = \dfrac{|u-z_0|}{|z-z_0|} = \dfrac{\rho_1}{|z-z_0|} < 1$, deoarece $|z-z_0| > \rho_1$.

Folosind suma seriei $\sum\limits_{m=0}^{\infty} w^m = \dfrac{1}{1-w}$, obţinem seria:

$$-\frac{f(u)}{u-z} = \sum_{m=0}^{\infty} f(u)\cdot\frac{(u-z_0)^m}{(z-z_0)^{m+1}} = \sum_{l=1}^{\infty} f(u)\cdot\frac{(u-z_0)^{l-1}}{(z-z_0)^l},$$

care converge uniform pentru $u \in C_1$, deci poate fi integrată termen cu termen. Deducem

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(u)(u-z_0)^{l-1}\mathrm{d}u\right)(z-z_0)^{-l} = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n,$$

unde am notat $l = -n$ şi unde coeficienţii c_n au aceeaşi formă ca în formula (8):

$$(8')\qquad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}u,\ n = -1, -2,\ldots$$

În final, obţinem că:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,\quad (\forall)\, z \in D,$$

deoarece coeficienţii c_n, $(\forall)\, n \in \mathbb{Z}$, nu depind de punctul $z \in D$, ci numai de z_0 şi f (la integralele (8), (8′) putem lua în ambele cazuri $n \geq 0$ şi $n < 0$ un singur cerc C de rază ρ cu $r < \rho < R$). Să demonstrăm unicitatea seriei Laurent. Fie

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Notînd $b_n = c_n - a_n$ obţinem:

$$0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n,$$

de unde, înmulţind cu $(z-z_0)^{-k-1}$, $k \in \mathbb{Z}$ rezultă

$$(9)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^{n-k-1} = 0.$$

Fie C un cerc de rază ρ cu $r < \rho < R$. Seria (9) converge uniform pentru $z \in C$, deci poate fi integrată termen cu termen pe curba C şi obţinem:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n\int_C (z-z_0)^{n-k-1}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Dar conform lemei 2.6 $\int_C (z-z_0)^{n-k-1}\,\mathrm{d}z = 0$, dacă $n-k-1 \neq -1$ şi $\int_C (z-z_0)^{n-k-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i$ dacă $n-k-1 = -1$, deci rezultă $2\pi i b_k = 0$, de unde $b_k = 0$, $(\forall)\, k \in \mathbb{Z}$. Atunci avem $c_n = a_n$, $(\forall)\, n \in \mathbb{Z}$, deci seria Laurent a funcţiei f este unică.

§ 4. Puncte singulare, reziduuri; aplicații

4.1. Puncte singulare

DEFINIȚIA 4.1. Fie $A \subset \mathbb{C}$ o mulțime deschisă nevidă și fie $f: A \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe A. Un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ se numește **punct singular izolat al lui** f dacă există un disc $B(z_0, r)$ $(r > 0)$ astfel încît $B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subset A$ (adică funcția f este olomorfă pe discul punctat $B(z_0; 0, r) = B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$).

Pe coroana $B(z_0; 0, r)$ funcția olomorfă f are o dezvoltare în serie Laurent

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Se poate întîmpla ca f să nu fie definită în punctul z_0.

EXEMPLE. 1) Punctul $z = 2$ este un punct singular izolat pentru fiecare din funcțiile $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$; $f(z) = z^2$; $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{z-2}$.

2) Punctele $z_1 = 0$ și $z_2 = i$, $z_3 = -i$ sînt singurele izolate pentru funcția

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0, i, -i\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{1}{z^3 + z}.$$

DEFINIȚIA 4.2. Fie $f: A \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă, unde $A \subset \mathbb{C}$ este o mulțime deschisă nevidă, și fie $z_0 \in \mathbb{C}$ un punct singular izolat al lui f.

a) Punctul singular izolat z_0 se numește **punct singular aparent** (sau eliminabil) dacă seria Laurent (1) are partea principală nulă, adică $c_n = 0$, $(\forall)\, n < 0$.

b) Punctul singular izolat z_0 se numește **pol** dacă în seria Laurent (1) partea principală are număr finit de termeni nenuli (dar măcar unul), adică există $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$ astfel încît $c_m \neq 0$ și $c_n = 0$, $(\forall)\, n \in \mathbb{Z}$ cu $n < m$. Numărul natural $-m$ se numește **ordinul polului** z_0. Polii de ordinul 1 se mai numesc **simpli**.

c) Punctul singular izolat z_0 se numește **punct singular esențial** dacă partea principală a seriei Laurent (1) are o infinitate de termeni nenuli.

OBSERVAȚIE. Dacă z_0 este un pol de ordinul $-m = k \in \mathbb{N}^*$ atunci funcția f are în coroana $B(z_0; 0, r)$ o scriere de forma

$$(2) \qquad f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k},$$

unde funcția g este olomorfă în discul $B(z_0, r)$ și $g(z_0) \neq 0$. Într-adevăr, în acest caz seria Laurent (1) are forma

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^{-m}} \left[c_m + c_{m-1}(z - z_0) + \ldots + c_0 (z - z_0)^{-m} + \ldots\right] = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k},$$

unde

$$g(z) = c_m + c_{m-1}(z - z_0) + \ldots,\ (\forall)\, z \in B(z_0, r),$$

și $g(z_0) = c_m \neq 0$. Evident că și reciproc, dacă în coroana $B(z_0; 0, r)$ funcția f se scrie sub forma (2) cu g olomorfă în discul $B(z_0, r)$ și cu $g(z_0) \neq 0$, atunci punctul $z_0 \in \mathbb{C}$ este pol de ordinul k pentru f.

LEMA 4.1. Fie $f: B(z_0; 0, r) \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe coroana $B(z_0; 0, r)$. Dacă $|f(z)| \le M$, pentru orice $z \in B(z_0; 0, r)$, atunci z_0 este punct singular aparent al lui f.

DEMONSTRAȚIE. În coroana $B(z_0; 0, r)$ avem seria Laurent (1), unde:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}u,\ (\forall)\, n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

și $C = \{u \in \mathbb{C} \mid |u - z_0| = \rho\}$ $(0 < \rho < r)$. Putem majora:

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{|f(u)|}{|u - z_0|^{n+1}}\,\mathrm{d}s \le \frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{n+1}}2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}.$$

Pentru $n < 0$ avem $|c_n| \le M \cdot \rho^{-n}$ și facem $\rho \to 0$; obținem $c_n = 0$, $(\forall)\, n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, deci $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, adică z_0 este un punct singular aparent al lui f.

PROPOZIȚIA 4.2. Fie $f: B(z_0; 0, r) \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe coroana $B(z_0; 0, r)$. Atunci punctul z_0 este punct singular aparent pentru f dacă și numai dacă există și este finită $\lim_{z \to z_0} f(z)$.

DEMONSTRAȚIE. Fie z_0 punct singular aparent. Atunci în coroana $B(z_0; 0, r)$ avem dezvoltarea Laurent $f(z) = \sum_{n\ge 0} c_n (z - z_0)^n$ și $\lim_{z \to z_0} f(z) = c_0 \in \mathbb{C}$.

Reciproc, fie $c_0 = \lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$. Pentru $\varepsilon = 1$, $(\exists)\, \delta > 0$, astfel încît $|z - z_0| < \delta < r$ $(z \neq z_0)$ $\Rightarrow$ $|f(z) - c_0| < 1$. Atunci rezultă $|f(z)| \le |c_0| + 1$, $(\forall)\, z \in B(z_0; 0, \delta)$. Aplicînd lema 4.1 rezultă că z_0 este punct singular aparent al lui f.

OBSERVAȚIE. Definind, în cazul unui punct singular aparent z_0, funcția $\tilde{f}: B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ astfel:

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n\ge 0} c_n (z - z_0)^n,\quad (\forall)\, z \in B(z_0, r),$$

obținem că $\tilde{f}$ este olomorfă în $B(z_0, r)$, $\tilde{f}(z) = f(z)$, $(\forall)\, z \in B(z_0; 0, r)$ și $\tilde{f}(z_0) = c_0 = \lim_{z\to z_0} f(z)$. Rezultă că funcția f se prelungește olomorf în punctul singular aparent z_0.

PROPOZIȚIA 4.3. Fie $f: B(z_0; 0, r) \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe coroana $B(z_0; 0, r)$. Atunci punctul z_0 este pol pentru f dacă și numai dacă

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty.$$

DEMONSTRAȚIE. Fie z_0 un pol al lui f. Am văzut într-o observație anterioară că în coroană putem scrie $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z - z_0)^k}$, unde $k \in \mathbb{N}^*$ este ordinul

polului, h este olomorfă în discul $B(z_0, r)$ şi $h(z_0) \neq 0$. Atunci, evident, $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Reciproc, fie $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Pentru $\varepsilon = 1$ $(\exists)$ $\delta > 0$ astfel încît din $|z - z_0| < \delta$ $(\delta < r)$ şi $z \neq z_0$ rezultă că $|f(z)| > 1$. Notînd $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ avem $|g(z)| < 1$ pentru orice $z \in B(z_0; 0, \delta)$. Funcția $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ este definită în coroana $B(z_0; 0, \delta)$ $(f(z) \neq 0)$, este olomorfă în această coroană (ca inversa funcției olomorfe nenule f) şi mărginită. Aplicînd din nou lema 4.1 rezultă că z_0 este punct singular aparent pentru g. Mai mult, $\lim_{z \to z_0} g(z) = 0$, deci seria Laurent pentru g este următoarea:

$$g(z) = \sum_{n \geq 1} c_n (z - z_0)^n,\ z \in B(z_0, \delta).$$

Putem scrie:

$$g(z) = (z - z_0)^k \sum_{n \geq k} c_n (z - z_0)^{n-k}, \quad k > 0 \text{ şi } c_k \neq 0,$$

deoarece z_0 este zerou al funcției olomorfe g. Atunci

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k \cdot \varphi(z)},\ (\forall)\ z \in B(z_0, \delta_1),$$

cu $0 < \delta_1 < \delta < r$ şi $\varphi(z) = \sum_{n \geq k} c_n (z - z_0)^{n-k} \neq 0$ în $B(z_0, \delta_1)$, (acest fapt rezultă din continuitatea funcției olomorfe φ şi din $\varphi(z_0) \neq 0$). Rezultă că $\dfrac{1}{\varphi(z)}$ este olomorfă în discul $B(z_0, \delta_1)$ şi are o dezvoltare Taylor în acest disc:

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n, \quad a_0 \neq 0.$$

Pentru funcția f obținem în coroana $B(z_0; 0, \delta_1)$ seria

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot \left[a_0 + a_1 (z - z_0) + \ldots + a_n (z - z_0)^n + \ldots\right] = \frac{a_0}{(z - z_0)^k} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{k-1}} + \ldots,$$

adică o serie Laurent cu un număr finit de termeni în partea principală, deci z_0 este pol pentru f.

OBSERVAȚIE. În cursul demonstrației am stabilit şi următorul rezultat: "z_0 este pol de ordinul k pentru f dacă şi numai dacă z_0 este un zerou de ordinul k pentru $g = \dfrac{1}{f}$".

PROPOZIȚIA 4.4. Fie $f : B(z_0; 0, r) \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe coroana $B(z_0; 0, r)$. Atunci z_0 este punct singular esențial pentru f dacă şi numai dacă nu există $\lim_{z \to z_0} f(z)$.

DEMONSTRAȚIE. Afirmația rezultă, evident, din cele două propoziții anterioare.

OBSERVAȚIE. Se poate obține în cazul punctului singular esențial următorul rezultat mai precis, datorat lui Weierstrass: **Fie** $f : B(z_0; 0, r) \to \mathbb{C}$ **o funcție olomorfă în coroana** $B(z_0; 0, r)$ **și fie** z_0 **punct singular esențial pentru** f. **Atunci pentru orice** $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < r$) **mulțimea valorilor funcției** f **în coroana** $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ **este densă în** $\mathbb{C}$.

EXEMPLE. 1) Punctul $z = 1$ este un pol simplu pentru $f(z) = \dfrac{z}{z-1}$. Într-adevăr, $\lim\limits_{z\to 1} f(z) = \infty$, iar dezvoltarea Laurent a lui f în jurul punctului $z = 1$ este $f(z) = \dfrac{1}{z-1}(1 + z - 1) = \dfrac{1}{z-1} + 1$, cu partea principală $\dfrac{1}{z-1}$.

2) Punctul $z = 0$ este 0 singularitate aparentă pentru $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, deoarece $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$.

3) Punctul $z = 2$ este pol dublu pentru $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{(z-2)^3}$. Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ avem $\sin \pi z = c_0 + c_1(z-2) + c_2(z-2)^2 + \ldots$, unde $c_0 = 0$, $c_1 = \pi$, $c_2 = 0$, $c_3 = \dfrac{-\pi^3}{6}$ etc., deci $f(z) = \dfrac{\pi}{(z-2)^2} - \dfrac{\pi^3}{6} + \ldots$

4) Pentru funcția $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ punctul $z = 0$ este singular esențial deoarece $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \dfrac{1}{1!z} + \dfrac{1}{2!z^2} + \ldots$ și partea principală are o infinitate de termeni. În mod similar, $z = 0$ este singular esențial pentru $g(z) = \sin\dfrac{1}{z}$ și $h(z) = \cos\dfrac{1}{z}$.

Ne vom ocupa acum de cazul punctului de la infinit. Fie $f : B(0, r, \infty) \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe coroana $B(0; r, \infty)$ (exteriorul unui disc); vom spune în acest caz că **punctul** ∞ **este punct singular izolat al lui** f. Funcția $(t \to z = 1/t) : B\left(0; 0, \dfrac{1}{r}\right) \to B(0; r, \infty)$ este olomorfă; compunînd cu f obținem funcția olomorfă

$$f^* : B\left(0; 0, \frac{1}{r}\right) \to \mathbb{C},\quad f^*(t) = f(1/t),\ (\forall) t \in B\left(0; 0, \frac{1}{r}\right)$$

care are punctul $t = 0$ ca punct singular izolat.

DEFINIȚIA 4.3. În ipotezele de mai sus vom spune că $z = \infty$ este un **punct singular aparent al lui** f (sau că funcția f este olomorfă în $z = \infty$) dacă funcția f^* are $t = 0$ ca punct singular aparent. Vom spune că $z = \infty$ este **pol al lui** f dacă funcția f^* are pe $t = 0$ ca pol. Vom spune că $z = \infty$ este **punctul singular esențial al lui** f dacă funcția f^* are pe $t = 0$ ca punct singular esențial.

OBSERVAȚIE. Fie $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n$ dezvoltarea în serie Laurent a lui f în coroana $|z|>r$. Atunci

$$f^*(t)=f(1/t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n t^{-n}$$

este dezvoltarea în serie Laurent a funcției f^* în coroana $B\left(0;0,\frac{1}{r}\right)$. Rezultă că $z=\infty$ este punct singular aparent al lui f dacă $c_n=0$, $(\forall)\, n\geq 1$; $z=\infty$ este pol al lui f dacă $c_n=0$, $(\forall)\, n\geq 1$, cu excepția unui număr finit de valori (dar măcar una) și $z=\infty$ este punct singular esențial al lui f dacă $c_n\neq 0$ pentru o infinitate de valori ale lui $n\geq 1$.

4.2. Reziduuri, teorema reziduurilor

Fie $A\subset\mathbb{C}$ o mulțime deschisă, fie $f:A\to\mathbb{C}$ o funcție olomorfă și fie discul punctat (coroana) $B(z_0;0,r)\subset A(z_0\in\mathbb{C}; r>0)$ astfel încît punctul z_0 să fie punct singular izolat al funcției f.

DEFINIȚIA 4.4. Fie $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ dezvoltarea în serie Laurent a funcției f în coroana $B(z_0;0,r)$. Coeficientul c_{-1} se numește **reziduul funcției f în punctul singular** z_0 și se notează $\mathrm{Rez}(f,z_0)$.

PROPOZIȚIA 4.5. În ipotezele de mai sus, fie $C=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|=\rho<r\}$ un cerc de rază $\rho>0$ parcurs în sens trigonometric direct (orientat pozitiv). Atunci

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi}\int_C f(z)dz.$$

DEMONSTRAȚIE. Din formula de calcul al coeficienților unei serii Laurent într–o coroană circulară, avem:

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{-1+1}}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)\,\mathrm{d}z.$$

OBSERVAȚIE. Dacă $z_0\in\mathbb{C}$ este un punct singular aparent pentru funcția f, atunci $\mathrm{Rez}\,(f,z_0)=c_{-1}=0$.

Pentru cazul polului avem următoarea metodă de calcul al reziduului:

PROPOZIȚIA 4.6. Fie $f:B(z_0;0,r)\to\mathbb{C}$ o funcție olomorfă pe coroana $B(z_0;0,r)$, $(r>0)$ și fie $z_0\in\mathbb{C}$ un pol de ordinul $k>0$ pentru f. Atunci

$$\mathrm{Rez}(f,z_0)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^k f(z)]^{(k-1)}.$$

DEMONSTRAȚIE. În coroana $B(z_0;0,r)$ avem dezvoltarea în serie Laurent

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\ldots+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots,$$

cu $c_{-k} \neq 0$. Atunci funcţia

$$(z-z_0)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0) + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{(k-1)} + c_0(z-z_0)^k + \ldots,$$

este o funcţie olomorfă în tot discul $B(z_0; 0, r)$, căci $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) = c_{-k} \in \mathbb{C}$.

Derivînd de $(k-1)$ ori funcţia obţinută, rezultă:

$$[(z-z_0)^k f(z)]^{(k-1)} = (k-1)!c_{-1} + k(k-1)\ldots 2c_0(z-z_0) + \ldots,$$

şi atunci obţinem:

$$\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^k f(z)]^{(k-1)} = (k-1)!c_{-1}.$$

COROLAR. Fie $f: B(z_0; 0, r) \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă în coroana $B(z_0; 0, r)$, $(r > 0)$ astfel încît $f(z) = P(z)/Q(z)$, $(\forall)\ z \in B(z_0;0,r)$, cu P, Q funcţii olomorfe în discul $B(z_0;r)$, $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) = 0$, $Q'(z_0) \neq 0$. Atunci punctul $z_0 \in \mathbb{C}$ este un pol de ordinul întîi (pol simplu) pentru f şi Rez $(f, z_0) = P(z_0)/Q'(z_0)$.

DEMONSTRAŢIE. Punctul z_0 este zerou de ordinul întîi pentru funcţia $Q(z)/P(z)$ deci pol de ordinul întâi pentru f. Aplicînd propoziţia 4.6 pentru k=1 obţinem:

$$\text{Rez}\,(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

DEFINIŢIA 4.5. Fie $f: B(o; r, \infty) \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă în exteriorul discului $B(o; r)$, $(r > 0)$ (deci $z = \infty$ este punct singular izolat pentru funcţia f). Se numeşte **reziduul funcţiei f în punctul** ∞ reziduul funcţiei $(-1/t^2)f(1/t)$ în punctul $t = 0$.

OBSERVAŢIE. Definiţia dată reziduului în punctul $z = \infty$ se explică prin aceea că, de fapt, reziduul nu se asociază funcţiei complexe $f(z)$, ci formei diferenţiale complexe $\omega = f(z)\,dz$ care, prin schimbarea de variabilă $z = 1/t$, devine $\omega = f(z)\,dz = (-1/t^2)f(1/t)\,dt$.

PROPOZIŢIA 4.7. În ipotezele din definiţia 4.5 **fie** $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \rho > r\}$ **un cerc de rază** ρ **parcurs în sens trigonometric direct** (orientat pozitiv). **Atunci**:

$$\text{Rez}\,(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz.$$

DEMONSTRAŢIE. Fie $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ seria Laurent a lui f in coroana $B(0; r, \infty)$. Atunci avem:

$$-\frac{1}{t^2}f\left(\frac{1}{t}\right) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n t^{-(n+2)},$$

deci Rez $(f, \infty) = -c_{-1}$. Din formula coeficienţilor seriei Laurent obţinem:

$$\text{Rez}(f, \infty) = -c_{-1} = -\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz.$$

TEOREMA 4.8. (teorema lui Cauchy a reziduurilor). Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu și $f : D \setminus \{a_1, a_2, ..., a_k\} \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă pentru care $a_1, a_2, ..., a_k$ sînt puncte singulare izolate. Fie $K \subset D$ un compact cu frontiera $\Gamma = \mathrm{Fr}\, K$ curbă de clasă C^1 pe porțiuni, jordaniană, orientată pozitiv astfel încît $a_j \in \mathring{K}$, $j = 1, 2, ..., k$. Atunci

$$\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Rez}(f, a_j).$$

DEMONSTRAȚIE. Fie $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k$ frontierele orientate pozitiv ale unor discuri centrate în $a_1, a_2, ..., a_k$ disjuncte două cîte două și conținute în $\mathring{K}$.

Aplicind teorema 2.5, rezultă că

$$\int_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z.$$

Atunci, din propoziția 4.5 obținem:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Rez}(f, a_j).$$

OBSERVAȚIE. Apariția factorului 2πi în multe formule este datorată în ultimă analiză rezultatului din lema 2.6.

COROLAR. Fie $a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbb{C}$ punctele singulare izolate ale unei funcții $f : \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, ..., a_k\} \to \mathbb{C}$, olomorfe pe $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Atunci $\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Rez}\,(f, a_j) + \mathrm{Rez}\,(f, \infty) = 0$ (suma tuturor reziduurilor este nulă în cazul unui număr finit de puncte singulare izolate).

DEMONSTRAȚIE. Alegem $r > 0$ astfel încît $a_j \in B(0, r), j = 1, 2, ..., k$. Rezultă că funcția este olomorfă în exteriorul discului $B(0, r)$, deci punctul $z = \infty$ este punct singular izolat pentru f. Fie $\Gamma = \mathrm{Fr}\, B(0, r')$, $(r' > r)$ frontiera orientată pozitiv a discului $B(0, r')$ și aplicînd teorema 4.8:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Rez}(f, a_j).$$

Din propoziția 4.7 rezultă că $\int_{\Gamma} f(z)dz = -2\pi i\, \mathrm{Rez}(f, \infty)$, deci

$$\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Rez}(f, a_j) + \mathrm{Rez}(f, \infty) = 0.$$

NOTĂ ISTORICĂ. Inginerul francez P.A.Laurent (1813-1854) a prezentat în 1843 lucrarea privind dezvoltarea, care îi poartă numele, a unei funcții olomorfe într-o coroană. Cauchy a descoperit legătura intimă între integrale complexe și dezvoltările Laurent, studiind sistematic noțiunea de reziduu și stabilind proprietățile de bază ale reziduurilor. Lui Riemann îi datorăm stabilirea unor legături între seriile Laurent și seriile Fourier.

4.3. Zerouri și poluri; variația argumentului

Fie $B(z_0; 0, r)$, $(r > 0)$ un disc punctat și fie $f : B(z_0; 0, r) \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă. Presupunem că punctul z_0 este sau zerou de multiplicitate $k > 0$ sau pol de multiplicitate $-k > 0$ al lui $f(k < 0)$. Din seria Laurent a lui f în coroana $B(z_0;0,r)$ deducem că $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, unde funcția g este olomorfă în discul $B(z_0; r)$ și $g(z_0) \neq 0$ (în ambele cazuri).

Pentru orice $z \in B(z_0; 0, r)$ avem:

$$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} g(z) + (z - z_0)^k g'(z),$$

deci

(1) $$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad (\forall) z \in B(z_0; 0, r).$$

Rezultă că punctul z_0 este (în ambele situații) pol simplu al funcției f'/f (funcția g'/g este olomorfă în vecinătatea lui z_0) și că

(2) $\operatorname{Rez}(f'/f, z_0) = k$ = "multiplicitatea zeroului" (sau –"multiplicitatea polului").

TEOREMA 4.9. (a zerourilor și polurilor). Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $K \subset D$ un compact cu frontiera $\Gamma = \operatorname{Fr} K$ curbă de clasă C^1 pe porțiuni, jordiniană, orientată pozitiv și astfel încît $\mathring{K} \subset D$ și $\mathring{K}$ domeniu simplu conex. Fie $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathring{K}$ polurile unei funcții olomorfe neidentic nule $f : D \setminus \{a_1, a_2, ..., a_n\} \to \mathbb{C}$, nenulă pe Γ. Atunci f are un număr finit de zerouri în compactul K și

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P,$$

unde Z este suma multiplicităților zerourilor lui f din K, iar P este suma multiplicităților polurilor lui f din K.

DEMONSTRAȚIE. Presupunem că f are o infinitate de zerouri în K, care este mărginit fiind compact. Atunci mulțimea zerourilor lui f din K are cel puțin un punct de acumulare în K, fie acesta z'. Punctul z' nu coincide cu nici unul din polurile a_j, $j = 1, 2, ..., n$. Într-adevăr, pentru fiecare punct a_j putem alege cîte un disc D_j centrat în a_j astfel încît funcția f să fie olomorfă și nenulă pe $D_j \setminus \{a_j\}$, căci în jurul lui a_j, f se scrie: $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z - a_j)^{k_j}}$, cu $g(a_j) \neq 0$ și $g(z)$ olomorfă; deci vom alege discul D_j astfel încît în el să avem $g(z) \neq 0$ (din continuitate). Rezultă că $z' \in D \setminus \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, care este un domeniu și în care funcția f este olomorfă. Din principiul identității funcțiilor olomorfe rezultă că $f \equiv 0$ pe $D \setminus \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, contradicție. În concluzie, funcția f are în compactul K un număr finit de zerouri (evident izolate), deci funcția f'/f are în compactul K un număr finit de puncte singulare izolate, toate poluri de ordinul întîi (vezi considerațiile de la începutul paragrafului). Aplicînd teorema reziduurilor și ținînd seamă de formula (2) rezultă că:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = Z - P.$$

COROLAR. Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu, $K \subset D$ un compact cu frontiera $\Gamma = \mathrm{Fr}\,K$ de clasă C^1 pe porțiuni, jordaniană, orientată pozitiv și astfel încît $\mathring{K} \subset D$ și $\overset{\circ}{K}$ un domeniu simplu conex. Fie $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfă și neidentic nulă pe D. Atunci $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = Z$, unde Z este suma multiplicităților zerourilor lui f din $\mathbb{Z}$ (care sînt în număr finit).

DEFINIȚIA 4.6. Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu mărginit, $K \subset D$ un compact cu frontiera $\Gamma = \mathrm{Fr}\,K$ de clasă C^1 pe porțiuni, jordaniană, orientată pozitiv și astfel încît $\mathring{K} \subset D$ și $\mathring{K}$ este domeniu simplu conex. Fie $f : D \to \widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ o funcție neidentic nulă și olomorfă pe D cu excepția unui număr finit de puncte din $\mathring{K}$, care sînt poluri ale lui f. Atunci f are un număr finit de zerouri în $\mathring{K}$ și numărul întreg $Z - P = \theta(f;\mathring{K})$ (cu notațiile de mai sus) se numește **reziduul logaritmic al lui f în K.**

LEMA 4.10. Fie $f, g : D \to \widetilde{\mathbb{C}}$ două funcții care satisfac condițiile din definiția 4.6. Atunci funcțiile fg și f/g satisfac condițiile și au loc relațiile: $\theta(f,g;\mathring{K}) = \theta(f;\mathring{K}) + \theta(g;\mathring{K})$; $\theta(f/g;\mathring{K}) = \theta(f;\mathring{K}) - \theta(g;\mathring{K})$.

DEMONSTRAȚIE. Dacă f și g sînt olomorfe într-un punct atunci fg este olomorfă în acel punct și analog f/g cu excepția cazului cînd g se anulează în acel punct. Deoarece funcția g are un număr finit de zerouri chiar în domeniul D (D mărginit), rezultă că fg și f/g satisfac condițiile din definiția 4.6.

Fie $\theta(f;\mathring{K}) = Z_1 - P_1$, $\theta(g,\mathring{K}) = Z_2 - P_2$ și fie $z_0 \in \mathring{K}$ un punct care are o contribuție nenulă măcar într-unul din termenii Z_1, Z_2, P_1, P_2 (în cazul în care un punct $z_0 \in \mathring{K}$ nu are o contribuție nenulă în nici unul dintre acești termeni, atunci f și g sînt olomorfe în punctul z_0 și $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) \neq 0$, deci atît fg cît și f/g sînt olomorfe în punctul z_0 și $(fg)(z_0) \neq 0$, $(f/g)(z_0) \neq 0$, deci z_0 nu are nici o contribuție nenulă nici în expresiile $\theta(fg;\mathring{K})$ și $\theta(f/g;\mathring{K})$). Într-o vecinătate a punctului z_0 avem că $f(z) = (z - z_0)^{k_1}\varphi(z)$ cu $\varphi(z)$ olomorfă în aceea vecinătate și $\varphi(z_0) \neq 0$, iar $g(z) = (z - z_0)^{k_2}\psi(z)$ cu $\psi(z)$ olomorfă în acea vecinătate și $\psi(z_0) \neq 0$. Atunci:

$$f(z)g(z) = (z - z_0)^{k_1+k_2}\varphi(z)\psi(z)$$

și

$$f(z)/g(z) = (z - z_0)^{k_1-k_2}\varphi(z)/\psi(z).$$

Astfel, contribuția punctului z_0 în expresia $\theta(fg;\mathring{K})$ este suma contribuțiilor sale în $\theta(f;\mathring{K})$ și $\theta(g;\mathring{K})$ (indiferent de semnul lui k_1 sau k_2), iar contribuția lui z_0 în $\theta(f/g;\mathring{K})$ este diferența contribuțiilor sale în $\theta(f;\mathring{K})$ și $\theta(g;\mathring{K})$ (indiferent de semnul lui k_1 sau k_2). Chiar dacă contribuțiile punctului z_0 în funcțiile fg sau f/g se anihilează ($k_1 + k_2 = 0$ sau $k_1 - k_2 = 0$), adică z_0 nu este nici zerou nici

pol, ele se anihilează şi în expresiile $\theta(f;\mathring{K}) + \theta(g;\mathring{K})$ sau $\theta(f;\mathring{K})$ - $\theta(g;k)$. În concluzie rezultă că au loc relațiile:

$$\theta(fg;\mathring{K}) = \theta(f;\mathring{K}) + \theta(g;\mathring{K});\quad \theta(f/g;\mathring{K}) = \theta(f;\mathring{K}) - \theta(g;\mathring{K}).$$

TEOREMA 4.11. (a variației argumentului). În ipotezele din definiția 4.6, fie $\tilde{\Gamma} = f(\Gamma)$, fie $w \in \mathbb{C}\setminus\tilde{\Gamma}$ şi fie $I : \mathbb{C}\setminus\tilde{\Gamma} \to \mathbb{C}$ funcția

$$I(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz.$$

Atunci:

a) $I(w) = n(\tilde{\Gamma}, w)$ **(indexul lui $\tilde{\Gamma}$ față de $w \in \mathbb{C}\setminus\tilde{\Gamma}$),**

b)$I(w) = \theta(f-w;\mathring{K})$.

DEMONSTRAȚIE. a) Fie $\gamma : [0, 1] \to \Gamma$ o parametrizare de clasă C^1 pe porțiuni a curbei Γ; atunci $\tilde{\gamma} = f\circ\gamma : [0, 1] \to \tilde{\Gamma}$ este o parametrizare (de clasă C^1 pe porțiuni) a curbei $\tilde{\Gamma}$. În plus avem $\tilde{\gamma}'(t) = f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)$, $(\forall)$ $t \in [0, 1]$, cu excepția unui număr finit de puncte. Atunci rezultă că:

$$n(\tilde{\Gamma}, w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}} \frac{du}{u-w} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\tilde{\gamma}(t)-w}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))-w}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,dz = I(w).$$

b) Deoarece $(f-w)' = f'$, putem aplica teorema 4.9 şi obținem:

$$I(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(f(z)-w)'}{f(z)-w}\,dz = \Theta(f-w;\mathring{K}).$$

COROLAR. (Rouché). Fie $f, g : D \to \mathbb{C}$ funcții olomorfe pe domeniul mărginit D, $K \subset D$ un compact cu proprietatea că $\Gamma = \operatorname{Fr} K$ este o curbă de clasă C_1 pe porțiuni, jordaniană, pozitiv orientată. Presupunem că $|f(z)| > |g(z)| > 0$, $(\forall)$ $z \in \Gamma$. Atunci funcțiile f şi $f+g$ au acelaşi număr de zerouri (socotite cu multiplicități) în $\mathring{K}$.

DEMONSTRAȚIE. Deoarece funcțiile f şi $f+g$ nu au poluri în D rezultă că $\theta(f;\mathring{K})$ şi $\theta(f+g;\,k)$ sînt egale, respectiv, cu numărul zerourilor în K ale celor două funcții, deci trebuie să dovedim că $\theta(f+g;\mathring{K}) = \theta(f;\mathring{K})$. Conform lemei 4.10. avem:

$$\theta(f+g;\mathring{K}) - \theta(f;\mathring{K}) = \theta((f+g)/f;\mathring{K}).$$

Conform teoremei 4.11. rezultă că:

$$\theta((f+g)/f;\mathring{K}) = \theta(1+g/f;\mathring{K}) = n(\tilde{\Gamma},-1),$$

unde $\tilde{\Gamma} = h(\Gamma)$ şi $h = g/f$ (g şi f nu se anulează pe curba Γ în ipotezele corolarului). Pentru orice punct $u \in \tilde{\Gamma}$ avem:

$|u| = |h(z)| = \left|\dfrac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$, cu $z \in \Gamma$, deci curba $\tilde{\Gamma} \subset B(0;1)$. Cum $-1 \in \mathbb{C}\setminus\overline{B(0;1)}$ (deci componentei nemărginite a mulțimii $\mathbb{C}\setminus\tilde{\Gamma}$), din teorema indexului rezultă că $n(\tilde{\Gamma}, -1) = 0$, deci $\theta(f+g;\,\mathring{K}) = \theta(f;\,\mathring{K})$.

4.4. Aplicații: calculul unor integrale reale cu ajutorul reziduurilor

Vom calcula cîteva tipuri de integrale definite, reale cu ajutorul reziduurilor, fără a calcula primitivele (calcul imposibil dealtfel în multe cazuri).

Tipul I: $I = \int\limits_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\,\mathrm{d}t$,

unde $R(x, y)$ este o funcție rațională al cărei numitor nu se anulează pe cercul unitate $x^2+y^2 = 1$.

Notăm $e^{it} = z$; pentru $t \in [0; 2\pi]$ punctul z parcurge cercul unitate $\bar{C}$. Avem relația $\bar{z} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{1}{z}$ și atunci putem scrie: $\sin t = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$, $\cos t = \frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, și $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}z}{iz}$. Rezultă că integrala dată este egală cu integrala curbilinie următoare:

$$I = \int_C \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)\mathrm{d}z = 2\pi i \times$$

(suma reziduurilor funcției obținute, în punctele ei singulare din interiorul discului unitate).

Exemplu. Fie $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a + \sin t}$, unde $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$.

Notînd ca mai sus $e^{it} = z$ se obține egalitatea:

$$I = \int_C \frac{1}{iz} \frac{1}{a + \frac{z^2 - 1}{2iz}}\,\mathrm{d}z = \int_C \frac{2}{z^2 + 2aiz - 1}\,\mathrm{d}z.$$

Unicul pol conținut în discul unitate este $z_0 = -ia+i(a^2-1)^{1/2}$ și reziduul său este

$$\frac{1}{(z_0 + ia)} = \frac{1}{i\sqrt{(a^2 - 1)}}.$$

Atunci obținem:

$$I = \int_C \frac{2}{z^2 + 2aiz - 1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,\mathrm{Rez}\left(\frac{2}{z^2 + 2aiz - 1}, z_0\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{(a^2 - 1)}}.$$

Tipul II. $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$,

unde $R(x)$ este o funcție rațională fără poluri reale cu proprietatea că $\lim\limits_{|x|\to\infty} xR(x) = 0$ (condiție suficientă ca integrala să fie convergentă).

Considerăm extinderea $R(z)$, $z \in \mathbb{C}$ și o integrăm pe un semicerc γ_r de rază r cu centrul în O (ca în figura VII.27).

Obținem: $\int_{\gamma_r} R(z)\,dz = 2\pi i$ (suma reziduurilor lui R în polurile ce se află în semidisc). Deci:

$$\int_{-r}^{r} R(x)\,dx + \int_{\delta(r)} R(z)dz = 2\pi i \sum \mathrm{Rez}(R(z)).$$

Cînd $r \to \infty$, atunci $\int_{-r}^{r} R(x)\,dx \to I$; vom arăta că $\int_{\delta(r)} R(z)\,dz \to 0$, deci vom obține că $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum \mathrm{Rez}(R(z))$, unde suma se ia după toate polurile lui $R(z)$ din semiplanul $y > 0$ (evident, funcția rațională $R(z)$ are un număr finit de poluri, deci pentru r suficient de mare toate polurile din semiplanul $y > 0$ se află în semidiscul de rază r). Pentru a demonstra ultima afirmație avem nevoie de :

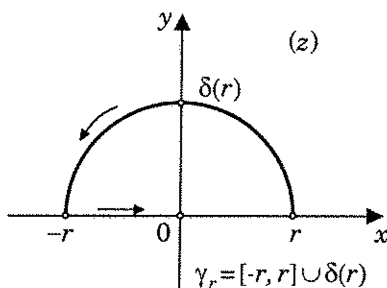


Figura VII.27

LEMA 4.12. (C. Jordan). Fie $f(z)$ **o funcție continuă definită în sectorul** $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ $(z = re^{i\theta})$. **Dacă** $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$, $(\theta_1 \le \arg z \le \theta_2)$, **atunci** $\int_{\delta(r)} f(z)\,dz \to 0$ **cînd** $r \to \infty$, unde $\delta(r)$ este arcul de cerc centrat în origine de rază r conținut în sectorul $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$.

DEMONSTRAȚIE. Fie $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Atunci avem;

$$\left|\int_{\delta(r)} f(z)dz\right| \le M(r)\int_{\delta(r)} ds = M(r)r(\theta_2 - \theta_1),$$

și, cum $\lim_{r\to\infty} rM(r) = 0$, rezultă că $\int_{\delta(r)} f(z)\,dz \to 0$, cînd $r \to \infty$.

EXEMPLU. Fie $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$; atunci avem $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$.

Funcția $\frac{1}{1+z^6}$ are șase poluri simple, dintre care trei $e^{i\pi/6}$, $e^{i\pi/2}$, $e^{5i\pi/6}$ se află în semiplanul superior. Deoarece $\lim_{|z|\to\infty} z\frac{1}{1+z^6} = 0$ se poate aplica lema 4.12.

Reziduul în fiecare din poluri este egal cu $\frac{1}{6z_0^5} = -\frac{z_0}{6}$, deci

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \pi i\left(-\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{6} - \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{6} - \frac{e^{5i\frac{\pi}{6}}}{6}\right) = -\frac{\pi i}{6}\left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{5i\frac{\pi}{6}}\right) = \frac{\pi}{6}\left(2\sin\frac{\pi}{6} + 1\right) = \frac{\pi}{3}.$$

În continuare vom avea nevoie și de următorul rezultat:

LEMA 4.13. (Jordan). Fie $f(z)$ **o funcție continuă definită în sectorul** $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ $(z = re^{i\theta})$. **Dacă** $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$, $(\theta_1 \le \arg z \le \theta_2)$, **atunci**

$\int_{\delta(r)} f(z)\,dz \to 0$ **cînd** $r \to 0$, **unde** $\delta(r)$ **este arcul de cerc centrat în originе de rază** r **conținut în sectorul** $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.

Demonstrația este identică cu aceea din lema 4.12.

Tipul III: $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\,dx$,

unde $f(z)$ este olomorfă în semiplanul $y > 0$ cu excepția, eventual, a unei mulțimi finite de puncte.

Cazul a). Presupunem că punctele singulare nu sînt pe axa reală. Atunci integrala $\int\limits_{-r}^{r} f(x)e^{ix}\,dx$ are sens (sînt două integrale reale $\int\limits_{-r}^{r} f(x)\cos x\,dx$ și $\int\limits_{-r}^{r} f(x)\sin x\,dx$) și, cînd $r \to \infty$, tinde la $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\,dx$, dacă această integrală converge.

PROPOZIȚIA 4.14. Dacă $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ **pentru** $y \geq 0$, **atunci**

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{-r}^{r} f(x)e^{ix}\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Rez}(f(z)e^{iz}),$$

unde suma se ia după toate punctele singulare ale lui $f(z)$ **situate în semiplanul** $y > 0$.

DEMONSTRAȚIE. Pentru $y \geq 0$ avem $|e^{iz}| = e^{-y} \leq 1$ și vom aplica aceeași metodă ca la integralele de tipul II. Cu aceleași notații vom arăta că $\int_{\delta(r)} f(z)e^{iz}\,dz \to 0$ cînd $r \to \infty$ și atunci rezultă propoziția. Dacă are loc condiția mai tare $\lim\limits_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$ este suficient să aplicăm lema 4.12. In situația mai generală din propoziție avem nevoie de următorul rezultat:

LEMA 4.15. Fie $f(z)$ **o funcție definită și continuă în sectorul** $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ **din semiplanul** $y \geq 0$. **Dacă** $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ **atunci integrala** $\int_{\delta(r)} f(z)e^{iz}\,dz \to 0$, **când** $r \to \infty$, **unde** $\delta(r)$ **este ca în lema 4.12.**

DEMONSTRAȚIE. Fie $z = re^{i\theta}$, $M(r) = \sup\limits_{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2} |f(re^{i\theta})|$.

Atunci : $\left|\int_{\delta(r)} f(z)e^{iz}\,dz\right| \leq M(r)\int\limits_{0}^{\pi} e^{-r\sin\theta} r\,d\theta.$

Dar $\int\limits_{0}^{\pi} e^{-r\sin\theta} r\,d\theta = 2\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-r\sin\theta} r\,d\theta$ și, deoarece, dacă $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, atunci $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1$, rezultă că

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-r\sin\theta} r\,d\theta \leq \int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-\frac{2}{\pi}r\theta} r\,d\theta \leq \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{2}{\pi}r\theta} r\,d\theta = \frac{\pi}{2}, \text{ deci } \int\limits_{0}^{\pi} e^{-r\sin\theta} r\,d\theta \leq \pi.$$

Obținem atunci egalitatea $\left|\int_{\delta(r)} f(z)e^{iz}\,dz\right| \le M(r)\pi$ și pentru $r \to \infty$, $M(r) \to 0$ prin ipoteză.

OBSERVAȚIE. Metoda se pote aplica și în cazul cînd integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\,dx$ converge în sensul valorii principale Cauchy.

EXEMPLU. Fie $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$; atunci avem

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(2\pi i \sum \mathrm{Rez}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1}\right)\right),$$

(conform propoziției 4.14.) unde suma se face după polurile din semiplanul $y > 0$.

Singurul pol în acest caz este $z = i$ și reziduul său este $\frac{1}{2ie}$, deci $I = \frac{\pi}{2e}$.

Cazul b). Considerăm acum cazul cînd $f(z)$ are și puncte singulare pe axa reală, dar ne vom limita la cazul cînd $f(z)$ are un pol simplu în 0. Alegem următorul drum de integrare, din figura VII.28 și demonstrăm următorul rezultat:

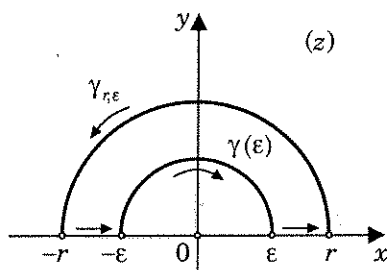


Figura VII.28.

LEMA 4.16. (a semireziduurilor). Dacă în $z = 0$ funcția $g(z)$ are un pol simplu, atunci

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} g(z)\,dz = \pi i\,\mathrm{Rez}(g; 0)$$

($\gamma(\varepsilon)$ parcurs în sens trigonometric direct).

DEMONSTRAȚIE. In vecinătatea lui 0 avem $g(z) = \frac{a}{z} + h(z)$, cu $h(z)$ olomorfă. Atunci $\int_{\gamma(\varepsilon)} h(z)\,dz \to 0$, cînd $\varepsilon \to 0$ (cu majorări uzuale) și $\int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{a}{2}\,dz = \pi i a$ (cu calculul $z = \varepsilon e^{it}$, etc.).

Folosind această lemă pentru funcția $g(z) = f(z)e^{iz}$ și metoda anterioară din cazul a) putem calcula integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\,dx$.

EXEMPLU. Fie $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$; atunci avem:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2ix}\,dx = \frac{1}{2}\frac{1}{2i}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x}\,dx\right] = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx.$$

Dar: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \lim_{\substack{r\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left[\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{r} \frac{e^{ix}}{x} dx \right] = \lim_{\substack{r\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left[\int_{\gamma_{r,\varepsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz \right]$

şi

$$\int_{\gamma_{r,\varepsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i \sum \text{Rez}\left(\frac{e^{iz}}{z}\right) = 0,\ \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z} dz \to -\pi i \,\text{Rez}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = -\pi i,\ \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz \to 0,$$

deci

$$I = \frac{1}{2i}\pi i = \frac{\pi}{2}.$$

OBSERVAȚII. 1) Pentru integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix}\, dx$ se alege drumul în semiplanul inferior $y \le 0$.

2) Pentru integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ax}\, dx$, unde $a \in \mathbb{C}$, se alege semiplanul în care $|e^{az}| \le 1$.

3) Integralele de tipul $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}\, dz$, $\omega \in \mathbb{R}$ se vor întîlni în studiul transformării Fourier.

Tipul IV: $I = \int_{0}^{\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha} dx,\ 0 < \alpha < 1,$

unde $R(x)$ este funcție rațională fără poluri pe semiaxa reală $x \ge 0$. Atunci I este convergentă în 0; o condiție necesară şi suficientă ca să fie convergentă la ∞ este $\lim_{x\to\infty} R(x) = 0$.

Pentru calculul lui I considerăm funcția $f(z) = \frac{R(z)}{z^\alpha}$ definită în domeniul $D = \mathbb{C} \setminus \{x \ge 0, y = 0\}$ şi vom preciza ce ramură continuă a funcției multiforme z^α alegem în domeniul D. Vom alege ramura pentru care $\arg z \in (0, 2\pi)$ şi conturul din figura VII.29.

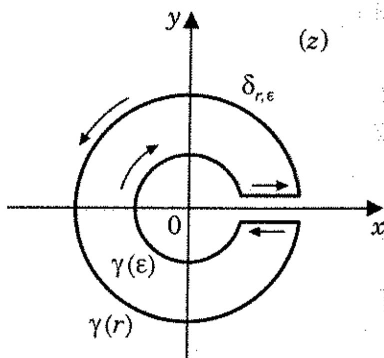


Figura VII.29.

Integrala $\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_{r,\varepsilon}} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz$ este egală, dacă $r \to \infty$ şi $\varepsilon \to 0$, cu suma reziduurilor funcției $\frac{R(z)}{z^\alpha}$ în polurile conținute în D. Avem:

$$\int_{\delta_{r,\varepsilon}} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz = \int_{\gamma(r)} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz + \int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz + (1 - e^{-2\pi i\alpha})\int_{\varepsilon}^{r} \frac{R(x)}{x^\alpha} dx,$$

deoarece $z^{\alpha} = e^{2\pi i\alpha}|z|^{\alpha}$ pentru $\arg z = 2\pi$. Funcţia $zf(z) \to 0$ cînd $z \to 0$ şi cînd $|z| \to \infty$, deoarece $\arg z$ este mărginit. Atunci, conform lemelor 4.12. şi 4.13., integralele pe $\gamma(r)$ şi $\gamma(\varepsilon)$ tind la 0, cînd $r \to \infty$ şi $\varepsilon \to 0$. La limită obţinem:

$$(1 - e^{-2\pi i\alpha})I = 2\pi i \sum \text{Rez}(\ldots).$$

Exemplu. Fie $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(1+x)}$, $0 < \alpha < 1$. Atunci $R(z) = 1/(z+1)$ cu polul $z = -1$ şi reziduul este $\frac{1}{e^{\pi i\alpha}}(\arg(-1) = \pi)$.

Obţinem: $(1 - e^{-2\pi i\alpha})I = 2\pi i \frac{1}{e^{\pi i\alpha}}$, deci $I = \dfrac{\pi}{\dfrac{e^{\pi i\alpha} - e^{-\pi i\alpha}}{2i}} = \dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha}$.

Tipul V : $I = \int_0^{\infty} R(x) \ln x \, dx$,

unde R este funcţie raţională fără poluri pe semiaxa reală $x \geq 0$ şi $\lim_{x\to\infty} xR(x) = 0$ (pentru convergenţa integralei la ∞).

Vom considera acelaşi domeniu D, acelaşi drum $\delta_{r,\varepsilon}$ şi aceeaşi ramură continuă a lui $\arg z$ ca la tipul IV. Vom integra funcţia $R(z)\ln^2 z$; ca la punctul precedent, conform lemelor 4.12. şi 4.13, integralele pe $\gamma(r)$ şi $\gamma(\varepsilon)$ tind la 0, cînd $r \to \infty$ şi $\varepsilon \to 0$. Dacă $\arg z = 2\pi$, atunci $\ln z = \ln|z| + 2\pi i$. Obţinem:

$$\int_0^{\infty} R(x) \ln^2 x \, dx - \int_0^{\infty} R(x)(\ln x + 2\pi i)^2 \, dx = 2\pi i \sum \text{Rez}(R(z)\ln^2 z),$$

sau încă

$$-2\int_0^{\infty} R(x) \ln x \, dx - 2\pi i \int_0^{\infty} R(x) \, dx = \sum \text{Rez}\,(R(z)\ln^2 z).$$

Dar $R(x)$ este real pentru $x \in \mathbb{R}$, deci rezultă

$$\int_0^{\infty} R(x) \ln x \, dx = -\frac{1}{2}\text{Re}\left(\sum \text{Rez}\,(R(z)\ln^2 z)\right)$$

$$\int_0^{\infty} R(x) \, dx = -\frac{1}{2\pi}\text{Im}\left(\sum \text{Rez}\,(R(z)\ln^2 z)\right).$$

Exemplu. Fie $I = \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^3} dx$.

Reziduul funcţiei $\frac{\ln^2 z}{(1+z)^3}$ în polul triplu $z = -1$ este $1-\pi i$. Cu formula de mai sus obţinem $I = 1/2$.

Capitolul VIII CALCUL OPERAȚIONAL

§ 1. Semnale; timp şi frecvență

Fie $(\mathscr{T}, \leq)$ o mulțime total ordonată, ale cărei elemente se numesc **momente**. Orice funcție $f(t)$, $f : \mathscr{T} \to \mathbb{R}$ se numeşte **semnal** în timp; dacă $\mathscr{T}$ este un interval (pe dreapta reală, cu ordinea uzuală), se spune că f este **continuu** (sau mai corect, **continual**), iar dacă $\mathscr{T}$ este o mulțime finită sau numărabilă, de exemplu $\mathscr{T} = \{0, 1, 2, ..., N-1, ...\}$, atunci f se numeşte semnal **discret**. Un semnal discret f se identifică prin şirul $\{f(n)\}_{n\in\mathscr{T}}$ al eşantioanelor sale.

Exemple. 1) $\mathscr{T} = \mathbb{R}$; $f(t) = A \sin(\omega t+\phi)$ cu A, ω, ϕ constante reale ($A > 0$, $\omega > 0$) se numeşte **semnal sinusoidal** de amplitudine A, fază ϕ şi perioadă principală $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

2) Pentru orice semnal continual $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi pentru orice pas de eşantionare $T > 0$, se poate asocia un semnal discret; anume $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, unde $x_n = f(nT)$.

3) Semnalul continual

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ u(t) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad t < 0 \end{cases}$$

se numeşte **treapta unitate** , iar restricția lui la $\mathbb{Z}$, adică

$$u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ u(n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad n = 0, 1, 2, 3, ... \\ 0 & \text{dacă} \quad n = -1, -2, ... \end{cases}$$

se numeşte **treapta unitate discretă**. Graficele lor sînt indicate în figura VIII.1.

Dacă $f : \mathscr{T} \to \mathbb{R}$ este un semnal şi τ este un moment fixat, atunci $g : \mathscr{T} \to \mathbb{R}$,

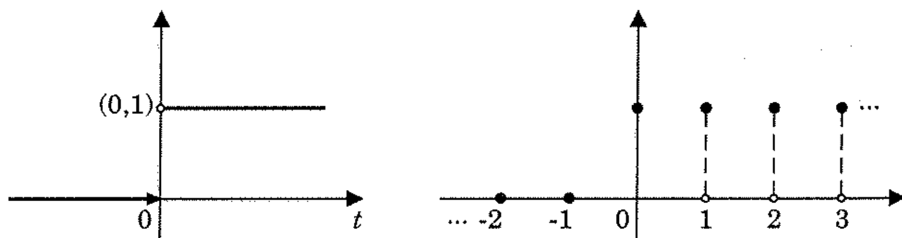


Figura VIII.1.

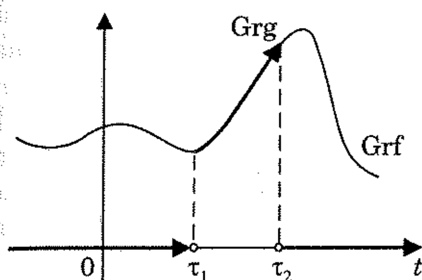


Figura VIII.2.

Figura VIII.3.

$g(t) = f(t)\, u(t-\tau)$ este un nou semnal, astfel încît $g(t) = 0$ pentru $t < \tau$ şi $g(t) = f(t)$ pentru $t \geq \tau$. Dacă $\tau_1 < \tau_2$, atunci $g(t) = f(t)[u(t-\tau_1) - u(t-\tau_2)]$ se numeşte **"fereastra"** lui f în intervalul de timp $[\tau_1, \tau_2]$.

Graficul lui g este reprezentat întărit în figura VIII.2.

Reţinem că dacă $f : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, atunci funcţia fu este nulă pentru $t < 0$ şi coincide cu f pentru $t \geq 0$. Dacă τ este un moment fixat, funcţia $f_\tau : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, $t \to f(t-\tau)$ este numită **întîrzierea** lui f cu τ. Graficul lui f_τ este reprezentat punctat în figura VIII.3 ($f_\tau(\tau) = f(0)$).

Să considerăm acum o funcţie $F(\omega)$, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Atunci pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$, $F(\omega)$ este un număr complex şi admite scrierea exponenţială $F(\omega) = A(\omega)\, e^{i\Phi(\omega)}$, unde $A(\omega) = |F(\omega)|$ şi $\Phi(\omega) = \arg F(\omega)$ mod 2π (reamintim că se scrie $a = b \bmod 2\pi$ dacă există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încît $a - b = 2k\pi$). Funcţii de tipul considerat apar în legătură cu utilizarea metodelor frecvenţiale. Dacă $F(\omega)$ este spectrul în frecvenţă al unui semnal în timp $f(t)$ (vom vedea ulterior sensul matematic, în legătură cu transformarea Fourier), atunci funcţiile $A(\omega)$, $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $\Phi(\omega)$, $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ reprezintă amplitudinea în frecvenţă şi respectiv faza în frecvenţă ale semnalului.

Sîntem acum în măsură să precizăm cadrul în care vom dezvolta elementele de calcul operaţional. Vom prezenta studiul sistematic al unor transformări celebre (Laplace, Fourier, etc.) exprimînd relaţiile dintre domeniul timp, domeniul-frecvenţă şi domeniul-complex, după schema din figura VIII.4.

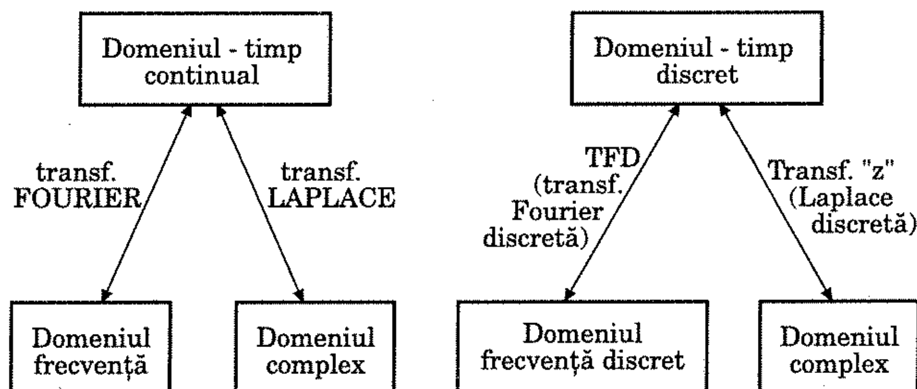


Figura VIII.4.

Totodată vom indica metode de rezolvare a unor clase de ecuaţii şi sisteme diferenţiale (ordinare sau cu derivate parţiale), numite **metode operaţionale** şi vom iniţia studiul unor sisteme dinamice cu ajutorul noţiunilor de matrice de transfer, răspuns-impuls (în timp sau în frecvenţă), restrîngîndu-ne la cazul important al sistemelor liniare. În cazul sistemelor cu impulsuri se utilizează **metodele distribuţionale**, utile şi în prezentarea aparatului matematic pe care îl reprezintă transformarea Fourier. Toate aceste metode sînt aplicate în teoria sistemelor, în studiul circuitelor etc.

§ 2. Transformarea Laplace

§ 2.1. Funcţii original şi definiţia transformării Laplace

Vom defini o clasă importantă de funcţii - clasa $\mathcal{O}$ a funcţiilor original (Laplace) şi fiecărei funcţii din $\mathcal{O}$ îi vom asocia transformata ei Laplace. Vom vedea că această asociere este inversabilă şi va permite un transfer de operaţii, astfel încît unor operaţii asupra funcţiilor din $\mathcal{O}$ să le corespundă operaţii "mai simple" între imaginile lor Laplace.

DEFINIŢIA 2.1. O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se numeşte **original Laplace** dacă îndeplineşte următoarele condiţii:

1) $f(t) = 0$ pentru orice $t < 0$;

2) f este continuă pe porţiuni pe intervalul $[0, \infty)$;

3) există $M > 0$ şi $s_0 \geq 0$ astfel încît $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$ pentru orice $t \geq 0$.

Vom nota cu $\mathcal{O}$ mulţimea funcţiilor original Laplace.

Condiţia 1) este naturală şi corespunde faptului că multe funcţii de timp (semnale) devin semnificative din punct de vedere fizic începînd de la un anumit moment de timp (ales $t = 0$). Condiţiile 2) şi 3) sînt utile pentru construcţiile matematice care urmează. Reamintim că o funcţie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă pe porţiuni dacă pe orice interval compact are cel mult un număr finit de discontinuităţi şi are limite laterale finite în orice punct. O funcţie continuă pe porţiuni este evident integrabilă pe orice interval compact. Reamintim de asemenea că dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ şi $f = f_1 + if_2$ deci $f_1 = \operatorname{Re} f$, $f_2 = \operatorname{Im} f$, atunci f este prin definiţie continuă pe porţiuni în cazul cînd f_1 şi f_2 au această proprietate; în plus, pentru orice $a < b$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b f_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Condiţia 3) numită şi condiţia de **creştere exponenţială** (cu **indicele** s_0) va asigura convergenţa integralei care defineşte transformata Laplace.

EXEMPLE. 1) Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie elementară (de exemplu $f(t) = e^{kt}$, $f(t) = \sin \omega t$, $f(t)$ polinomială etc.), atunci fu îndeplineşte condiţiile 1,2. Apoi dacă există $k \geq 0$ astfel încît $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)e^{-kt} = 0$, atunci este îndeplinită condiţia 3). Într-adevăr, pentru $\varepsilon = 1$ va exista $\delta > 0$ astfel încît $(\forall)\ t > \delta$,

$|f(t)| < e^{kt}$; apoi pe intervalul $[0, \delta]$ funcția va fi mărginită, $|f(t)| \leq M$ deci luînd $M_1 = \max(M, 1)$ vom avea $|f(t)| \leq M_1 e^{kt}$ pentru orice $t \geq 0$.

În particular, pentru orice polinom P, avem $Pu \in \mathcal{O}$ (cu indicele $s_0 = 1$). În mod similar, $(\forall)\omega \in \mathbb{R}$, $(\sin \omega t)u$ și $(\cos \omega t)u$ aparțin clasei $\mathcal{O}$ (cu indicele $s_0 = 0$). De asemenea, $e^{\omega t}u \in \mathcal{O}$ cu indicele $\max(\omega, 0)$.

2) Treapta unitate u satisface evident condițiile 1, 2, 3 (cu indicele $s_0 = 0$) deci $u \in \mathcal{O}$. În cele ce urmează, în funcție de context, vom nota uneori cu f eventualul produs fu.

3) Funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) = e^{t^2}u(t)$ satisface condițiile 1 și 2 dar nu și condiția 3, deci $h \notin \mathcal{O}$; de asemenea, funcția

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad t \leq 0 \\ \dfrac{1}{t} & \text{dacă} \quad t > 0 \end{cases}$$

nu aparține clasei $\mathcal{O}$, deoarece nu satisface condițiile 2 și 3.

4) Dacă f și g sînt funcții original Laplace și α, β sînt constante (reale sau complexe), atunci se verifică imediat că $\alpha f + \beta g$ și $f \cdot g$ sînt de asemenea funcții original. Este evident că $\mathcal{O}$ este un spațiu vectorial (complex).

TEOREMA 2.1. Fie $f \in \mathcal{O}$ o funcție fixată, cu indicele s_0. Considerăm semiplanul drept $S(s_0) = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > s_0\}$ din planul complex al variabilei s. Atunci pentru orice $s \in S(s_0)$, integrala improprie

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\, dt$$

este absolut convergentă.

DEMONSTRAȚIE. Deoarece $f(t) = 0$ pentru $t < 0$ avem de arătat că integrala $\int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt$ este convergentă pentru $\operatorname{Re} s > s_0$. Conform condiției 3) din definiția 2.1. rezultă că $(\exists)\, M > 0$ astfel încît $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$, pentru orice $t \geq 0$.

Scriind că $s = \sigma + i\tau$, rezultă că $f(t)e^{-st} = f(t)e^{-\sigma t}e^{-i\tau t}$ deci $|f(t)e^{-st}| = |f(t)|e^{-\sigma t} \leq Me^{(s_0 - \sigma)t}$, pentru orice $t \geq 0$ (am folosit faptul că $|e^{ix}| = 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$). Aplicînd criteriul de comparație de la integrale improprii, este suficient să observăm că integrala

$$\int_0^\infty e^{(s_0 - \sigma)t}\, dt = \left. \frac{e^{(s_0 - \sigma)t}}{s_0 - \sigma} \right|_0^\infty$$

este convergentă pentru $\sigma = \operatorname{Re} s > s_0$, cu valoarea $1/(\sigma - s_0)$.

Reținem totodată că $(\forall)\, s \in S(s_0)$, există

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt = \lim_{R \to \infty} \int_0^R f(t)e^{-st}\, dt \text{ și în plus, } |F(s)| \leq \frac{M}{\sigma - s_0}.$$

DEFINIȚIA 2.2. Dacă $f \in \mathscr{O}$ are indicele s_0, atunci funcția

$F : S(s_0) \to \mathbb{C}$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$, se numește **transformata Laplace a lui** f (sau **imaginea Laplace** a originalului f).

Vom nota pe scurt

$$f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s) \text{ sau } F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}, \text{ sau } F = \mathscr{L}f,$$

indicînd astfel că funcția complexă F este transformata Laplace a funcției original f. Asocierea $f \to F$ se mai numește **transformarea Laplace**; domeniul ei de definiție este $\mathscr{O}$ dar domeniul de valori este mai dificil de descris (el fiind reuniunea $\bigcup_{s_0 \geq 0} \mathbb{C}^{S(s_0)}$).

EXEMPLE. 1) Treapta unitate u aparține lui $\mathscr{O}$, cu indicele $s_0 = 0$ și transformata ei Laplace este funcția complexă $U : S(0) \to \mathbb{C}$, definită prin

$$U(s) = \mathscr{L}u(t) = \int_0^\infty e^{-st} dt.$$

Dar

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1 - e^{-sT}}{s} = \frac{1}{s}$$

(deoarece pentru $\sigma = \operatorname{Re} s > 0$, $e^{-sT} = e^{-(\sigma + i\tau)T} = e^{-\sigma t} \cdot e^{-i\tau T}$ tinde către zero pentru $T \to \infty$, ca produs între o funcție care tinde către zero și o funcție mărginită).

2) Dacă $\omega \in \mathbb{C}$, atunci pentru $f(t) = e^{\omega t}u(t)$ transformata Laplace este

$F(s) = \int_0^\infty e^{\omega t} e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(s-\omega)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s-\omega}$, definită în semiplanul $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \omega$.

3) Dacă f și g sînt funcții original Laplace, atunci este evident că $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\mathscr{L}\{\alpha f + \beta g\} = \int_0^\infty (\alpha f(t) + \beta g(t))e^{-st}\,\mathrm{d}t = \alpha \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t + \beta \int_0^\infty g(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \alpha \mathscr{L}f + \beta \mathscr{L}g,$$

deci transformarea Laplace are caracter liniar (fără a fi un operator liniar, deoarece codomeniul nu este spațiu vectorial).În particular, $(\forall)\ \omega \in \mathbb{C}$,

$$\mathscr{L}u(t)\sin \omega t = \mathscr{L}u(t)\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = \frac{1}{2i}\mathscr{L}\{u(t)e^{i\omega t}\} - \frac{1}{2i}\mathscr{L}\{u(t)e^{-i\omega t}\} =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

În mod similar, $\mathscr{L}\{u(t)\cos \omega t\} = \dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$.

4) Pentru orice întreg $n \geq 1$,

$$\mathscr{L}\{t^n u(t)\} = \int_0^\infty t^n e^{-st}\,\mathrm{d}t \overset{st=v}{=} \int_0^\infty \frac{v^n}{s^n} e^{-v} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty v^n e^{-v}\,\mathrm{d}v = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

(calcul valabil pentru s real, $s > 0$. Vom vedea în teorema 2.2 că ambii termeni ai relației sînt funcții olomorfe în $\operatorname{Re} s > 0$ și conform principiului identității avem $\mathcal{L}\{t^n u(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ pentru orice s, $\operatorname{Re} s > 0$). Mai general, se poate arăta că pentru orice $\alpha > -1$ real,

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha} u(t)\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

Rezultatele obținute mai sus pot fi sintetizate într-un tabel care trebuie reținut:

$f(t)$ înmulțit cu $u(t)$	$F(s)$	semiplanul drept
1	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re} s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\operatorname{Re} s > 0$
$e^{\omega t}$	$\frac{1}{s-\omega}$	$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \omega$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} s > \lvert\operatorname{Im} \omega\rvert$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\operatorname{Re} s > \lvert\operatorname{Im} \omega\rvert$

Folosind rezultatele de analiză matematică demonstrate în anul I pentru integrale improprii reale cu parametri (lesne de extins la cazul funcțiilor cu valori complexe), vom obține încă un rezultat de bază din teoria transformării Laplace.

TEOREMA 2.2. Fie $f \in \mathcal{O}$ cu indicele s_0. Atunci funcția complexă $F : S(s_0) \to \mathbb{C}$, $F = \mathcal{L}\{f\}$ este olomorfă în semiplanul drept

$$S(s_0) = \{\operatorname{Re} s > s_0\}.$$

DEMONSTRAȚIE. Pentru orice $s_1 > s_0$, integrala improprie cu parametrul s

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt$$

este uniform convergentă în semiplanul $\operatorname{Re} s \geq s_1$ (folosind criteriul lui Weierstrass). În plus, vom putea deriva în raport cu parametrul s [ceea ce revine la o combinație liniară de derivate în raport cu variabilele reale σ, τ; anume, dacă $s = \sigma + i\tau$, atunci $\frac{\partial}{\partial \bar{s}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \sigma} + i\frac{\partial}{\partial \tau}\right)$]. Atunci în orice punct $s \in S(s_0)$, rezultă:

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{s}}(s) = \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) \frac{\partial}{\partial \bar{s}}(e^{-st})\, dt = 0$$

[funcția complexă $s \to e^{-st}$ fiind olomorfă pentru orice t fixat, avem $\frac{\partial}{\partial \bar{s}}(e^{-st}) \equiv 0$]. Aşadar, funcția F este de clasă C^1 (căci $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial F}{\partial \tau}$ sînt continue) şi $\frac{\partial F}{\partial \bar{s}} = 0$ în deschisul $S(s_0)$, deci F este olomorfă, conform corolarului 2 al teoremei VI.1.3.

OBSERVAȚIE. În condițiile teoremei 2.2., avem $\lim\limits_{\text{Re}\, s \to \infty} F(s) = 0$. Într-adevăr, dacă $|f(t)| \le Me^{s_0 t}$, atunci am văzut că $|F(s)| \le \frac{M}{\text{Re}\, s - s_0}$ pentru Re $s > s_0$.

Aşadar, nu orice funcție complexă este transformata Laplace a unei funcții din $\mathcal{O}$ (de exemplu, $F(s) = \frac{s}{s+1}$ nu satisface condiția anterioară, deoarece $\lim\limits_{\text{Re}\, s \to \infty} \frac{s}{s+1} = 1$).

2.2. Proprietățile de calcul ale transformării Laplace

Dăm o listă de proprietăți ale transformării Laplace, utilizate curent în aplicații.

1) **Dacă** $f \in \mathcal{O}$ **şi** $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$, **atunci pentru orice** α **real strict pozitiv,** $f(\alpha t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$ **("teorema asemănării").**

Într-adevăr,

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \int_0^\infty f(\alpha t) e^{-st}\, dt \overset{\alpha t = v}{=} \int_0^\infty f(v) e^{-s\frac{v}{\alpha}} \frac{1}{\alpha}\, dv = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(v) e^{-s\frac{v}{\alpha}}\, dv = \frac{1}{\alpha} F(\frac{s}{\alpha}).$$

2) **Dacă** $f \in \mathcal{O}$ **şi** $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$, **atunci pentru orice** $s_0 \in \mathbb{C}$, $f(t)e^{s_0 t} \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s - s_0)$ **("teorema deplasării").**

Într-adevăr,

$$\mathcal{L}\{f(t)e^{s_0 t}\} = \int_0^\infty f(t) e^{s_0 t} e^{-st}\, dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s-s_0)t}\, dt = F(s - s_0).$$

EXEMPLU. $\mathcal{L}\{e^{kt} \cos \omega t \cdot u(t)\} = \frac{s-k}{(s-k)^2 + \omega^2}$ şi $\mathcal{L}\{e^{kt} \sin \omega t \cdot u(t)\} = \frac{\omega}{(s-k)^2 + \omega^2}$, pentru orice constante k, ω. În mod similar, $\mathcal{L}\{t^n e^{s_0 t} u(t)\} = \frac{n!}{(s-s_0)^{n+1}}$, deci $\frac{1}{(s-s_0)^n} = \mathcal{L}\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{s_0 t} u(t)\right\}$ pentru orice întreg $n \ge 1$.

3) **Dacă** $f \in \mathcal{O}$ **şi** $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$, **atunci pentru orice** $\tau > 0$, **transformata Laplace a întîrziatului**

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad t < \tau \\ f(t - t) & \text{dacă} \quad t \ge \tau \end{cases}$$

este $e^{-s\tau}F(s)$ **("teorema întîrzierii").**

Pentru demonstrație, observăm că

$$\mathcal{L}\{f_\tau(t)\} = \int_0^\infty f_\tau(t)e^{-st}\,dt = \int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-st}\,dt \overset{t-\tau=v}{=}$$

$$\overset{t-\tau=v}{=} \int_0^\infty f(v)e^{-s(\tau+v)}\,dv = e^{-s\tau}\int_0^\infty f(v)e^{-sv}\,dv = e^{-s\tau}F(s).$$

EXEMPLU. Considerăm semnalul dreptunghiular $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = A[u(t-a)-u(t-b)]$, unde $0 < a < b$ și A sînt constante. Atunci $f = A(u_a-u_b)$ deci

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = A(e^{-as}\frac{1}{s} - e^{-bs}\frac{1}{s}) = \frac{A}{s}(e^{-as} - e^{-bs}).$$

Pentru $\varepsilon > 0$, fixat se numește **impuls unitar de durată ε aplicat la momentul $t = 0$ semnalul** $\delta_{(\varepsilon)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\delta_{(\varepsilon)}(t) = \frac{1}{\varepsilon}[u(t) - u(t-\varepsilon)];$$ v. fig. VIII.5.

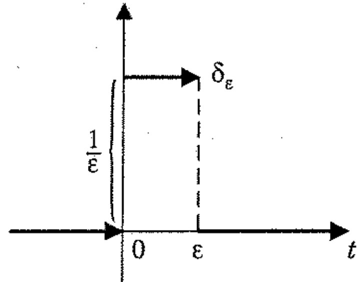


Figura VIII.5.

Transformata Laplace a lui $\delta_{(\varepsilon)}$ este $\frac{1}{\varepsilon s}(1-e^{-\varepsilon s})$. Dacă $\varepsilon \to 0$ atunci $\delta_{(\varepsilon)}$ tinde către implusul unitar pur aplicat la momentul $t = 0$ (definit ca distribuția δ), convergența fiind considerată în sensul distribuțiilor. Se obține astfel o justificare pentru definirea transformatei Laplace a lui δ ca fiind

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon s}(1 - e^{-\varepsilon s}) = 1.$$

4) **Presupunem că** $f \in \mathcal{O}$ **și că** $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$. Atunci $t^n f(t) \in \mathcal{O}$ **și** $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$ **("teorema derivării imaginii").**

Demonstrația se face imediat prin inducție.

EXEMPLU. Deoarece $\mathcal{L}\{e^{\omega t}u(t)\} = \frac{1}{s-\omega}$, rezultă că

$$\mathcal{L}\{t^n e^{\omega t}u(t)\} = (-1)^n(\frac{1}{s-\omega})^{(n)} = \frac{n!}{(s-\omega)^{n+1}}$$ pentru orice întreg $n \geq 1$.

5) **Dacă** $f \in \mathcal{O}$, $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$ **și** $g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$ **(deci g este o primitivă a lui f), atunci** $\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s}F(s)$ **("teorema integrării originalului").**

Într-adevăr, avem evident $g \in \mathcal{O}$ și $g' = f$ aproape peste tot deci $\mathcal{L}\{g'(t)\} = F(s)$, adică

$$F(s) = \int_0^\infty g'(t)e^{-st}\,dt = g(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty g(t)e^{-st}\,dt = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0_+) = s\mathcal{L}\{g(t)\},$$

deoarece $g(0_+) = 0$.

6) **Fie** $f \in \mathcal{O}$ **de indice** s_0, $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$ **şi fie** $G(s)$ **primitiva lui** $F(s)$ **în semiplanul** $S(s_0)$, **presupusă olomorfă în punctul de la infinit, cu** $G(\infty) = 0$. **Dacă** $\frac{f(t)}{t} \in \mathcal{O}$, **atunci** $\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{\mathcal{L}} -G(s)$ **("teorema integrării imaginii").**

Într-adevăr, fie $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, $t > 0$, deci $f(t) = tg(t)$ şi conform teoremei derivării imaginii, rezultă $F(s) = -\Phi'(s)$, unde $\Phi(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$. Dar $G'(s) = F(s)$ deci $G + \Phi = C$, constant. Dar $\Phi(\infty) = 0$ şi $G(\infty) = 0$ deci $C=0$ şi ca atare $G = \Phi$, deci

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \Phi(s) = -G(s).$$

EXEMPLU. Fie $f(t) = u(t) \sin t$, deci $f(s) = \frac{1}{s^2+1}$; $G(s) = \operatorname{arctg} s - \frac{\pi}{2}$, deci

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t} u(t)\right\} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s.$$

De asemenea, notînd $s_i(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$ ("sinusul integral"), rezultă

$\mathcal{L}\{s_i(t)\} = \frac{1}{s}(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s)$, conform proprietăților 5),6). În cele de mai sus, prin "arctg" se înțelege ramura olomorfă care pentru s real şi $s > 0$ ia valori în intervalul $(0, \pi/2)$.

7) **Presupunem că** $f \in \mathcal{O}$ **şi că există** $T > 0$ **astfel încît** $f(t+T) = f(t)$ **pentru orice** $t \geq 0$. **Notăm** $f_0(t) = f(t)[u(t)-u(t-T)]$;v. fig. VIII.6.

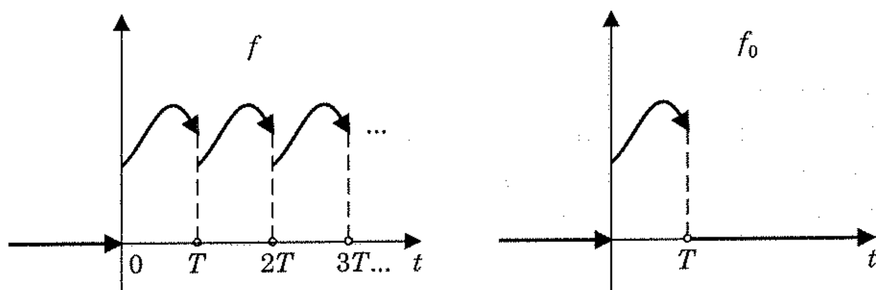


Figura VIII.6.

Dacă $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$ **şi** $f_0(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_0(s)$, **atunci într-un semiplan drept:**

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} F_0(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \text{ ("cazul semnalelor periodice").}$$

DEMONSTRAȚIE. $F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t) e^{-st} dt.$ Dar

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(t) e^{-st} dt \overset{(t=\tau+kT)}{=} \int_0^T f(\tau+kT) e^{-s(\tau+kT)} d\tau = e^{-skT} \int_0^T f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-skT} F_0(s).$$

Atunci pentru orice s real și pozitiv,

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} F_0(s) = F_0(s)(1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \ldots) = F_0(s)\frac{1}{1 - e^{-sT}}.$$

Conform principiului identității, relația are loc pentru orice s cu Re s suficient de mare.

EXEMPLE. Considerăm semnalul dreptunghiular, periodic de perioadă T din figura VIII.7($0 < a < T$).

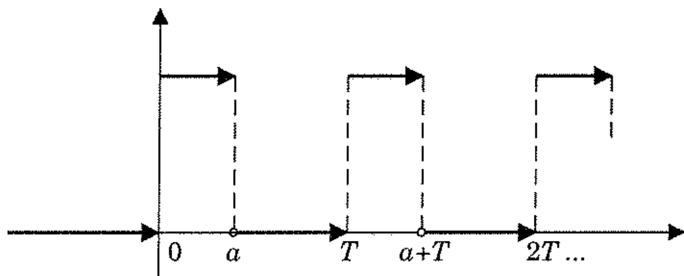


Figura VIII.7

În acest caz,

$$F_0(s) = \int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau = \int_0^a Ae^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_a^T 0\cdot e^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{A}{s}(1 - e^{-sa}),$$

iar transformata Laplace a semnalului va fi: $\dfrac{A}{s}\dfrac{1 - e^{-sa}}{1 - e^{-sT}}$.

8) **Dacă**

$$f(t) = (a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + \ldots)u(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s) = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{2a_3}{s^3} + \ldots,$$

dezvoltările fiind convergente în jurul lui $t = 0$ **și respectiv** $s = \infty$ **și dacă există** $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} f(t)$, $\lim\limits_{s \to \infty} F(s)$, **atunci** $\lim\limits_{s \to \infty} sF(s) = f(0_+)$ **("teorema valorii inițiale").**

Într-adevăr, $\lim\limits_{s \to \infty} sF(s) = a_1$ și $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} f(t) = a_1$.

9) **Dacă** $f \in \mathscr{O}$ **este derivabilă cu** $f' \in \mathscr{O}$ **și există** $f(\infty) = \lim\limits_{t \to \infty} f(t)$, **atunci** $\lim\limits_{s \to \infty} sF(s) = f(\infty)$ **("teorema valorii finale").**

Într-adevăr, integrînd prin părți, avem relația $\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = sF(s) - f(0_+)$ și de unde făcînd $s \to 0$, rezultă $\int_0^{\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{s \to 0} sF(s) - f(0_+)$ deci

$$\lim_{s \to 0} sF(s) = f(\infty).$$

2.3. Aplicații ale transformatei Laplace

a) Rezolvarea ecuațiilor diferențiale liniare

Începem cu demonstrarea teoremei "derivatei originalului", utlilizată în rezolvarea ecuațiilor şi sistemelor diferențiale liniare.

TEOREMA 2.3. Fie $f \in \mathcal{O}$, $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$ **şi presupunem că există** $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ **pe** $(0, \infty)$, $f^{(k)} \in \mathcal{O}$ **şi** $f^{(k)}(0_+) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f^{(k)}(t)$, $0 \le k \le n$. **Atunci**

$$(1) \qquad \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0_+) - s^{n-2}f'(0_+) - \ldots - f^{(n-1)}(0_+).$$

DEMONSTRAȚIE. Procedăm prin inducție după n. Pentru $n = 1$ avem de arătat că $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0_+)$, ceea ce am văzut deja. Pasul de inducție rezultă observînd că

$$\mathcal{L}\{f^{(n+1)}(t)\} = \mathcal{L}\{(f^{(n)})'(t)\} = s\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} - f^{(n)}(0_+) =$$
$$= s[s^n F(s) - s^{n-1}f(0_+) - \ldots - f^{(n-1)}(0_+)] - f^{(n)}(0_+) = s^{n+1}F(s) - s^n f^{(n-1)}(0_+) - \ldots - f^{(n)}(0_+).$$

Reținem formulele:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0_+);\quad \mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0_+) - f'(0_+);$$
$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0_+) - sf'(0_+) - f''(0_+).$$

Să considerăm o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți, de forma

$$(2) \qquad x^{(n)} + c_1 x^{(n-1)} + \ldots + c_n x = b(t),$$

unde $c_1, \ldots, c_n$ sînt constante (reale sau complexe), iar $b \in \mathcal{O}$. Căutăm soluții $x \in \mathcal{O}$ ale ecuației (2), cu condițiile inițiale date

$$(3) \qquad x(0_+) = x_0,\ x'(0_+) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(0_+) = x_{n-1}.$$

Notăm $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $B(s) = \mathcal{L}\{b(t)\}$ şi aplicăm "operatorul" $\mathcal{L}$ ecuației (2):

$$\mathcal{L}\{x^{(n)}\} + c_1\mathcal{L}\{x^{(n-1)}\} + \ldots + c_{n-1}\mathcal{L}\{x'\} + c_n\mathcal{L}\{x\} = B(s).$$

Folosind (1) şi (3), rezultă:

$$s^n X(s) - s^{n-1}x_0 - s^{n-2}x_1 - \ldots - x_{n-1} + c_1[s^{n-1}X(s) - s^{n-2}x_0 - \ldots - x_{n-2}] +$$
$$+ \ldots + c_{n-1}[sX(s) - x_0] + c_n X(s) = B(s),$$

deci o relație de forma

$$(s^n + c_1 s^{n-1} + \ldots + c_{n-1}s + c_n)X(s) + Q_{n-1}(s) = B(s),$$

unde $Q_{n-1}(s)$ este un polinom de grad $n-1$. Observăm că polinomul $P_n(s) = s^n + c_1 s^{n-1} + \ldots + c_{n-1}s + c_n$ este tocmai polinomul caracteristic al ecuației (2). Aşadar, $P_n(s) \cdot X(s) + Q_{n-1}(s) = B(s)$ deci

$$(4) \qquad X(s) = \frac{B(s) - Q_{n-1}(s)}{P_n(s)}.$$

Cunoscînd $X(s)$, se pune problema recuperării lui $x(t)$. Ca o consecință a teoremei Mellin-Fourier (corolar 2 al teoremei 4.4.) vom vedea că dacă două funcții $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ din $\mathcal{O}$ au aceeaşi transformată Laplace, atunci ele coincid (eventual cu excepția unei mulțimi discrete de puncte). Aşadar, cunoscînd

$X(s)$ să indicăm o singură funcție $x(t)$ din $\mathcal{O}$ astfel încît $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$. Indicăm o listă de astfel de recuperări:

$X(s)$	$x(t)$, înmulțit cu $u(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}; a \in \mathbb{C}$
$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at};\ a \in \mathbb{C},\ n \geq 1$
$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$
$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$

Dacă $X(s)$ este o funcție rațională (de exemplu dacă în formula (4), $B(s) = \frac{C(s)}{D(s)}$ este o funcție rațională cu gr $C <$ gr D), atunci ea se descompune în fracții simple, ceea ce permite determinarea originalului corespunzător.

EXEMPLE. 1) Fie $X(s) = \frac{1}{s(s^2+4)}$. Așadar, $X(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$ și un calcul ușor arată că $A = 1/4$, $B = -1/4$, $C = 0$ deci $X(s) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right)$ și

$$x(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)u(t).$$

2) Determinăm soluția $x(t)$ din $\mathcal{O}$ a ecuației diferențiale $x'' + 2x' - 3x = u(t)$, cu condițiile inițiale $x(0_+) = 0$, $x'(0_+) = 1$.

Notînd $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, rezultă

$$s^2 X(s) - sx(0_+) - x'(0_+) + 2(sX(s) - x(0_+)) - 3X(s) = \frac{1}{s},$$

deci $(s^2 + 2s - 3)X(s) - 1 = \frac{1}{s}$, de unde $X(s) = \frac{s+1}{s(s^2+2s-3)}$. Atunci

$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+3}$ (cu A, B, C constante) și un calcul ușor arată că

$$A = -1/3,\ B = 1/2,\ C = -1/6 \text{ deci } x(t) = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-3t}\right)u(t).$$

Să considerăm acum un sistem diferențial liniar de ordinul I cu coeficienți de forma

$$(5) \qquad x'(t) = A \cdot x(t) + b(t),$$

unde A este o matrice $n \times n$ cu coeficienți reali (sau complecşi), iar $b(t)$ este o matrice coloană $n \times 1$ cu funcții din $\mathcal{O}$, $b(t) = (b_1(t) \ldots b_n(t))^T$. Presupunem că trebuie determinat vectorul-coloană $n \times 1$ necunoscut $x(t) = (x_1(t) \ldots x_n(t))^T$, satisfăcînd condiția inițială

$$6) \qquad x(0_+) = a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Notăm cu $X(s)$ transformata Laplace (pe componente) a lui $x(t)$ deci

$$X(s) = \begin{pmatrix} X_1(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{pmatrix}, \text{ unde } x_k(s) = \mathcal{L}\{x_k(t)\},\ 1 \le k \le n .$$

Atunci din ecuația (5) şi din ecuația (6), rezultă: $sX(s) - a = AX(s) + B(s)$, unde $B(s) = \mathcal{L}\{b(t)\}$. Aşadar, $(sI_n - A) \cdot X(s) = a + B(s)$. Determinantul matricei $sI_n - A$ are ca rădăcini tocmai valorile proprii ale lui A şi notînd $s_0 = \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re}\lambda$, avem $\det(sI_n - A) \neq 0$ pentru $\operatorname{Re} s > s_0$. Aşadar, pentru $\operatorname{Re} s$ suficient de mare, matricea $sI_n - A$ este inversabilă şi ca atare,

$$X(s) = (sI_n - A)^{-1}(a + B(s)),$$

de unde se recuperează vectorul necunoscut $x(t)$.

EXEMPLU. Determinăm soluția (în $\mathcal{O}$) a sistemului diferențial $x' = y + 1$, $y' = -x + 2e^t$, cu condițiile $x(0_+) = 0$, $y(0_+) = 0$. Notînd $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, rezultă $sX(s) = Y(s) + 1/s$, $sY(s) = -X(s) + 2/(s-1)$. Va rezulta

$$X(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s^2+1)} \text{ de unde } x(t) = (e^t - \cos t) \cdot u(t); \text{ în mod similar,}$$

$$Y(s) = \frac{2s^2 - s + 1}{s(s-1)(s^2+1)} \text{ şi } y(t) = (\sin t + e^t - 1) \cdot u(t).$$

OBSERVAȚIE. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ şi fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ valorile proprii ale lui A. Dacă $D \subset \mathbb{C}$ este un deschis conținând $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ şi cu frontiera γ un drum închis de clasă C^1 pe porțiuni, atunci pentru orice funcție olomorfă $f : D \to \mathbb{C}$ are loc relația

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(s)(sI_n - A)^{-1}\, ds$$

(formula Cauchy-Dunford).

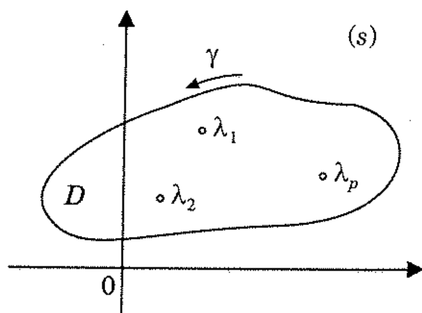


Figura VIII.8.

Într-adevăr, există o matrice nesingulară $T \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încît $T^{-1}AT = J$ (forma Jordan) deci $f(A) = Tf(J)T^{-1}$. Ținînd cont că $T(sI_n - J)^{-1}T^{-1} = (sI_n - A)^{-1}$, rezultă că este suficient să demonstrăm formula

Cauchy-Dunford pentru o matrice A sub formă Jordan. Trecînd la blocuri, este suficient să considerăm cazul cînd A este o celulă Jordan de forma

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

În acest caz, se verifică imediat că

$$(sI_n-A)^{-1}=\frac{1}{(s-\lambda)^n}\begin{pmatrix} (s-\lambda)^{n-1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ (s-\lambda)^{n-2} & (s-\lambda)^{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ (s-\lambda) & (s-\lambda)^2 & \vdots & (s-\lambda)^{n-1} & 0 \\ 1 & (s-\lambda) & \dots & (s-\lambda)^{n-2} & (s-\lambda)^{n-1} \end{pmatrix}$$

Aşadar,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(s)(sI_n-A)^{-1}\mathrm{d}s=\begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(s)\,\mathrm{d}s}{s-\lambda} & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(s)\mathrm{d}s}{(s-\lambda)^2} & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(s)\,\mathrm{d}s}{s-\lambda} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(s)\,\mathrm{d}s}{(s-\lambda)^n} & \dots & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(s)\,\mathrm{d}s}{(s-\lambda)^2} & \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(s)\,\mathrm{d}s}{s-\lambda} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ f'(\lambda) & f(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} & \dots & f'(\lambda) & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Ultima relație rezultă prin aplicarea repetată a formulei integrale Cauchy şi a formulei (*) din observația făcută după teorema VI.3.4. Pe de altă parte,

$f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(z-\lambda)^k$ (f fiind olomorfă în vecinătatea lui $z=\lambda$). Deci

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(A-\lambda I_n)^k=\sum_{k=0}^{n-1}c_k(A-\lambda I_n)^k,\ \text{deci}$$

$$f(A)=\begin{pmatrix} c_0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & c_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & \dots & c_1 & c_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ f'(\lambda) & f(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} & \dots & f'(\lambda) & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

Formula Cauchy-Dunford este astfel demonstrată.

În particular, pentru $f(z) = e^z$, rezultă formula

$$e^{At}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{st}(sI_n-A)^{-1}\,ds\ .$$

De aici rezultă că $\mathscr{L}\{e^{At}\}=(sI_n-A)^{-1}$, fapt ce se poate verifica şi direct:

$$\mathscr{L}\{e^{At}\}=\int_0^\infty e^{At}e^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^\infty e^{(A-sI_n)t}\mathrm{d}t=e^{(A-sI_n)t}\cdot(A-sI_n)^{-1}\Big|_{t=0}^{t=\infty}=(sI_n-A)^{-1}.$$

Această formulă extinde la matrici faptul că $\mathscr{L}\{e^{at}\}=(s-a)^{-1}=\dfrac{1}{s-a}$.

b) Aplicaţii la studiul unor sisteme liniare invariante în timp. Dacă E şi F sînt două spaţii vectoriale (reale), orice aplicaţie liniară $S: E \to F$ se interpretează ca un sistem intrare-ieşire (E, F, S), în care elementele lui E sînt intrări, elementele lui F sînt ieşiri şi oricărui $x \in E$ îi corespunde $y = S(x) \in F$ (se mai scrie $x \xrightarrow{S} y$); vezi figura VIII.9.

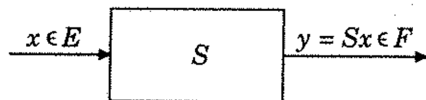


Figura VIII.9.

Proprietatea de liniaritate a lui S ($(\forall)x_1, x_2 \in E$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $S(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha S(x_1) + \beta S(x_2)$) se mai numeşte **principiul suprapunerii**.

Presupunem că E şi F sînt spaţii de semnale continuale $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sistemul (E, F, S) se numeşte **invariant în timp** (sau **staţionar**) dacă din faptul că $x(t)\xrightarrow{S} y(t)$, rezultă că pentru orice $\tau \in \mathbb{R}$, $x(t+\tau)\xrightarrow{S} y(t+\tau)$. Sistemul (E, F, S) se numeşte **cauzal** dacă din faptul că $x(t)\xrightarrow{S} y(t)$, rezultă că oricare ar fi momentul t, valoarea $y(t)$ a ieşirii depinde numai de valorile $x(\sigma)$ ale intrării cu $\sigma \le t$. Dacă oricare ar fi t, $y(t)$ depinde numai de $x(t)$, sistemul se zice **fără memorie**.

Exemple. 1) Fie $E = F = \mathscr{O}$. Atunci sistemul $S: \mathscr{O} \to \mathscr{O}$, definit prin $y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}(t-z)x(z)\,\mathrm{d}z$ este evident liniar; el este şi invariant în timp: din faptul că $S\{x(t)\} = y(t)$, rezultă că $(\forall)\ \tau \in \mathbb{R}$,

$$S(x(t+\tau))=\int_{-\infty}^{\infty}(t-v)x(v+\tau)\,\mathrm{d}v\overset{v+\tau=z}{=}\int_{-\infty}^{\infty}(t+\tau-z)x(z)\,\mathrm{d}z=y(t+\tau).$$

2) Sistemul $E = F = \mathcal{O}$, $x(t) \to y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(z)\,dz$ este liniar, cauzal şi cu memorie.

3) Să luăm E = mulțimea funcțiilor continue $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F = E$ şi $S : E \to F$, $x(t) \to y(t) = 3x(t)$. Sistemul (E, F, S) este liniar şi fără memorie.

DEFINIȚIA 2.3. Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ două funcții local integrabile. Presupunem că pentru orice $t \in \mathbb{R}$ fixat, funcția $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $z \to f(z)\cdot g(t-z)$ este integrabilă.

Atunci funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definită prin integrala improprie cu parametru

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(t-z)\,dz$$

se numeşte **convoluția lui f şi g**. Se mai notează $h = f * g$.

Dacă $f * g$ există, atunci pentru orice $t \in \mathbb{R}$, avem

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(t-z)\,dz \overset{z=t-u}{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(t-u)\,du = (g*f)(t),$$

deci operația $*$ este comutativă.

Să presupunem că $f, g \in \mathcal{O}$. Atunci $f(z) = 0$ pentru $z < 0$ şi $g(t-z) = 0$ pentru $z > t$ şi din definiția anterioară, rezultă că

$$h(t) = \int_{0}^{t} f(z)g(t-z)\,dz \quad \text{dacă } t \geq 0 \text{ şi } h(t) = 0 \text{ pentru } t < 0.$$

TEOREMA 2.4. Dacă $f, g \in \mathcal{O}$ şi $h = f * g$, atunci $h \in \mathcal{O}$ şi $\mathcal{L}\{f*g\} = \mathcal{L}\{f\}\cdot\mathcal{L}\{g\}$. (adică transformata Laplace a produsului de convoluție este produsul uzual al transformatelor Laplace).

DEMONSTRAȚIE. Faptul că $h(t) = 0$ pentru $t < 0$ a fost probat anterior.

Deoarece f şi g sînt continue pe porțiuni, rezultă că h va fi continuă pe porțiuni (aplicînd teorema de continuitate a integralelor depinzînd de parametri). Rămîne să verificăm condiția de creştere exponențială. Deoarece $f, g \in \mathcal{O}$, există constante pozitive M_1, M_2, s_1, s_2 astfel încît orice $t \geq 0$ să avem:

$$|f(t)| \leq M_1 e^{s_1 t}, \quad |g(t)| \leq M_2 e^{s_2 t}.$$

Luînd $S = \max(s_1, s_2)$, rezultă $|f(t)| \leq M_1 e^{St}$ şi $|g(t)| \leq M_2 e^{St}$. Atunci pentru orice $t \geq 0$ avem

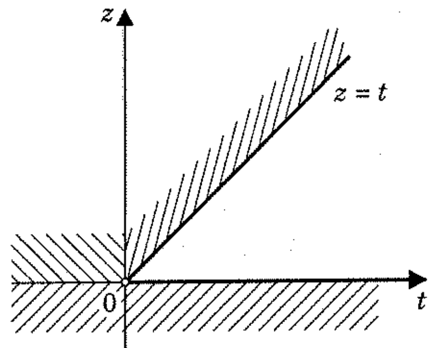


Figura VIII.10.

$$|h(t)| \leq \int_0^t |f(z)|\cdot|g(t-z)|\,dz \leq M_1M_2\int_0^t e^{Sz}e^{S(t-z)}\,dz = M_1M_2\int_0^t e^{St}\,dz = M_1M_2te^{St}.$$

Dar $t \leq e^t$ pentru $t \geq 0$, deci $|h(t)| \leq M_1M_2e^{(S+1)t}$ pentru orice $t \geq 0$. Am demonstrat astfel că $h \in \mathcal{O}$

Să considerăm acum integrala dublă improprie convergentă

$$I = \iint_D e^{-st} f(z) g(t-z) \mathrm{d}t \mathrm{d}z,$$

unde D este domeniul din planul tOz indicat (nehaşurat) în figura VIII.10.

Calculăm I scriind-o ca succesiune de integrale simple (condițiile necesare pentru aceasta sînt îndeplinite). Pe de o parte,

$$I = \int_0^\infty e^{-st} \mathrm{d}t \int_0^t f(z) g(t-z)\, \mathrm{d}z = \int_0^\infty e^{-st} h(t)\, \mathrm{d}t = \mathscr{L}\{h(t)\} = \mathscr{L}\{f * g\}.$$

Pe de altă parte,

$$I = \int_0^\infty f(z)\, \mathrm{d}z \int_z^\infty e^{-st} g(t-z)\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty f(z) G(s) e^{-sz} \mathrm{d}z = G(s) \int_0^\infty f(z) e^{-sz} \mathrm{d}z = G(s) F(s).$$

(Am notat $G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\}$, $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ şi am utilizat teorema întîrzierii atunci cînd am folosit relația $\int_z^\infty e^{-st} g(t-z) \mathrm{d}t = G(s) e^{-sz}$).

OBSERVAȚIE. Se demonstrază fără dificultate că produsul de convoluție al funcțiilor din $\mathscr{O}$ este comutativ, asociativ şi distributiv în raport cu adunarea.

Un defect cronic îl constituie faptul că în clasa $\mathscr{O}$ nu există element unitate (abia în clasa distribuțiilor vom vedea că δ este element unitate, în sensul că, pentru orice f, $f * \delta = f$).

EXEMPLE. 1) Pentru orice $f \in \mathscr{O}$, convoluția $f * u$ a lui f cu treapta unitate este $(f * u)(t) = \int_0^t f(z) u(t-z)\, \mathrm{d}z = \int_0^t f(z)\, \mathrm{d}z$. Aşadar, convoluția lui f cu treapta unitate revine la a lua primitiva lui f care se anulează pentru $t = 0$. Notînd $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$, rezultă $F(s) \cdot U(s) = \mathscr{L}\left\{\int_0^t f(z)\, \mathrm{d}z\right\}$ deci $\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(z)\, \mathrm{d}z\right\} = \frac{F(s)}{s}$.

2) Avem

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \mathscr{L}\{u(t) * \sin t\} = \mathscr{L}\left\{\int_0^t \sin z\, \mathrm{d}z\right\} = \mathscr{L}\{(1-\cos t) u(t)\}.$$

3) În electrotehnică este utilizată următoarea **formulă a lui Duhamel**: dacă $f, g \in \mathscr{O}$ şi g este derivabilă cu $g' \in \mathscr{O}$, atunci

$$sF(s) G(s) = \mathscr{L}\{f(t) g(0) + \int_0^t f(z) g'(t-z)\, \mathrm{d}z\}.$$

Demonstrația este imediată: punînd $h = f * g$, din relația $h(t) = \int_0^t f(z) g(t-z)\, \mathrm{d}z$ rezultă $h'(t) = f(t) g(0) + \int_0^t f(z) g'(t-z)\, \mathrm{d}z$;deoarece $h(0_+) = 0$, rezultă $\mathscr{L}\{h'(t)\} = s\mathscr{L}\{h(t)\} - h(0_+) = sF(s) \cdot G(s)$; pe de altă parte, $\mathscr{L}\{h'(t)\} = \mathscr{L}\{f(t) g(0) + \int_0^t f(z) g'(t-z)\, \mathrm{d}z\}$ deci tocmai formula lui Duhamel.

DEFINIȚIA 2.4. Un sistem liniar (E, F, S) în care $E = F = \mathscr{O}$ se numește **sistem convolutiv** dacă există $h \in \mathscr{O}$ astfel încît pentru orice întrare $x \in \mathscr{O}$, ieșirea corespunzătoare să fie $y = h * x$, adică $S(x) = h * x$. Funcția h se mai numește **funcția pondere** a sistemului.

DEFINIȚIA 2.5. Se spune că un sistem liniar $S : \mathscr{O} \to \mathscr{O}$ **admite funcție de transfer** dacă pentru orice intrare x, raportul

$$\Phi(s) = \frac{\mathscr{L}\{y(t)\}}{\mathscr{L}\{x(t)\}} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

este independent de x (acest raport este numit **funcția de transfer** a sistemului).

Așadar, funcția de transfer este raportul dintre transformata Laplace a ieșirii și transformata Laplace a intrării. Se mai scrie $\xrightarrow{x(t)} \boxed{\Phi(s)} \xrightarrow{y(t)}$, în loc de $Y(s) = \Phi(s) \cdot X(s)$. Conform teoremei 2.2, orice funcție de transfer este un cît de funcții olomorfe. În multe aplicații funcțiile de transfer sînt funcții raționale, așa cum vom vedea în exemplele care urmează.

EXEMPLE. 1) **Amplificatorul** de coeficient k este sistemul $S: \mathscr{O} \to \mathscr{O}$, $x(t) \to y(t) = kx(t)$. În acest caz, $\Phi(s) = k$.

2) **Derivatorul** este sistemul $D: \mathscr{O}_1 \to \mathscr{O}$, $x(t) \to x'(t)$ definit pe clasa $\mathscr{O}_1$ a semnalelor $x(t)$ din $\mathscr{O}_1$, derivabile cu $x(0_+) = 0$. În acest caz, funcția de transfer este $\Phi(s) = \dfrac{\mathscr{L}\{x'(t)\}}{\mathscr{L}\{x(t)\}} = \dfrac{sX(s) - x(0_+)}{X(s)} = s$.

3) **Integratorul** este sistemul $I : \mathscr{O} \to \mathscr{O}$,

$$x(t) \to \int_0^t x(z)\,\mathrm{d}z = (x*u)(t) \text{ deci } \Phi(s) = \frac{\mathscr{L}\{x*u\}}{\mathscr{L}\{x\}} = \frac{\mathscr{L}\{x\} \cdot \mathscr{L}\{u\}}{\mathscr{L}\{x\}} = \mathscr{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}.$$

4) Pentru un sistem convolutiv $S: \mathscr{O} \to \mathscr{O}$, $x \to y = h * x$, funcția de transfer este $\Phi(s) = \dfrac{\mathscr{L}\{h*x\}}{\mathscr{L}\{x\}} = \dfrac{\mathscr{L}\{h\} \cdot \mathscr{L}\{x\}}{\mathscr{L}\{x\}} = \mathscr{L}\{h\}$, deci este tocmai transformata Laplace a funcției-pondere.

5) Să considerăm un circuit RLC alimentat de la o sursă de tensiune $v(t)$.

Notînd cu $i(t)$ intensitatea curentului la momentul t și presupunînd $i(0_+) = 0$, avem

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(z)\,\mathrm{d}z + Li'(t) = v(t), \text{ pentru orice } t \geq 0.$$

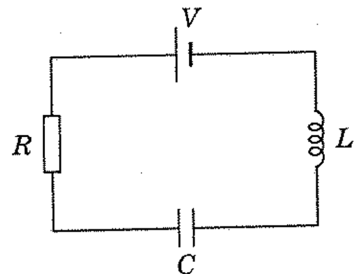


Figura VIII.11.

Aplicînd transformata Laplace, rezultă

$$RI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) + LsI(s) = V(s)$$

$$\text{deci } \frac{V(s)}{I(s)} = R + \frac{1}{Cs} + Ls.$$

Considerînd circuitul ca un sistem $S: \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, $v(t) \to i(t)$, rezultă că funcţia lui de transfer este

$$\Phi(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{Cs}{LCs^2 + Rc_s + 1}$$

OBSERVAŢII. 1) Legarea **în serie** a k sisteme este redată sugestiv în figura VIII.12 a) şi revine la a considera sistemul $\xrightarrow{x}\boxed{\Phi}\xrightarrow{y}$ unde

$$\Phi = \Phi_1 \cdot \Phi_2 \dots \Phi_k.$$

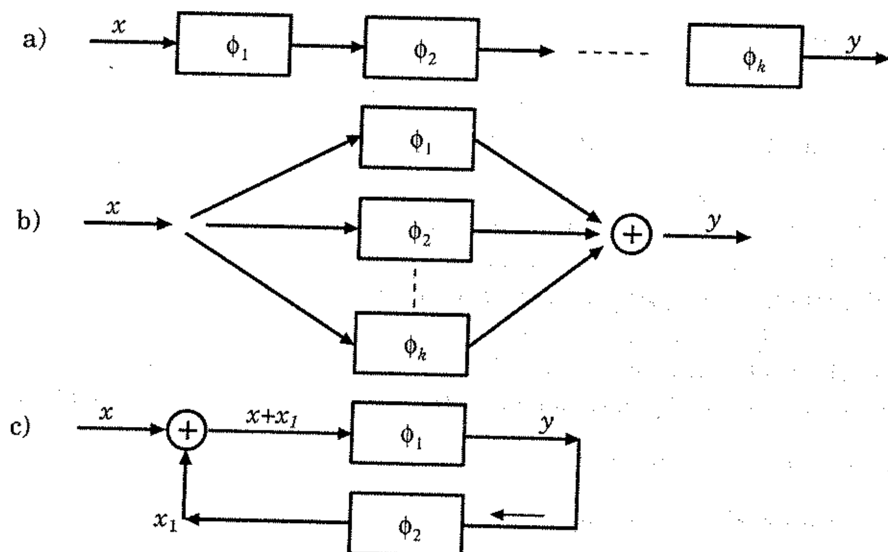


Figura VIII.12.

Legarea **în paralel** (figura VIII.12 b)) revine la $\xrightarrow{x}\boxed{\Phi}\xrightarrow{y}$ unde

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_k.$$

Să considerăm un sistem $\xrightarrow{x}\boxed{\Phi_1}\xrightarrow{y}$ şi să presupunem că la fiecare moment t, ieşirea $y(t)$ revine la intrare după ce trece printr-un sistem cu funcţia de transfer Φ_2 (figura VIII.12 c)). Se spune atunci că avem un sistem **cu legătură inversă** (sau un sistem **cu "feed-back"**)

Aşadar, în domeniul complex au loc relaţiile: $Y = \Phi_1(X + X_1)$ şi $X_1 = \Phi_2 Y$ deci, $Y = \Phi_1(X + \Phi_2 Y)$, de unde $Y(1 - \Phi_1\Phi_2) = \Phi_1 X$. Deci funcţia de transfer a sistemului cu legătură inversă va fi

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\Phi_1(s)}{1 - \Phi_1(s)\Phi_2(s)}.$$

2) În cele arătate mai sus am considerat doar sisteme cu o intrare şi o ieşire. Un deosebit interes aplicativ şi teoretic îl au sistemele multivariabile (cu mai multe intrări sau ieşiri), studiate în lucrările de specialitate. Să presupunem că avem un sistem dinamic liniar descris matriceal prin $x'(t) = Ax + Bv$

avem $A \in M_n(\mathbb{C})$, $B \in M_{n,m}(\mathbb{C})$, $x = (x_1 ... x_n)^T$, $v = (v_1 ... v_m)^T$. Acesta poate fi considerat ca un sistem cu m intrări (parametrii de comandă $v_1, ..., v_m$) şi n ieşiri (parametrii de stare $x_1, ..., x_n$), care sînt funcții de t. În domeniul complex, presupunînd că $x(0_+) = 0$ (vectorul nul din $\mathbb{R}^n$) şi notînd
$X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\} = (\mathscr{L}\{x_1(t)\}, ..., \mathscr{L}\{x_n(t)\})^T$ şi $V(s) = (\mathscr{L}\{v_1(t)\}, ..., \mathscr{L}\{v_m(t)\})^T$, se obține relația matriceală $sX(s) = AX(s) + BV(s)$ adică $(sI_n - A)^{-1} \cdot X(s) = BV(s)$. Pentru Re$s$ suficient de mare, matricea $sI_n - A$ este inversabilă deci
$X(s) = (sI_n - A)^{-1} \cdot B \cdot V(s)$. Matricea $\Phi(s) = (sI_n - A)^{-1} \cdot B$ are n linii şi m coloane şi se numeşte **matricea de transfer** a sistemului considerat. Reținem că $X(s) = \Phi(s) \cdot V(s)$. Dacă se cunoaşte matricea de transfer $\Phi(s)$, atunci se ştie (teoretic şi apoi practic, procedural) dinamica sistemului, deoarece pentru orice comandă $v(t)$ se va cunoaşte transformata Laplace $V(s)$ deci se află $X(s)$, de unde se recuperează starea $x(t)$ a sistemului la fiecare moment. Aceste considerații sînt dezvoltate în teoria sistemelor, cu multiple aplicații.

Clasa $\mathscr{O}$ de semnale (de intrare sau ieşire) este prea restrictivă, în sensul că nu acoperă toate situațiile care apar în practică. O problemă matematică majoră a constituit-o extinderea conceptelor anterioare la clase mai largi de funcții (impulsuri, funcții din L^1 sau L^2 etc.). Încoronarea eforturilor în acest sens o reprezintă elaborarea teoriei distribuțiilor, din care vom prezenta cîteva noțiuni şi rezultate, în cele ce urmează.

§ 3. Elemente de teoria distribuțiilor

3.1 Funcții de testare şi distribuții

DEFINIȚIA 3.1. Se numeşte **funcție de testare** orice funcție $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indefinit derivabilă şi nulă în afara unui interval compact (care depinde de φ).

Vom nota cu $\mathscr{D}$ mulțimea funcțiilor de testare. Evident, $\mathscr{D}$ este un spațiu vectorial real.

EXEMPLE. Funcția $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & x \in (-1,1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

aparține lui $\mathscr{D}$. Iată şi un şir de funcții de testare:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} c_n e^{\frac{1}{n^2x^2-1}}, & x \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad n \geq 1,$$

unde c_n sînt constante care pot fi alese astfel încît $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\,dx = 1$ pentru orice $n \geq 1$ (figura VIII.13).

Aşadar,

$$1 = c_n \int_{-1/n}^{1/n} e^{\frac{1}{n^2x^2-1}}\, dx.$$

Deoarece pentru orice $x \in (-1/n, 1/n)$ avem $e^{\frac{1}{n^2x^2-1}} \le \frac{1}{e}$, rezultă

$$1 \le c_n \int_{-1/n}^{1/n} \frac{1}{e}\, dx = \frac{2c_n}{ne} \quad \text{deci } c_n \ge ne/2 \text{ şi } \lim_{n\to\infty} c_n = \infty.$$

Funcţia treaptă unitate nu aparţine lui $\mathscr{D}$ şi la fel sin, cos, exp.

DEFINIŢIA 3.2. Se spune că un şir $\{\varphi_n\}_{n\ge 1}$ de funcţii de testare **converge către zero** (şi se scrie $\varphi_n \xrightarrow{\text{în } \mathscr{D}} 0$) dacă există un interval compact I în afara căruia toate funcţiile φ_n se anulează (adică $\varphi_n(x) = 0$, $(\forall)\, n \ge 1$ şi $(\forall)\, x \notin I$) şi în plus şirul φ_n converge uniform către zero pe I împreună cu derivatele de orice ordin (adică $(\forall)\, k \ge 0$, $\sup_{x\in I}|\varphi_n^{(k)}(x)| \to 0$ pentru $n \to \infty$).

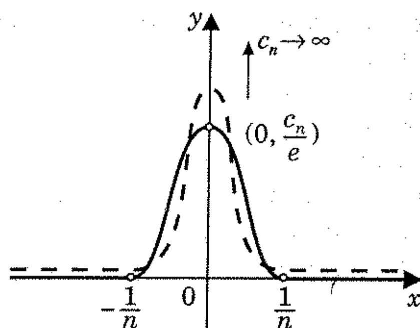


Figura VIII.13.

Se numeşte **distribuţie** orice aplicaţie $\mathbb{R}$-liniară $f:\mathscr{D} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că dacă $\varphi_n \xrightarrow{\text{în } \mathscr{D}} 0$, atunci $\lim_{n\to\infty} f(\varphi_n) = 0$. Două distribuţii f, g se zic **egale** dacă $(\forall)\, \phi \in \mathscr{D}$, $f(\phi) = g(\phi)$.

Mulţimea tuturor distribuţiilor se notează cu $\mathscr{D}'$ (notaţia fiind sugerată de faptul că distribuţiile sînt de fapt funcţionale pe spaţiul $\mathscr{D}$).

Să remarcăm că putem presupune de la început că funcţiile de testare au valori complexe, distribuţiile fiind atunci aplicaţii $\mathscr{D} \to \mathbb{C}$ care sînt $\mathbb{C}$–liniare şi continue prin şiruri. În cele mai multe aplicaţii este suficient cazul funcţiilor (sau funcţionalelor) cu valori reale.

Dacă $f, g \in \mathscr{D}'$ atunci se poate considera **suma** $h = f + g$ ca fiind distribuţia $h:\mathscr{D} \to \mathbb{R}$ definită prin $h(\phi) = f(\phi) + g(\phi)$, $(\forall)\phi \in \mathscr{D}$ şi **produsul** λf (λ constantă reală), definit prin $(\lambda f)(\phi) = \lambda \cdot f(\phi)$, $(\forall)\, \phi \in \mathscr{D}$. Mulţimea $\mathscr{D}'$ are structură naturală de spaţiu vectorial.

Distribuţiile în sensul definiţiei anterioare se mai numesc 1–**dimensionale** (sau distribuţii pe $\mathbb{R}$). Dacă $U \subset \mathbb{R}^p$ $(p \ge 1)$ este un deschis şi dacă se notează cu $\mathscr{D}_U$ spaţiul vectorial real al funcţiilor $\phi: U \to \mathbb{R}$ nule în afara unui compact conţinut în U, atunci se definesc mai general distribuţiile p–**dimensionale** pe U ca aplicaţii $f: \mathscr{D}_U \to \mathbb{R}$, presupune $\mathbb{R}$–liniare (deci funcţionale liniare pe $\mathscr{D}_U$) şi avînd proprietatea că dacă $\varphi_n \xrightarrow{\text{în } \mathscr{D}_U} 0$, atunci

$f(\varphi_n) \xrightarrow{\text{în } \mathbb{R}} 0$ [faptul că $\varphi_n \xrightarrow{\text{în } \mathscr{D}_U} 0$ înseamnă că toate funcțiile φ_n sînt nule în afara unui compact $K \subset U$ și în plus, pentru orice multi-indice

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_p) \text{ cu } \alpha_i \in \mathbb{N}, \text{ avem } \frac{\partial^{\alpha_1+...+\alpha_p}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_p^{\alpha_p}}(\varphi_n) \to 0 \text{ uniform pe } K].$$

În cele ce urmează vom considera numai distribuții pe $\mathbb{R}$.

Observații. Trebuie reținut că a defini o distribuție f revine la a indica valoarea $f(\phi)$ pentru orice funcție de testare ϕ, cu satisfacerea condițiilor de liniaritate și continuitate prin șiruri. În același mod în care o funcție reală $u : A \to \mathbb{R}$ este "testată" pe elementele luate din domeniul de definiție A (în sensul că $u(x)$ are sens pentru orice $x \in A$), o distribuție $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ este testată pe funcții din $\mathscr{D}$, fără să aibă sens $f(x)$ cu x real. Este astfel motivată terminologia folosită în definiția 3.1.

Teoria distribuțiilor a fost fondată de matematicianul francez L. Schwartz (n. 1915) și de matematicienii ruși S. L. Sobolev (n. 1908), I. M. Ghelfand (n. 1913) și G. E. Șilov (1917-1976).

3.2. Exemple de distribuții

1) Prezentăm primul istoricește și cel mai important exemplu de distribuție. Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat. **Distribuția lui Dirac în punctul** a (P. Dirac, 1902-1984) este funcționala $\delta_a : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$, $\varphi \to \varphi(a)$

Deci $(\forall)\ \varphi \in \mathscr{D}$, $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$. Dacă $a = 0$ se scrie simplu δ în loc de δ_0. Vom vedea că există puternice rațiuni pentru care δ_a este uneori denumit **impulsul unitar aplicat în punctul** a (sau la momentul a). Faptul că δ_a este întradevăr o distribuție se verifică în modul următor. Mai întîi, aplicația δ_a este $\mathbb{R}$–liniară, deoarece $(\forall)\ \varphi, \psi \in \mathscr{D}$ și $(\forall)\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\delta_a(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)\big|_{x=a} = \lambda\varphi(a) + \mu\psi(a) = \lambda\delta_a(\varphi) + \mu\delta_a(\psi).$$

Apoi dacă $\varphi_n \xrightarrow{\text{în } \mathscr{D}} 0$, atunci există un interval mărginit $I \subset \mathbb{R}$ astfel încît toate φ_n se anulează în afara lui I, φ_n converg uniform (împreună cu toate derivatele) către zero pentru $n \to \infty$. Dacă $a \in I$, rezultă atunci că $\varphi_n(a) \to 0$ adică $\delta_a(\varphi_n) \to 0$; iar dacă $a \notin I$, atunci $\varphi_n(a) = 0$ și din nou $\delta_a(\varphi_n) \to 0$. Sînt verificate condițiile din definiția 3.2. deci δ_a este o distribuție pe $\mathbb{R}$.

2) O altă distribuție mult utilizată este **distribuția lui O. Heaviside** (1850-1925)

(1) $\quad H : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$, $\varphi \to \int_0^\infty \varphi(x)\,dx$. Este evident că H este $\mathbb{R}$–liniară și dacă $\varphi_n \xrightarrow{\text{în } \mathscr{D}} 0$ atunci șirul $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ converge uniform către zero pe un interval compact I în afara căruia funcțiile φ_n se anulează deci

$$\lim_{n\to\infty} H(\varphi_n) = \lim_{n\to\infty} \int_I \varphi_n(x)\,dx = \int_I \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\,dx = \int_I 0\,dx = 0.$$

Așadar, H este într-adevăr o distribuție.

3) Un exemplu ceva mai complicat de distribuție îl constituie distribuția $f = VP\frac{1}{t}$ (numită **valoarea principală** a lui $\frac{1}{t}$), definită prin

$$f(\varphi) = v.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t}\varphi(t)\,dt = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\Big(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(t)}{t}dt + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t}dt\Big).$$

pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}$. Deoarece φ este nulă în afara unui interval $[-R, R]$, iar

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\Big[\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(0)}{t}dt + \int_{\varepsilon}^{R}\frac{\varphi(0)}{t}dt\Big] = 0$$

rezultă că

$$(2)\qquad f(\varphi) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\Big(\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}dt + \int_{\varepsilon}^{R}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}dt\Big).$$

În general dacă $u\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^k, $k \geq 1$, funcția

$$v(x) = \begin{cases}\dfrac{u(x)-u(0)}{x} & \text{dacă } x \neq 0\\ u'(0) & \text{dacă } x = 0\end{cases}$$

este de clasă C^{k-1} [de fapt, $v(x) = \frac{1}{x}\int_0^x u'(t)\,dt \overset{t=x\tau}{=} \int_0^1 u'(x\tau)\,d\tau$. În plus, pentru orice $R > 0$ și pentru orice $x \in [-R, R]$, avem $|v(x)| \leq \sup_{x\in[-R,R]}|u'(x)|$. Folosind această observație, deoarece $\varphi \in \mathscr{D}$, rezultă că funcția

$$\psi(t) = \begin{cases}\dfrac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}, & t \neq 0\\ \varphi'(0), & t = 0\end{cases}$$

este continuă și satisface condiția $|\psi(t)| \leq M$ pentru orice $t \in [-R, R]$, unde $M = \sup_{t\in[-R,R]}|\varphi'(t)|$. Atunci $\left|\int_{-R}^{-\varepsilon}\psi(t)\,dt + \int_{\varepsilon}^{R}\psi(t)\,dt\right| \leq 2RM$ și limita (2) există și definește un număr real $f(\varphi)$ bine determinat. Asocierea $\varphi \to f(\varphi) = v.p.\int_{-R}^{R}\psi(t)\,dt$ dată de (2) este evident liniară. În plus, dacă $\varphi_n \xrightarrow{\text{în } \mathscr{D}} 0$, atunci toate φ_n sînt nule în afara unui interval $[-R, R]$ și avem $|f(\varphi_n)| \leq 2RM_n$ unde $M_n = \sup_{t\in[-R,R]}|\varphi_n'(t)|$. Dar $\varphi_n' \to 0$ uniform pe $[-R, R]$ deci $M_n \to 0$ și ca atare, $\lim_{n\to\infty} f(\varphi_n) = 0$. Am verificat astfel în detaliu că funcționala $f = VP\frac{1}{t}$ este o distribuție.

4) Indicăm acum un procedeu de fabricare de distribuții. Fie $u : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție local integrabilă (deci mărginită și integrabilă pe orice interval compact). Mulțimea acestor funcții se notează cu L^1_{loc}. Pentru orice funcție de testare $\varphi \in \mathscr{D}$ se pune

$$\underline{u}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi(x)\,dx.$$

Deoarece φ este continuă și se anulează în afara unui interval compact J, integrala se calculează de fapt pe J. Se obține în acest mod o aplicație $\mathbb{R}$-liniară $\underline{u}: \mathscr{D} \to \mathbb{R}$, $\varphi \to \underline{u}(\varphi)$ asociată funcției $\underline{u}$. Este evident că $\underline{u}$ este chiar o distribuție, deoarece dacă $\varphi_n \xrightarrow{\text{în } \mathscr{D}} 0$, atunci $\varphi_n = 0$ în afara unui interval compact I și $\varphi_n \to 0$ UC pe I deci

$$\lim_{n\to\infty} \underline{u}(\varphi_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_I u(x)\varphi_n(x)\,dx =$$
$$= \int_I u(x) \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\,dx = \int_I u(x)\cdot 0\,dx = 0$$

Distribuția $\underline{u}$ este numită **regulată** (asociată funcției local integrabile u) sau **distribuția-funcție** u.

Funcția sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este local integrabilă deci se poate defini **distribuția-sinus** $\underline{\sin}$ prin

$$\underline{\sin}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\sin x\,dx, \quad (\forall)\varphi \in \mathscr{D}$$

În mod similar se definesc $\underline{\cos}$, $\underline{\exp}$ și pentru orice $k \in \mathbb{R}$, se definește **distribuția constantă** $\underline{k} \in \mathscr{D}'$ prin

$$\underline{k}(\varphi) = k\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx, \quad (\forall)\varphi \in \mathscr{D}.$$

Distribuțiile care nu sînt regulate se numesc **singulare**.

Pentru $u = 0$ (funcția nulă) se obține distribuția nulă $\underline{0}$, definită prin $\underline{0}(\phi) = 0$, $(\forall)$ $\phi \in \mathscr{D}$. Dacă u este treapta unitate, atunci $\underline{u} = H$ este tocmai distribuția lui Heaviside (conform (1)).

TEOREMA 3.1. Dacă $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **este o funcție local integrabilă și dacă** $\underline{u} = \underline{0}$, **atunci** $u = 0$ **a.p.**

DEMONSTRAȚIE. Conform ipotezei, avem $\underline{u}(\varphi) = \underline{0} = 0$ pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}$, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi(x)\,dx = 0, \quad (\forall)\,\varphi \in \mathscr{D}.$$

Să fixăm un punct oarecare $a \in \mathbb{R}$ și să alegem o funcție de testare $\psi \geq 0$ ca în figura VIII.14.

Pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, considerăm funcția $\psi_k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi_k(x) = \psi(x)e^{-ik\pi x}$.

Deoarece $\psi_k \in \mathscr{D}$, rezultă că

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\psi(x)e^{-ik\pi x}dx = 0.$$

Așadar, coeficienții Fourier ai funcției $u\cdot\psi$, restrînsă la intervalul

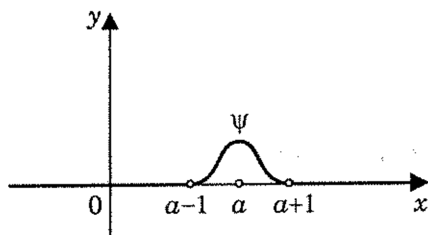


Figura VIII.14.

$(a-1,\ a+1)$ şi prelungită prin periodicitate la întreg $\mathbb{R}$, sînt nuli. Conform teoremei lui Dirichlet din teoria seriilor Fourier, rezultă că $u \cdot \psi = 0$ a.p. pe $\mathbb{R}$ deci $u = 0$ a.p. în intervalul $(a-1,\ a+1)$. Deoarece a este arbitrar, rezultă că $u = 0$ a.p.

Vom face convenția de a identifica două funcții care sînt egale a.p. Atunci teorema 3.1. afirmă că $\underline{u} = 0 \Rightarrow u = 0$.

COROLAR. Aplicația $\rho : L^1_{loc} \to \mathscr{D}'$, $u \to \underline{u}$ este injectivă.

Într-adevăr, dacă $\rho(v_1) = \rho(v_2)$, atunci $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$. Notînd $u = v_1 - v_2$, rezultă că $u \in L^1_{loc}$ şi $\underline{u} = 0$ deci $u = 0$, adică $v_1 = v_2$.

OBSERVAȚIE IMPORTANTĂ. În general, dacă $\rho : A \to B$ este o aplicație injectivă, atunci avem o corespondență biunivocă dată prin aplicația bijectivă $A \to \rho(A)$, $x \to \rho(x)$, care permite identificarea mulțimii A cu submulțimea $\rho(A)$ a lui B. Aplicînd acest fapt, constatăm că funcțiile local integrabile pot fi identificate, printr-un izomorfism liniar, cu distribuțiile regulate asociate. Aşadar, funcțiile local integrabile (deci practic toate funcțiile reale uzuale) sînt un caz particular de distribuții. Aceasta justifică de ce distribuțiile mai sînt numite **funcții generalizate**.Teorema următoare arată că nu toate distribuțiile sînt de tip funcție.

TEOREMA 3.2. Distribuția δ a lui Dirac este singulară.

DEMONSTRAȚIE. Presupunem prin reducere la absurd că δ ar fi o distribuție regulată, asociată unei funcții $u \in L^1_{loc}$. Atunci ar rezulta că $\delta = \underline{u}$ deci $\delta(\varphi) = \underline{u}(\varphi)$ adică

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi(x)\,dx,\ \ (\forall)\ \varphi \in \mathscr{D}.$$

Să luăm $\varphi = \varphi_n$ (şirul de funcții de testare considerat, în exemplul posterior definiției 3.1.). Rezultă $\varphi_n(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi_n(x)\,dx$ adică $\frac{c_n}{e} = \int_{-1}^{1} u(x)\varphi_n(x)\,dx$, pentru orice $n \geq 1$.

Funcția u fiind mărginită pe $[-1, 1]$, fie $M = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |u(x)|$, deci

$$\frac{c_n}{e} \leq M \int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx = M.$$

Ar rezulta $c_n \leq M \cdot e$, ceea ce este absurd, deoarece am văzut că $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$.

OBSERVAȚIE. Dacă $u \in L^1_{loc}$, am notat integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi(x)\,dx,\quad \varphi \in \mathscr{D}$$

cu $\underline{u}(\phi)$. Extinzînd această notație, pentru orice distribuție $f \in \mathscr{D}'$, inclusiv pentru cele singulare, se scrie $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$ în loc de $f(\varphi)$. În particular, pentru orice $a \in \mathbb{R}$ şi pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}$, avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x)\varphi(x)\,dx = \delta_a(\varphi),$$

obținîndu-se ceea ce se numeşte forțat "**formula de filtrare**".

Uneori o distribuție f este notată $f(t)$, indicînd variabila independentă pentru funcțiile de testare cărora f li se aplică. Această notație este utilă în cazul efectuării unor schimbări de variabilă. Dacă $f(t)$ este o distribuție şi dacă se notează $u = at + b$ cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, atunci prin definiție distribuția $g = f(at + b)$ este dată prin

$$g(\varphi) = \frac{1}{|a|} f\left(\varphi\left(\frac{u-b}{a}\right)\right), \ (\forall)\varphi \in \mathscr{D}.$$

Această definiție este sugerată de faptul că dacă f este regulată asociată unei funcții $f \in L^1_{loc}$, atunci

$$\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\varphi(\frac{u-b}{a})\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f(at+b)\varphi(t)\,dt.$$

În particular, dacă $b = 0$ şi $f = \delta$, atunci $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta$; iar dacă $a = 1$, $b = -t_0$, atunci distibuția $f(t - t_0)$ "lucrează" astfel: $f(t - t_0)\,(\varphi(t)) = f(\varphi(t + t_0))$. În particular, rezultă $\delta(t - t_0) = \delta_{t_0}$ şi formula de filtrare se mai scrie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\varphi(t)\,dt = \varphi(t_0), \text{ pentru orice } \varphi \in \mathscr{D}.$$

3.3 Operații cu distribuții.

Pentru orice distribuții $f, g \in \mathscr{D}'$ ştim ce înseamnă $f = g, f + g, \lambda f\ (\lambda \in \mathbb{R})$.

Introducem şi alte operații la care sînt supuse distribuțiile.

1) **Produsul unei funcții C^∞ cu o distribuție.**

Dacă $f \in \mathscr{D}'$ şi $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^∞ (indefinit derivabilă), atunci se defineşte produsul $\alpha{\cdot}f$ ca fiind distribuția definită prin

$$(\alpha{\cdot}f)(\varphi) = f(a{\cdot}\varphi), (\forall)\ \varphi \in \mathscr{D}$$

De exemplu, x^2H este distribuția definită prin

$$(x^2 \cdot H)(\varphi) = H(x^2\varphi) = \int_0^{\infty} x^2\varphi(x)\,dx, \ (\forall)\ \varphi \in \mathscr{D}.$$

Apoi $\alpha{\cdot}\delta = \alpha(0){\cdot}\delta$ deoarece $(\alpha\delta)(\phi) = \delta(\alpha\phi) = \alpha(x){\cdot}\phi(x)\big|_{x=0} = \alpha(0){\cdot}\phi(0) = \alpha(0){\cdot}\delta(\phi)$. În particular, $x^n{\cdot}\delta = 0$ pentru orice $n \geq 1$.

2) **Şiruri convergente de distribuții.**

Dacă $\{f_n\}_{n\geq 1}$ este un şir de distribuții şi dacă $f \in \mathscr{D}'$, atunci prin definiție se spune că şirul f_n **converge în** $\mathscr{D}'$ **către** f ($f_n \xrightarrow{\text{în } \mathscr{D}'} f$) dacă $(\forall)\ \varphi \in \mathscr{D}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\varphi) = f(\varphi)$.

EXEMPLU. Fie $u_n(x) = \sin nx$, $n \geq 1$. Arătăm că $u_n \xrightarrow{\text{în } \mathscr{D}'} 0$ [Într-adevăr, pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}$, φ rezultă continuă şi nulă în afara unui interval

I; conform lemei lui Riemann avem $\lim_{n\to\infty}\int_I \varphi(x)\sin nx\,dx = 0$, deci $\lim_{n\to\infty}\underline{u}_n(\varphi)=0$ adică $\underline{u}_n \xrightarrow{\text{în } \mathscr{D}'} 0$].

Aplicații fizice. a) Pentru orice punct fixat $a \in \mathbb{R}$, numim **impuls unitar de durată** L, $L>0$, **aplicat în punctul** a, funcția $h_L: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin

$$h_L(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{L} & \text{dacă } t\in[a,a+L]\\ 0 & \text{în rest}\end{cases}$$

(figura VIII.15.)

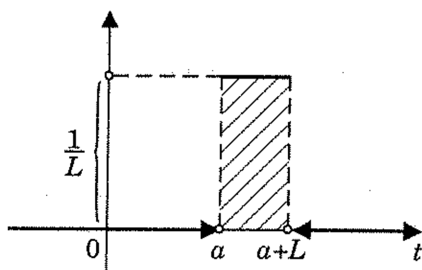


Figura VIII.15.

Evident, aria hașurată este egală cu 1, ceea ce justifică termenul de "unitar", după cum "durata" semnalului este $L = a + L - a$. Ideea de impuls localizat în punctul a s-ar obține pentru L tinzînd către zero. Prin trecere la limită se ajunge la considerarea unei funcții $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încît

$$h(t)=\begin{cases}\infty & \text{dacă} & t=a\\ 0 & \text{dacă} & t\neq a\end{cases} \quad \text{și} \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt = 1.$$

Dar așa ceva nu există (pentru că $h = 0$ a.p. și integrala este de fapt nulă).

Totuși, se poate obține un obiect matematic care modelează ideea de impuls unitar aplicat instantaneu (de durată nulă) la momentul $t = a$, cu condiția să ne situăm în cadrul distribuțional. Anume, să considerăm șirul de funcții local integrabile

$$h_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h_n(t)=\begin{cases}n & \text{dacă} & t\in\left[a,a+\dfrac{1}{n}\right]\\ 0 & \text{în rest}\end{cases}$$

(impuls de durată $1/n$ aplicat în punctul a).

Putem identifica h_n cu distribuția asociată $\underline{h}_n$ și arătăm că $\lim_{n\to\infty}\underline{h}_n=\delta_a$.

Pentru aceasta, avem de dovedit că $(\forall)\ \varphi\in\mathscr{D}$, $\lim_{n\to\infty}\underline{h}_n(\varphi)=\delta_a(\varphi)$, deci $\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h_n(t)\varphi(t)\,dt=\varphi(a)$, adică $\lim_{n\to\infty}\int_a^{a+\frac{1}{n}} n\varphi(t)\,dt=\varphi(a)$. Conform teoremei de medie există $\xi_n\in(a,a+1/n)$ astfel încît

$$\int_a^{a+\frac{1}{n}}\varphi(t)\,dt=(a+\frac{1}{n}-a)\varphi(\xi_n)=\frac{1}{n}\varphi(\xi_n)$$

și ca atare, trebuie verificat că $\lim_{n\to\infty}\varphi(\xi_n)=\varphi(a)$, ceea ce rezultă din faptul că $\xi_n\to a$, ținînd cont că φ este continuă.

Aşadar, distribuţia Dirac φ_a îşi merită denumirea de impuls unitar pur aplicat la momentul $t = a$.

b) Să considerăm un punct material de masă m plasat în originea axei reale. În fizică este necesar un concept de densitate liniară. Raţionamentul tipic constă în a "împrăştia uniform" masa respectivă într-un interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$ centrat în origine, a defini densitatea liniară medie (masa pe unitate de lungime) în fiecare punct $x \in \mathbb{R}$, adică

$$\Delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{m}{2\varepsilon} & \text{dacă} \quad x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

şi a trece la limită ($\varepsilon \to 0$). Trecerea la limită nu poate fi însă făcută în cadrul analizei matematice clasice. În sensul teoriei distribuţiilor, $\varepsilon = 1/n$, $n \geq 1$ întreg, şirul de distribuţii $\underline{\Delta}_{1/n}$ şi observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{\Delta}_{1/n} = m\delta$. Această distribuţie este numită **densitate liniară** a masei punctuale m centrate în origine.

Mai general, dacă avem un sistem de puncte materiale pe axa reală $x_1, \ldots, x_k$ cu masele $m_1, \ldots, m_k$ respectiv, atunci densitatea liniară a sistemului este distribuţia $m_1\delta_{x_1} + \ldots + m_k\delta_{x_k}$.

Se definesc în mod similar densitatea unei sarcini electrice punctuale, densitatea unui dipol electric etc.

c) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $f_x(y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$. Se obţine astfel o familie de funcţii f_x: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ depinzînd de parametrul x. Se poate arăta că dacă $x \to 0$, atunci $\underline{f_x} \xrightarrow{\text{în } D'} VP\dfrac{1}{y}$. În mod similar, $\dfrac{x}{x^2+y^2} \xrightarrow{\text{în } D'} \pi\delta(y)$ pentru $x \to 0, x > 0$ şi $\dfrac{x}{x^2+y^2} \xrightarrow{\text{în } D'} -\pi\delta(y)$ pentru $x \to 0, x < 0$.

Să considerăm funcţia olomorfă $j : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $j(z) = 1/z$. Alegem $x = \operatorname{Re} z$ ca parametru şi observăm că $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$. Dacă $x \to 0$, $x > 0$, atunci

$$\frac{1}{z} \xrightarrow{\text{în } D'} \pi\delta(y) - iVP\frac{1}{y}$$

iar dacă $x \to 0$, $x < 0$, atunci

$$\frac{1}{z} \xrightarrow{\text{în } D'} -\pi\delta(y) - iVP\frac{1}{y}.$$

Aceste relaţii de convergenţă se numesc în literatură **formulele lui Sohoţki**.

3) **Derivarea distribuţiilor.**

DEFINIŢIA 3.3. Pentru orice distribuţie $f \in \mathscr{D}'$ se definesc **derivatele** $f', f'', \ldots, f^{(n)}, \ldots$, care sînt distribuţii, definite prin $f'(\phi) = -f(\phi')$, $f''(\phi) = f(\phi'')$ şi mai general, $f^{(n)}(\phi) = (-1)^n f(\phi)^{(n)}$, pentru orice întreg $n \geq 1$ şi $\phi \in \mathscr{D}$.

Aşadar, **orice distribuţie este indefinit derivabilă**. În particular, dacă $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție local integrabilă (chiar dacă este eventual discontinuă), ea poate fi derivată de oricîte ori în sens distribuțional, identificîndu-o cu distribuția $\underline{u}$ şi derivînd-o pe aceasta.

Din acest moment, se poate dezvolta un calcul de un tip mai special - **calcul cu distribuţii**. Într-adevăr, ştim ce înseamnă o relaţie de egalitate între distribuţii, ştim să adunăm distibuţii, să le derivăm etc. În particular, are sens să considerăm ecuaţii diferenţiale care să fie rezolvate în cadrul distribuţiilor.

EXEMPLE. a) Arătăm că $H' = \delta$ (deci distribuţia Heaviside este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale $x' = \delta$). Într-adevăr, avem de arătat că $H'(\varphi) = \delta(\varphi)$, adică $-H(\varphi') = \delta(\varphi)$. Dar, $H(\varphi') = \int_0^\infty \varphi'(x)\, dx = \varphi(x)\big|_0^\infty = \varphi(\infty) - \varphi(0) = -\varphi(0)$. Derivatele lui δ se mai numesc impulsuri de ordin superior

$$\delta'(\phi) = -\delta(\phi') = -\phi'(0);\ \delta''(\phi) = \phi''(0), \text{ etc } (\forall)\ \phi \in \mathscr{D}\ .$$

b) Să considerăm un circuit electric RLC (în serie) conectat la momentul $t = 0$ la sursă constantă de tensiune E_0. Intensitatea $i(t)$ verifică la fiecare moment t relaţia $Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\, dt = E(t)$. Dar

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad t < 0 \\ E_0 & \text{dacă} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

deci $E(t) = E_0 \cdot u(t)$, unde u este treapta unitate. Relaţia anterioară nu poate fi derivată (în raport cu t) în sensul analizei clasice, dar este legitimă derivarea ei în sensul teoriei distribuţiilor, ceea ce conduce la ecuaţia diferenţială $Li'' + Ri' + \frac{1}{C}i = E_0\delta$ (ţinînd cont că u se identifică prin $\underline{u} = H$, deci $E(t) = E_0 H$ şi $E'(t) = E_0 H' = E_0\delta$).

c) Dacă $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie de clasă C^1, atunci derivata u' este continuă deci local integrabilă. Este util să observăm că distribuţiile $\underline{(u')}$ şi $(\underline{u})'$ coincid, deoarece $(\forall)\ \varphi \in \mathscr{D}$ şi folosind integrarea prin părţi, rezultă

$$\underline{(u')}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} u'(x)\varphi(x)\, dx \ = \ u(x)\varphi(x)\big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi'(x)\, dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi'(x)\, dx = -\underline{u}(\varphi') = (\underline{u})'(\varphi).$$

Dar dacă funcţia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este de clasă C^1 pe intervalele $(-\infty, a)$ şi (a, ∞) şi are un salt $s(a) = u(a+0) - u(a-0)$ în punctul a, atunci are loc relaţia următoare

$$(3) \qquad (\underline{u})' = s(a)\delta_a + \underline{(u)'}.$$

Într-adevăr, $(\forall)\ \varphi \in \mathscr{D}$,

$$(\underline{u})'(\varphi) = -\underline{u}(\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{a} u(x)\varphi'(x)\,dx - \int_{a}^{\infty} u(x)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -u(x)\varphi(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=a-0} + \int_{-\infty}^{a} u'(x)\varphi(x)\,dx - u(x)\varphi(x)\Big|_{x=a+0}^{x=\infty} + \int_{a}^{\infty} u'(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= -u(a-0)\varphi(a-0) + u(a+0)\varphi(a+0) + \int_{-\infty}^{\infty} u'(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= s(a)\varphi(a) + \int_{-\infty}^{\infty} u'(x)\varphi(x)\,dx = s(a)\delta_a(\varphi) + \underline{(u')}(\varphi)\,.$$

De exemplu, pentru $u = \operatorname{sgn}$ și $a = 0$ avem $s(a) = 1-(-1) = 2$ și $u'(x) = 0$ pentru $x \neq 0$. Atunci $\underline{(u')} = 0$ și formula (3) devine $\operatorname{sgn}' = 2\delta$.

Mai general dacă $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^1 pe porțiuni, cu salturile $s_1, \ldots, s_p$ în punctele de discontinuitate $x_1, \ldots, x_p$, atunci

$$(4) \qquad (\underline{u}') = \sum_{k=1}^{p} s_k \delta_{x_k} + \underline{(u')}\,.$$

4) **Serii de distribuții**

În analiza matematică, derivarea termen cu termen a seriilor trebuie efectuată cu multe precauții. În cadrul teoriei distribuțiilor, apar unele facilități care justifică succesul utilizării dezvoltărilor în serie.

O serie de distribuții $\sum_{n\geq 1} f_n$ se numește **convergentă în** $\mathscr{D}'$, cu suma $f \in \mathscr{D}'$, dacă șirul sumelor parțiale $s_n = f_1 + \ldots + f_n$ converge către f, adică $(\forall)\ \varphi \in \mathscr{D}$, $\lim_{n\to\infty} s_n(\varphi) = f(\varphi)$.

TEOREMA 3.3. Fie $\{u_n\}_{n\geq 1}$ un șir de funcții local integrabile $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, astfel încît seria $\sum_{n\geq 1} u_n$ să fie uniform convergentă pe orice interval compact, cu suma u. Atunci u este local integrabilă și privită în $\mathscr{D}'$, relația $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u$ poate fi derivată termen cu termen de oricîte ori.

DEMONSTRAȚIE. Fie $s_n = u_1 + \ldots + u_n$ deci $s_n \to u$, uniform pe orice interval compact $[a, b]$ pentru $n \to \infty$. Atunci funcția u este integrabilă pe $[a, b]$ deci $u \in L^1_{loc}$ și în plus, pentru orice $\phi \in \mathscr{D}$, $s_n\phi \to u\phi$ uniform deci $s_n \xrightarrow{\text{în } D'} \underline{u}$.

Rezultă de aici că $\underline{s}_n^{(p)} \xrightarrow{\text{în } D'} \underline{u}^{(p)}$ pentru orice $p \geq 0$ deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\underline{u}_n^{(p)}) = \underline{u}^{(p)}.$$

Reținem că din convergența în $\mathscr{D}'$ a unei serii de distribuții decurge posibilitatea derivării termen cu termen a acelei serii, noile serii fiind convergente în $\mathscr{D}'$.

Să considerăm funcția continuă $h : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, $h(t) = t/2 - t^2/(4\pi)$, prelungită prin periodicitate la $\mathbb{R}$. Un calcul uşor arată că dezvoltarea ei Fourier este $h(t) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \left(\frac{1}{k^2} e^{ikt} \right)$, aceasta fiind uniform convergentă pe $\mathbb{R}$, conform criteriului lui Weierstrass (reamintim că o serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k$ este convergentă dacă seriile $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ şi $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k}$ sînt convergente). Pentru $t=0$, rezultă că $\sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Euler). Conform teoremei 3.3, relația

$$(5) \qquad \underline{h}(t) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \left(\frac{1}{k^2} e^{ikt} \right)$$

poate fi derivată termen cu termen (în $\mathscr{D}'$). Deoarece $h'(t) = 1/2 - t/(2\pi)$ pentru $t \in (0, 2\pi)$, prelungită prin periodicitate, cu salturile egale cu 1 în punctele de discontinuitate $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, rezultă

$$(6) \qquad (\underline{h})'' = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k\pi)$$

Dar din (5) $(\underline{h})''$ rezultă direct : $(\underline{h})'' = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} e^{ikt}$. Comparînd cu (6), rezultă o formulă remarcabilă în $\mathscr{D}'$, anume:

$$(*) \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (e^{ikt}).$$

(membrul întîi se numeşte **succesiunea periodică de delte**, cu perioada 2π). Notînd $t = \pi\omega/b$, rezultă $\delta(t - 2k\pi) = \delta(\frac{\pi\omega}{b} - 2k\pi) = \frac{b}{\pi}\delta(\omega - 2bk)$ deci $2b \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - 2bn) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\omega\frac{\pi}{b}}$. Această formulă va fi utilizată la demonstrarea teoremei WKS de eşantionare.

3.4 Convoluția distribuțiilor

Dacă f şi g sînt funcții din $\mathscr{O}$ am văzut că există convoluția lor $h = f * g$ şi $h \in \mathscr{O}$. Adîncim studiul operației de convoluție. O funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se zice **cu suport pozitiv** dacă se anulează spre $-\infty$ (adică există un număr real A astfel încît $f(x) = 0$ pentru orice $x \leq A$). Dacă $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sînt două funcții continue pe porțiuni cu suport pozitiv, atunci există **convoluția** lor $h = f * g$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definită prin

$$(7) \qquad h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) g(t - z)\, dz$$

(integrala fiind de fapt luată pe un interval compact deoarece există A, B astfel că $f(z) = 0$ pentru $z \leq A$ şi $g(u) = 0$ pentru $u \leq B$). Mai mult, funcția h are suport pozitiv şi este continuă (aşa cum rezultă din proprietățile integralelor cu parametri).

Este evident că $f * g = g * f$ (făcînd schimbarea de variabilă $u = t - z$).

Convoluția este distributivă în raport cu adunarea (verificare imediată).

De asemenea **convoluția este asociativă**: dacă $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sînt funcții continue pe porțiuni şi cu suport pozitiv, atunci $f * (g * h) = (f * g) * h$, aşa cum rezultă folosind regula intervertirii ordinii de integrare.

Remarcăm apoi că dacă f şi g sînt continue pe porțiuni şi se anulează în afara unui interval compact, atunci aceeaşi proprietate o are şi $f * g$; în plus,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(t-z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-z)\,dt\Big) f(z)\,dz.$$

Dar $\int_{-\infty}^{\infty} g(t-z)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,du$ (independent de z) şi rezultă relația

$$(8) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t)\,dt = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz\Big)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,du\Big).$$

Există rațiuni serioase pentru extinderea operației de convoluție la cazul distribuțiilor. Este necesară mai întîi introducerea noțiunii de suport al unei distribuții. Se spune că o distribuție $f \in \mathscr{D}'$ **se anulează pe un deschis** $U \subset \mathbb{R}$ dacă $f(\phi) = 0$ pentru orice funcție de testare $\phi \in \mathscr{D}$ care se anulează în afara lui U. Suportul lui f este, prin definiție, mulțimea închisă $\operatorname{Supp} f$ = complementara celui mai mare deschis pe care f se anulează. De exemplu $\operatorname{Supp} \delta_a = \{a\}$ şi $\operatorname{Supp} \underline{u} = [0, \infty)$ ($\underline{u}$ fiind treapta unitate). Se poate arăta că distribuțiile cu suport compact sînt exact funcționalele $\mathbb{R}$-liniare $f : C^\infty \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că dacă ψ_n este un şir de funcții C^∞ şi $(\forall)\ k \geq 0$, $\psi_n^{(k)}$ este uniform convergent către zero pe orice interval mărginit, atunci $\lim_{n\to\infty} f(\psi_n) = 0$.

Mulțimea distribuțiilor cu suport compact se notează cu $\mathscr{E}'$ ($\mathscr{E} = C^\infty$).

Fie f, g două distribuții din $\mathscr{D}'$, una avînd suport compact (de exemplu, $\operatorname{Supp} g = K$ este compact). Alegem o funcție de testare $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egală cu 1 într-un deschis care conține K. Atunci **convoluția** $h = f * g$ este o distribuție definită prin $h(\phi) = f(\psi)$ unde ψ este funcția definită prin aplicarea distribuției g pe funcția $y \to \alpha(y)\cdot\phi(x+y)$, adică $\psi(x) = g(y)(\alpha(y)\cdot(\phi(x+y)))$.

Există încă un caz important cînd există $f * g$, anume cel în care $\operatorname{Supp} f \subset [0, \infty)$ şi $\operatorname{Supp} g \subset [0, \infty)$. În acest caz se modifică funcția ψ, luînd $\psi(x) = g(y)(u(x)\cdot v(y)\cdot\phi(x+y))$, unde $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sînt funcții de clasă C^∞ egale cu 0 pe intervalul $(-\infty, -2)$ şi cu 1 pe intervalul $(-1, \infty)$.

Definiția anterioară este mai dificil de justificat şi nu intrăm în detalii, mulțumindu-ne să observăm că dacă u, v sînt funcții local integrabile şi există $u * v$, atunci $\underline{u*v} = \underline{u} * \underline{v}$ (deci compatibilitate cu definiția convoluției din cazul funcțiilor). De asemenea vom da o **listă de proprietăți** ale convoluției.

a) Dacă $f, g \in \mathscr{D}'$ şi $f * g$ există, atunci există $g * f$ şi $f * g = g * f$.

b) Pentru orice $f \in \mathscr{D}'$, există $f * \delta$ şi $f * \delta = \delta * f = f$.

Într-adevăr, δ avînd suport compact $K = \{0\}$, rezultă că $(\forall)\ \phi \in \mathscr{D}$, $(f * \delta)(\phi) = f(\psi)$, unde $\psi(x) = \delta(y)(\alpha(y)\cdot\phi(x+y)) = \alpha(0)\cdot\phi(x) = \phi(x)$ deci $(f * \delta)(\phi) = f(\phi)$ adică $f * \delta = f$.

c) Dacă $f, g \in \mathscr{D}'$ şi dacă există $f * g$, atunci $(\forall)\ m \geq 1$, $f^{(m)} * g = (f * g)^{(m)} = f * g^{(m)}$.

Procedînd prin inducție, este suficient de considerat cazul $m = 1$. Din definiție rezultă că $(f*g)' = f'*g$ şi aplicînd a), rezultă

$$f * g' = g' * f = (g * f)' = (f * g)'.$$

d) Pentru orice $f \in \mathscr{D}'$ şi $m \geq 1$, $f^{(m)} = f * \delta^{(m)}$.

Într-adevăr, $f^{(m)} = (\delta * f)^{(m)} = \delta^{(m)} * f = f * \delta^{(m)}$. Reținem că derivatele de ordin superior ale unei distribuții f se exprimă prin convoluția lui f cu impulsuri Dirac de ordin superior.

Asociativitatea convoluției distribuțiilor nu are loc întotdeauna; de exemplu luînd $f = \underline{1}$, $g = \delta'$, $h = H$, rezultă $(f * g) * h = (\underline{1}*\delta') * H = \underline{1}' * H = 0 * H = 0$, în timp ce $f * (g * h) = \underline{1} * (\delta' * H) = \underline{1} * H' = \underline{1} * \delta = \underline{1}$. Regula de asociativitate a convoluției a trei factori are însă loc dacă toți au suport conținut în $[0, \infty)$ sau dacă cel puțin doi au suport compact.

e) Fie $f, g \in \mathscr{D}'$ astfel încît să existe $f * g$. Atunci $(\forall)\ a, b \in \mathbb{R}$, $f(t - a) * g(t - b) = f(t - a - b) * g$. În particular, au loc formulele de întîrziere: $\delta(t - a) * f = f(t - a)$ şi $\delta(t - a) * \delta(t - b) = \delta(t - a - b)$.

Demonstrația rezultă direct din definiție. Distribuția $\delta(t - a)$ coincide cu δ_a deci impulsul unitar aplicat la momentul a. Aşadar, prin convoluția lui δ_a cu un semnal f, se obține întîrzierea lui f cu a.

Remarcăm de asemenea că dacă $\Delta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - 2k\pi)$ este succesiunea periodică de delte, atunci $(\forall) f \in \mathscr{D}'$, $f(t)*\Delta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t - 2k\pi)$, deci prin convoluție cu Δ un semnal se transformă într-o suprapunere de translatate ale lui. Dacă $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este o funcție de clasă C^∞, atunci

$$\alpha(t)\Delta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha(2k\pi)\delta(t - 2k\pi).$$

Un rezultat important, care subliniază rolul operației de convoluție, îl constituie reprezentarea sistemelor liniare continue şi invariante în timp.

Pentru orice $\tau \in \mathbb{R}$ şi pentru orice funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, notăm cu $T_\tau f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \to f(t-\tau)$ întîrziata cu τ a lui f. Operatorul de întîrziere $T_\tau : \mathscr{D} \to \mathscr{D}, f \to T_\tau f$ se extinde şi la distribuții $T_\tau : \mathscr{D}' \to \mathscr{D}', f(t) \to f(t-\tau)$. Un operator $L : \mathscr{D}' \to \mathscr{D}'$ se numeşte **invariant în timp** dacă $(\forall)\ g \in \mathscr{D}'$, $(\forall)\ \tau \in \mathbb{R}$, $LT_\tau g = T_\tau Lg$. Se poate demonstra că **orice operator** $L : \mathscr{E}' \to \mathscr{D}'$ **liniar, continuu** [dacă $\psi_n \xrightarrow{\text{în } \mathscr{E}'} \psi$, atunci $L(\psi_n) \xrightarrow{\text{în } \mathscr{D}'} L(\psi)$] **şi invariant în timp, este un operator de convoluție,** în sensul că există şi este unic $f \in \mathscr{D}'$ astfel încît $L = f *$ (de fapt $f = L\delta$ este răspunsul-impuls). Demonstrația poate fi găsită în

[C 18]. Aşadar, sistemele definite prin operatori ca mai sus sînt de tip convolutiv.

APLICAȚII.

1) Ecuații de convoluție. Soluții elementare

Fie $a_0, a_1, ..., a_n$ constante reale (sau complexe) şi ecuația diferențială liniară de ordinul n, $\sum_{k=0}^{n} a_k x^{(k)}(t) = b(t)$, cu $b \in \mathscr{D}'$ şi necunoscuta $x \in \mathscr{D}'$. Deoarece $x^{(k)} = \delta^{(k} * f$, considerînd operatorul $L = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta^{(k)} *$, $L : \mathscr{D}' \to \mathscr{D}'$, ecuația se scrie $Lx = b$.

În mod similar, dacă $t_0 < t_1 < ... < t_n$ sînt puncte fixate, ecuația cu diferențe finite $\sum_{k=0}^{n} a_k x(t - t_k) = b(t)$ se scrie $Lx = b$, unde $L = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta_{t_k} *$.

Aceste două situații dovedesc interesul pentru studiul ecuațiilor de forma $a * x = b$ cu $a, b \in \mathscr{D}'$ fixate.

(într-un caz, $a = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta^{(k)}$ şi în celălalt caz, $a = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta_{t_k}$). Considerînd operatorul $L : \mathscr{D}' \to \mathscr{D}'$, $x \to a * x$ ecuația se scrie $Lx = b$. Intrării δ îi corespunde ieşirea $L(\delta) = a * \delta = a$ şi de aceea distribuția a se mai numeşte **răspunsul-impuls** al sistemului L.

Introducem acum o altă noțiune importantă. Se numeşte **soluție elementară** a lui L orice distribuție $e \in \mathscr{D}'$ astfel încît $Le = \delta$ (nu este neapărat unică). Să notăm cu $\mathscr{A}$ mulțimea distribuțiilor $x \in \mathscr{D}'$ pentru care există $e * x$ şi $a * e * x$. **Dacă $b \in \mathscr{A}$, atunci ecuația $a * x = b$ are soluție unică în $\mathscr{A}$, anume $x = e * b$.**

[Într-adevăr, $a * x = a * (e * b) = (a * e) * b = \delta * b = b$ deci $x = e * b$ este soluție. Apoi, dacă $x, x_1 \in \mathscr{A}$ sînt soluții, atunci $a * (x - x_1) = 0$ deci

$$x - x_1 = \delta * (x - x_1) = (e * a) * (x - x_1) = e * 0 = 0, \text{ adică } x = x_1].$$

Aşadar, prin cunoaşterea soluției elementare (pentru care $a * e = \delta$), ecuația $a * x = b$ se rezolvă prin convoluția soluției elementare cu membrul secund al ecuației.

EXEMPLU. Să considerăm ecuația diferențială liniară omogenă cu coeficienți constanți $\sum_{k=0}^{n} a_k x^{(k)} = 0$, $n \geq 2$ $(a_n = 1)$. Fie $z = z(t)$ soluția ei în clasa C^∞, cu condițiile inițiale $z(0) = z'(0) = ... = z^{(n-2)}(0) = 0$ şi $z^{(n-1)}(0) = 1$. Atunci distribuția $e = zH$ este o soluție elementară pentru operatorul $L = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta^{(k)} *$.

[Într-adevăr, avem $e' = z'H + zH' = z'H + z\delta = z'H + z(0)\cdot\delta = z'H$,
$e'' = z''H + z'H' = z''H + z'\delta = z''H + z'(0)\cdot\delta = z''H, ..., e^{(n-1)} = z^{(n-1)}H$ şi
$e^{(n)} = z^{(n)}H + z^{(n-1)}H' = z^{(n)}H + z^{(n-1)}\delta = z^{(n)}H + z^{(n-1)}(0)\cdot\delta = z^{(n)}H + \delta$, deci

$$Le = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{(k)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (z^{(k)} H) + a_n (z^{(n)} H + \delta) = (\sum_{k=0}^{n} a_k z^{(k)}) H + \delta = 0H + \delta = \delta].$$

2) **Funcţii Green**

Fie o ecuaţie diferenţială liniară omogenă

$$Lx \equiv x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)x = 0,$$

unde a_i sînt funcţii continue pe un interval $I = [\alpha, \beta]$. Conform teoremei fundamentale pentru problema Cauchy (corolarul teoremei V.2.15.),unica soluţie care se anulează în punctul α împreună cu primele $n-1$ derivate este soluţia banală $x = 0$. Fixăm un punct $s \in (\alpha, \beta)$.

Se numeşte **funcţie Green** (G. Green, 1793-1841) a operatorului L în punctul s o funcţie $x : I \to \mathbb{R}$, $x(t) = K_s(t)$ care este soluţie a ecuaţiei $Lx = 0$, pe $I \setminus \{s\}$, nulă împreună cu primele $n-1$ derivate în α astfel încît $x, x', ..., x^{(n-2)}$ să fie continue pe I, dar $x^{(n-1)}(s-0) = 0$, $x^{(n-1)}(s + 0) = 1$.

Pe intervalul $[\alpha, s]$ funcţia Green este nulă (datele Cauchy în punctul α fiind nule) dar pe intervalul $[s, \beta]$ datele Cauchy în punctul s nu mai sînt toate nule (primele $n-2$ derivate fiind nule iar cea de ordin $n-1$ fiind egală cu 1).

Conform teoremei de dependenţă de datele iniţiale, funcţia $K_s(t)$ şi derivatele ei (în raport cu t) pînă la ordinul $n-2$ depind continuu de s şi t în $[\alpha, \beta]\times[\alpha, \beta]$.

Pentru $n = 1$, ecuaţia se scrie $x'+a_1(t)x = 0$ şi $K_s(t)$ este soluţie pe $I \setminus \{s\}$, discontinuă în s avînd graficul de forma din figura VIII.16 a).

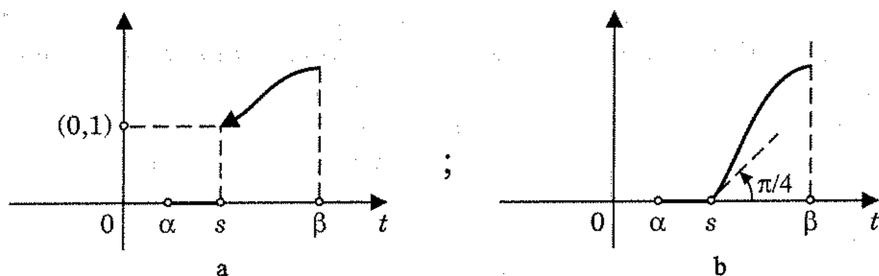


Figura VIII.16.

Pentru $n = 2$ ecuaţia devine $x''+a_1(t)x'+a_2(t)x = 0$, $K_s(t)$ este soluţie pe $I \setminus \{s\}$, continuă pe I şi astfel încît $K_s'(s-0) = 0$, $K_s'(s+0) = 1$; figura VIII.16 b).

Să considerăm acum ecuaţia $Lx = b(t)$, cu b: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ continuă. Arătăm că soluţia acestei ecuaţii astfel încît $x(\alpha) = x'(\alpha) = ... = x^{(n-1)}(\alpha) = 0$ este $x(t) = \int_\alpha^\beta K_s(t)b(s)\,ds = \int_\alpha^t K_s(t)b(s)\,ds$ ($K_s(t) = 0$ pentru $s \geq t$). [Într-adevăr,

$$x^{(p)} = \int_\alpha^\beta \frac{d^p K_s}{dt^p} b(s)\,ds, \text{ pentru}$$

$$1 \le p \le n-1 \text{ şi } x^{(n)}(t) = \frac{d}{dt}\int_{\alpha}^{t} \frac{d^{n-1}K_s}{dt^{n-1}} b(s)\,ds =$$

$$= \int_{\alpha}^{t} \frac{d^n K_s}{dt^n} b(s)\,ds + \frac{d^{n-1}K_s}{dt^{n-1}}(t)b(s)\Big|_{t=s+0}^{s=t-0} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d^n K_s}{dt^n} b(s)\,ds + b(t).$$

Avem

$$Lx = b(t) + \int_{\alpha}^{\beta} [\frac{d^n K_s}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}K_s}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n(t)K_s] b(s)\,ds = b(t),$$

deoarece paranteza dreaptă este nulă. Aşadar, funcţia x verifică $Lx = b$ şi evident $x(\alpha) = x'(\alpha) = \ldots = x^{(n-1)}(\alpha) = 0$].

Ecuaţia $Lx = b(t)$ poate fi interpretată ca "ecuaţie de mişcare". a unui sistem dinamic în care $b(t)$ este o "forţă externă". Presupunem că $b(t)$ este un impuls unitar aplicat la momentul s_0, adică $b(t) = \delta(t-s_0)$. Atunci soluţia (răspunsul) sistemului la momentul t va fi

$$x(t) = \int_{\alpha}^{\beta} K_s(t)b(s)\,ds = \int_{\alpha}^{\beta} K_s(t)\delta(s-s_0)\,ds = K_{s_0}(t).$$ Deci $(\forall)\ s, t, K_s(t)$

se interpretează ca răspunsul sistemului la momentul t de îndată ce la momentul s i s-a aplicat un impuls unitar. [Relaţia $K_s(t) = 0$ pentru $t < s$ exprimă tocmai proprietatea de cauzalitate, în sensul că sistemul nu are răspuns anterior aplicării impulsului.]

Remarcăm de asemenea că dacă $b(t)$ este o sumă de impulsuri, atunci răspunsul sistemului va fi şi el suma răspunsurilor.

În cazul ecuaţiilor cu coeficienţi constanţi

$$Lx \equiv x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots \ldots + a_n x = 0,\ t \in (-\infty, \infty),$$

am văzut că soluţia elementară este $e = zH$, deci $e = \begin{cases} z(t) & \text{dacă} & t \ge 0 \\ 0 & \text{dacă} & t < 0 \end{cases}$,

unde $z(t)$ este soluţia ecuaţiei pentru care $z(0) = z'(0) = \ldots = z^{(n-2)}(0) = 0$ şi $z^{(n-1)}(0) = 1$. Aşadar, $e = K_0(t)$ adică tocmai funcţia Green la momentul $s = 0$.

Apoi pentru orice $s, t \in \mathbb{R}$, $K_s(t) = e(t-s) = e * \delta_s$ şi $K_s(t)$ este o soluţie a ecuaţiei $Lx = \delta_s$ [deoarece $L(e * \delta_s) = L(e) * \delta_s = \delta * \delta_s = \delta_s$].

EXEMPLE. 1) Pentru $Lx = x' + ax$ ($a \in \mathbb{R}$ constant) avem $e = e^{-at}H$, iar pentru $Lx = x'' - a^2 x$, $e = \frac{\operatorname{sh} at}{a} H$.

2) Să considerăm ecuaţia pendulului "liber" $Lx = x'' + \omega^2 x = 0$ ($\omega > 0$); în acest caz $e = \frac{\sin \omega t}{\omega} H$ (deoarece soluţia cu condiţiile $z(0) = 0$, $z'(0) = 0$ este $z(t) = \frac{\sin \omega t}{\omega}$). Dacă la momentul s se aplică pendulului un impuls unitar, atunci răspunsul lui la momentul t va fi

$$K_s(t) = e * \delta_s = e(t-s) = \begin{cases} \dfrac{\sin\omega(t-s)}{\omega} & \text{dacă} \quad t \geq s \\ 0 & \text{dacă} \quad t < s \end{cases}.$$

3) Soluția ecuației generale $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = b(t)$ cu $b \in \mathscr{O}$, cu condițiile inițiale nule în punctul t_0 este, pentru $t > t_0$,

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} K_s(t) b(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} z(t-s) H(t-s) b(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} z(t-s) b(s)\,\mathrm{d}s.$$

De exemplu în cazul pendului, dacă el este în repaos la momentul t_0 și primește "forța externă" $b(t)$, atunci răspunsul lui la orice moment $t > t_0$ va fi

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^{t} b(s) \sin\omega(t-s)\,\mathrm{d}s,$$

o formulă remarcabilă.

§4. Transformarea Fourier

4.1. Definiția transformatei Fourier a funcțiilor

Dacă $f(t)$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, nulă în afara unui interval compact (vom scrie pe scurt $f \in C_c^0$), se poate considera funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definită prin

$$(1) \qquad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

(integrala se consideră de fapt pe un interval compact). Conform lemei lui Riemann, rezultă că $\lim\limits_{|\omega| \to \infty} F(\omega) = 0$. De asemenea, aplicînd proprietățile integralelor cu parametri, rezultă că funcția F este de clasă C^∞; anume se verifică ușor prin inducție pentru orice întreg $k \geq 0$,

$$(2) \qquad F^{(k)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^k f(t) e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

Asocierea $\mathbb{R}$-liniară $f(t) \to F(\omega)$ are multe proprietăți matematice interesante, interpretări fizice sugestive (și chiar implicații tehnologice excepționale!), pe care le vom derula în continuare.

Definiția 4.1. Pentru orice funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă și nulă în afara unui interval compact, funcția $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definită prin (1), se numește **transformata Fourier** a lui f.

Vom nota pe scurt

$$f(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} F(\omega) \quad \text{sau} \quad F(\omega) = \mathscr{F}f(t) \quad \text{sau} \quad F = \mathscr{F}f.$$

și asocierea $f \to \mathscr{F}$ se numește operatorul de **transformare Fourier** (pentru clasa C_c^0 de funcții original considerate). De fapt $\mathscr{F}\colon C_c^0 \to C^\infty$, dar în continuare vom extinde în mai multe etape acest operator.

Reamintim că dacă $h(\omega, t)$, $h : [\alpha, \beta] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci

$$\int_\alpha^\beta d\omega \int_a^b h(\omega, t)\, dt = \int_a^b dt \int_\alpha^\beta h(\omega, t)\, d\omega$$

(adică ordinea de integrare nu contează). De aici rezultă imediat că dacă $f, g \in C_c^0$ şi dacă $F = \mathscr{F}f$, $G = \mathscr{F}g$, atunci

$$(3) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) g(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} G(x) f(x)\, dx.$$

Să presupunem acum că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă din L^1 (absolut integrabilă, adică $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$). Deoarece $(\forall)\ t, \omega \in \mathbb{R}$, $|e^{-i\omega t}| = 1$, conform criteriului de comparație de la integrale proprii rezultă că integrala (1) este convergentă şi astfel am realizat o primă extindere a transformării Fourier la o clasă mai largă de funcții [de exemplu, funcția $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ nu aparține clasei

$$C_c^0, \text{ dar } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt = \pi].$$

LEMĂ. Fie $w = f(z)$ o funcție olomorfă într-o bandă $B = \{z = x + iy \mid |y| < b\}$, unde $b > 0$ şi astfel încît $|f(x + iy)| \le g(x)$, pentru orice $(x, y) \in B$, unde funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ este continuă şi satisface condițiile

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0, \ \lim_{x \to \infty} g(x) = 0 \ \text{ şi } \ \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, dx < \infty.$$

Atunci integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(x + iy)\, dx$ este independentă de y, pentru $|y| < b$.

DEMONSTRAȚIE. Integrala este convergentă conform criteriului de comparație pentru integrale improprii. Alegem y_1, y_2 arbitrari cu $-b < y_1 < y_2 < b$ şi considerăm conturul γ închis din figura VIII.17. Aplicînd teorema Cauchy, rezultă

$$(*) \qquad 0 = \int_\gamma f(z)\, dz = \int_{MN} f(z)\, dz + \int_{NP} f(z)\, dz + \int_{PQ} f(z)\, dz + \int_{QM} f(z)\, dz$$

Dar,

$$\left|\int_{NP} f(z)\, dz\right| \overset{z=R+iy}{=} \left|\int_{y_1}^{y_2} f(R + iy) i\, dy\right| \le$$

$$\le \int_{y_1}^{y_2} |f(R + iy)|\, dy \le \int_{y_1}^{y_2} g(R)\, dy =$$

$= g(R)(y_2 - y_1)$ şi similar

$$\left|\int_{QM} f(z)\, dz\right| \le g(-R)(y_2 - y_1).$$

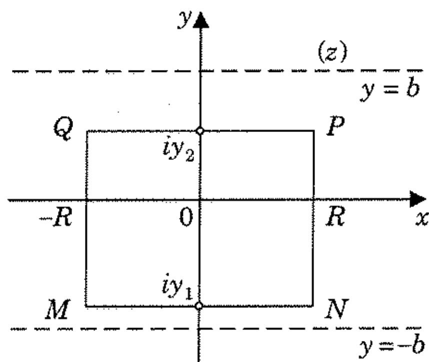


Figura VIII.17.

Apoi $\int_{MN} f(z)\,dz \overset{z=x+iy_1}{=} \int_{-R}^{R} f(x+iy_1)\,dx$ și $\int_{PQ} f(z)\,dz = \int_{R}^{-R} f(x+iy_2)\,dx$. Făcînd $R \to \infty$, relația (*) devine

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x+iy_1)\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_{R}^{-R} f(x+iy_2)\,dx = 0, \text{ adică } \int_{-\infty}^{\infty} f(x+iy_1)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+iy_2)\,dx.$$

TEOREMA 4.1. Transformata Fourier a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$ este $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(\omega)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

DEMONSTRAȚIE. Funcția f se prelungește analitic la funcția olomorfă $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=e^{-z^2}$. Fixînd $b>0$ suficient de mare, avem $|y|\le b$, $|f(z)|=|f(x+iy)|=\left|e^{-(x+iy)^2}\right|=e^{y^2-x^2}\le e^{b^2-x^2}$ și putem lua $g(x)=e^{b^2-x^2}$. Atunci conform lemei, pentru $y_1=0$ și $y_2=y$, rezultă

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+iy)^2}\cdot e^{-i\omega(x+iy)}dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+y^2+\omega y-ix(2y+\omega)}dx \overset{y=-\frac{\omega}{2}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-\frac{\omega^2}{4}}dx=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

[Dăm o demonstrație "mai simplă" a teoremei 4.1.: avem $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-i\omega x}dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos\omega x\,dx-i\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\sin\omega x\,dx=2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\cos\omega x\,dx$ (pe motive de paritate sau imparitate a integrantului). Atunci

$F'(\omega)=-2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}x\sin\omega x\,dx$ și integrînd prin părți, rezultă $F'(\omega)=-\frac{1}{2}\omega F(\omega)$ deci $F(\omega)=Ce^{-\frac{\omega^2}{4}}$. Făcînd $\omega=0$, rezultă $\sqrt{\pi}=C$ deci $F(\omega)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$. Sînt necesare unele justificări ale operațiilor efectuate].

COROLAR. Fie $\alpha>0$ constant; atunci

$$\mathscr{F}e^{-\alpha t^2}=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}.$$

DEMONSTRAȚIE. Avem

$$\mathscr{F}e^{-\alpha t^2}=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2}e^{-i\omega t}\,dt \overset{t=\frac{x}{\sqrt{\alpha}}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-\frac{i\omega}{\sqrt{\alpha}}x}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}F\left(\frac{\omega}{\sqrt{\alpha}}\right) \overset{\text{teor.4.1.}}{=} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\pi}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

EXEMPLE. 1) De fapt teorema 4.1. oferă un prim exemplu important. Menționăm că unii autori definesc transformarea Fourier prin formula

$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$. În acest caz există o funcție, anume $f(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$, care coincide cu transformata ei Fourier ($F(\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{2}}$).

2) Calculăm transformata Fourier a lui $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$.

Aşadar, $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{1+t^2}dt$. Aplicînd prop. VII.4.14., rezultă pentru $\omega<0$, $F(\omega)=2\pi i\operatorname{Rez}\left.\frac{e^{-i\omega z}}{1+z^2}\right|_{z=i}=2\pi i\left.\frac{e^{-i\omega z}}{2z}\right|_{z=i}=\pi e^{\omega}$; iar dacă $\omega>0$, atunci $F(\omega)=\pi e^{-\omega}$, deci $F(\omega)=\pi e^{-|\omega|}$, $(\forall)\,\omega\in\mathbb{R}$.

3) Deoarece $\overline{e^{-i\omega t}}=e^{i\omega t}$, se observă că dacă f are valori reale şi $F(\omega)=\mathscr{F}f(t)$, atunci $F(-\omega)=\overline{F(\omega)}$. Din acest motiv, este suficient să cunoaştem $F(\omega)$ pentru $\omega\geq 0$.

4) Presupunem că $f(t)\xrightarrow{\mathscr{F}}F(\omega)$ şi calculăm transformata Fourier a întîrziatei cu τ a lui f:

$$\mathscr{F}f(t-\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)e^{-i\omega t}dt\overset{t-\tau=u}{=}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-i\omega(\tau+u)}du=e^{-i\omega\tau}\mathscr{F}f(t).$$

Aşadar, întîrzierea cu τ revine la multiplicarea cu $e^{-i\omega\tau}$.

4.2.Formula Fourier de inversare

Vom stabili un rezultat fundamental legat de inversarea transformării Fourier, care va permite stabilirea unei legături bilaterale între domeniile - timp şi frecvență.

Vor fi necesare unele pregătiri de analiză matematică. Dacă $\{f_\alpha\}$ este un şir sau o familie de funcții, este util să indicăm condiții în care se poate trece la limită sub semnul integrală, adică să se poată scrie relații de forma $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\int_a^b f_\alpha(x)\,dx=\int_a^b\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}f_\alpha(x)\,dx$, $\alpha_0\in\mathbb{R}$, fiind fixat ($\alpha\in\mathbb{R}$ sau este situat în vecinătatea lui α_0; eventual $\alpha=n\in\mathbb{N}$ şi $\alpha_0=\infty$). Dacă intervalul $[a,b]$ este compact, funcțiile $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ sînt continue şi şirul $\{f_n\}$ converge uniform pe $[a,b]$, atunci se ştie că relația anterioară are loc. Este însă necesar să extindem acest fapt. Familia $\{f_\alpha\}$ se zice **local uniform convergentă** într-un interval I pentru $\alpha\to\alpha_0$ dacă există o funcție f astfel încît $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}f_\alpha=f$ uniform pe orice subinterval compact al lui I; în acest caz, dacă f_α sînt continue atunci rezultă că şi f este continuă.

LEMĂ. Dacă o familie $\{f_\alpha\}$, $f_\alpha:I\to\mathbb{R}$ de funcții continue pe un interval deschis $I=(a,b)$ este local uniform convergentă către o funcție $f:I\to\mathbb{R}$,

pentru $\alpha \to \alpha_0$ și dacă există o funcție continuă și pozitivă g astfel încît $\int_a^b g(x)\,dx < \infty$ și $|f_\alpha(x)| \le g(x)$ pentru orice $x \in I$ și orice α, atunci

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_a^b f_\alpha(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

DEMONSTRAȚIE. Integralele considerate au sens deoarece f rezultă continuă și $|f(x)| \le g(x)$ pentru orice $x \in I$. Apoi pentru orice u, v astfel încît $a < u < v < b$, avem

$$\left|\int_a^b [f_\alpha(x) - f(x)]\,dx\right| \le \int_u^v |f_\alpha(x) - f(x)|\,dx + 2\int_v^b g(x)\,dx + 2\int_a^u g(x)\,dx,$$

ceea ce arată că membrul întîi tinde către zero pentru $\alpha \to \alpha_0$ [Deoarece, pentru orice $\varepsilon > 0$ putem fixa u și v astfel încît suma ultimilor doi termeni din membrul secund să fie $< \frac{\varepsilon}{2}$; apoi alegem α suficient de aproape de α_0 astfel încît și primul termen să fie $< \frac{\varepsilon}{2}$].

Vom aplica această lemă de mai multe ori în cele ce urmează. Mai întîi ne prupunem să extindem formulele (2) și (3) din 4.1.

TEOREMA 4.2. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este o funcție continuă și $\int_{-\infty}^{\infty} |x^k f(x)|\,dx < \infty$ pentru un întreg $k \ge 1$, atunci transformata Fourier $F = \mathscr{F} f$ este de clasă C^k pe $\mathbb{R}$.

DEMONSTRAȚIE. Avem $F(\omega + h) - F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[e^{-i(\omega+h)t} - e^{-i\omega t}]\,dt =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \cdot f(t)(e^{-iht} - 1)\,dt$. Dar funcția $v(x) = e^{-ix} - 1$ este mărginită și $\lim_{x\to 0} v(x) = 0$. Atunci, conform lemei anterioare,

$F(\omega + h) - F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \cdot f(t) \cdot v(ht)\,dt$ va tinde către zero cînd $h \to 0$, ceea ce arată că funcția F este continuă în orice punct ω. Împărțind cu $h \ne 0$, rezultă că

$$\frac{F(\omega+h) - F(\omega)}{h} = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t) e^{-i\omega t} \cdot \frac{v(ht)}{ht}\,dt$$

și observînd că funcția $\frac{v(x)}{x} = \frac{e^{-ix} - 1}{x}$ este mărginită și $\lim_{x\to 0} \frac{v(x)}{x} = -i$, rezultă că $\lim_{h\to 0} \frac{F(\omega+h) - F(\omega)}{h}$ există și este egală cu $\int_{-\infty}^{\infty} (-it) f(t) \cdot e^{-i\omega t}\,dt$, deci $(\forall)\ \omega \in \mathbb{R}$,

există $F'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (-it) f(t) e^{-i\omega t} dt$. Deci dacă $tf(t)$ este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, atunci F este de clasă C^1. Teorema rezultă aplicînd inducția după k.

TEOREMA 4.3. Presupunem că $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sînt continue şi absolut integrabile. Dacă $F = \mathscr{F} f$, $G = \mathscr{F} g$, atunci

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) g(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} G(x) f(x)\, dx.$$

DEMONSTRAȚIE. Să alegem o funcție continuă $\upsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încît $|\upsilon(x)| \le 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $\upsilon(x) = 1$ pentru orice $x \in (-1, 1)$ şi nulă în afara unui interval compact. (figura VIII.18)

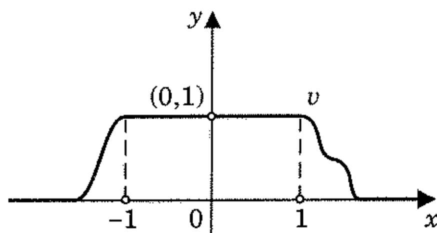


Figura VIII.18.

Pentru orice $\varepsilon > 0$, considerăm funcția $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_\varepsilon(x) = \upsilon(\varepsilon x) f(x)$. Evident, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, $|f_\varepsilon(x)| \le |f(x)|$ şi familia f_ε converge local uniform către f pentru $\varepsilon \to 0$. Totodată familia transformatelor Fourier $\{F_\varepsilon(\omega)\}$ este uniform mărginită, deoarece $|F_\varepsilon(\omega)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t) e^{-i\omega t} dt\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f_\varepsilon(t)|\, dt \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$, pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. În plus, F_ε converge uniform către F pentru $\varepsilon \to 0$. Aceasta rezultă din lema anterioară, observînd că $(\forall)\, \omega \in \mathrm{R}$, $\varepsilon > 0$,

$|F_\varepsilon(\omega) - F(\omega)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |1 - \upsilon(\varepsilon x)| \cdot |f(x)|\, dx$. Formula (3) are loc în cazul cînd f, g se anulează în afara unui interval compact deci are loc pentru $f_\varepsilon(x)$,

$g_\varepsilon(x) = \upsilon(\varepsilon x) g(x)$ adică $\int_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(\omega) g_\varepsilon(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} G_\varepsilon(x) f_\varepsilon(x)\, dx$.

Deoarece $F_\varepsilon(\omega) g_\varepsilon(\omega)$ converge local uniform către $F(\omega) g(\omega)$ pentru $\varepsilon \to 0$ şi în modul este majorată de o constantă înmulțită cu $|g(\omega)|$, acelaşi lucru avînd loc şi pentru $G_\varepsilon(x) f_\varepsilon(x)$, lema conduce la egalitatea cerută.

TEOREMA 4.4. (formula Fourier de inversare). Presupunem că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă şi $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$. Notînd cu $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ transformata Fourier a lui f şi presupunînd că

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|\, d\omega < \infty, \text{ rezultă}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{it\omega}\, d\omega, \quad \textbf{pentru orice } t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

DEMONSTRAŢIE. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat şi funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-\frac{\varepsilon}{2}x^2}$.

Transformata Fourier a lui g este $G(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon} e^{-\frac{\omega^2}{2\varepsilon^2}}$ (conform teoremei 4.1) şi conform teoremei 4.3, rezultă relaţia

$$(5) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-\frac{\varepsilon^2\omega^2}{2}} \mathrm{d}\omega = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}} \cdot f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Făcînd $\varepsilon \to 0$ şi aplicînd lema anterioară, membrul întîi tinde către $\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,\mathrm{d}\omega$. Arătăm apoi că $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}} \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = f(0) \cdot \sqrt{2\pi}$ [Într-adevăr, dacă f s-ar anula pe intervalul $[-1,1]$, atunci am avea $\left|\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}} \cdot f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ şi făcînd $\varepsilon \to 0$ se obţine relaţia dorită.

Apoi dacă f s-ar anula în afara unui interval compact, atunci am avea $\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{x=\varepsilon u}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot f(\varepsilon u)\,\mathrm{d}u$ şi aplicînd încă o dată lema, aceasta ar tinde către $f(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u = f(0) \cdot \sqrt{2\pi}$ pentru $\varepsilon \to 0$. În fine, în cazul general, alegem o funcţie v ca în demonstraţia teoremei 4.2. şi scriem $f = (1 - v)f + vf$, observînd că $(1 - v)f$ se anulează pe $[-1, 1]$, iar vf este o funcţie continuă nulă în afara unui compact deci pentru aceste două funcţii are loc relaţia cerută şi rezultă prin adunare că aceeaşi relaţie are loc pentru f]. Aşadar, făcînd $\varepsilon \to 0$, relaţia (5) devine

$$(6) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,\mathrm{d}\omega = 2\pi \cdot f(0).$$

Am demonstrat deci că pentru orice funcţie continuă şi absolut integrabilă f are loc relaţia (6); în particular aceasta are loc, fixînd $t \in \mathbb{R}$, şi pentru funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x + t)$. Transformata Fourier a lui h este

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) e^{-i\omega x} \mathrm{d}x \overset{x+t=u}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega(u-t)} \mathrm{d}u = e^{i\omega t} F(\omega).$$

Formula (6) devine $\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\,\mathrm{d}\omega = 2\pi \cdot h(0)$ adică

$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega = 2\pi \cdot f(t)$, $(\forall) t \in \mathbb{R}$, tocmai formula (4) căutată. Teorema 4.4 este demonstrată.

Fie $f(t)$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă din clasa $\mathcal{O}$ de indice s_0 și $f(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}F(s)$. Atunci $F(s)$ este olomorfă în semiplanul drept $Res > s_0$ (teorema 2.2). Fie $s = \sigma + i\omega$ și pentru $\sigma > s_0$ fixat considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(t) = f(t).\ e^{-\sigma t}$. Deoarece $(\exists)$ $M \geq 0$ astfel încît $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$, rezultă $|g(t)| \leq Me^{(s_0-\sigma)t}$ pentru orice $t \geq 0$ și cum $\int_0^\infty Me^{(s_0-\sigma)t}dt = \frac{M}{\sigma - s_0}$, se obține că $g \in L^1$. În plus,

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}\cdot e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt = \mathscr{F}\{g(t)\}$$

ceea ce arată legătura strînsă existentă între transformata Laplace a lui $f(t)$ și transformata Fourier a lui $g(t)$.

Ca primă consecință a formulei Fourier de inversare, vom stabili **formula Mellin - Fourier** de inversare a transformării Laplace.

COROLAR 1. (Mellin – Fourier). Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **o funcție continuă din clasa** $\mathcal{O}$ **(cu indicele** s_0**) și** $f(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}F(s)$. **Atunci pentru orice** $\sigma > s_0$ **fixat și** $(\forall)\, t \geq 0$, $f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st}ds = \sum \mathrm{Re}z\, F(s)e^{st}$ **unde suma este făcută după singularitățile lui** $F(s)$ **situate în semiplanul** $\mathrm{Re}\, s < \sigma$ (presupuse în număr finit).

DEMONSTRAȚIE. Am văzut că

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt,\ \text{deci}\ g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+i\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Înmulțind cu $e^{\sigma t}$, se obține

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+i\omega)\cdot e^{(\sigma+i\omega)t}d\omega$$

Pe de altă parte, punînd $s = \sigma + i\omega$ (cu $\sigma > s_0$) fixat și observînd că $ds = id\omega$, se obține tocmai formula din enunț (în care integrala se face de-a

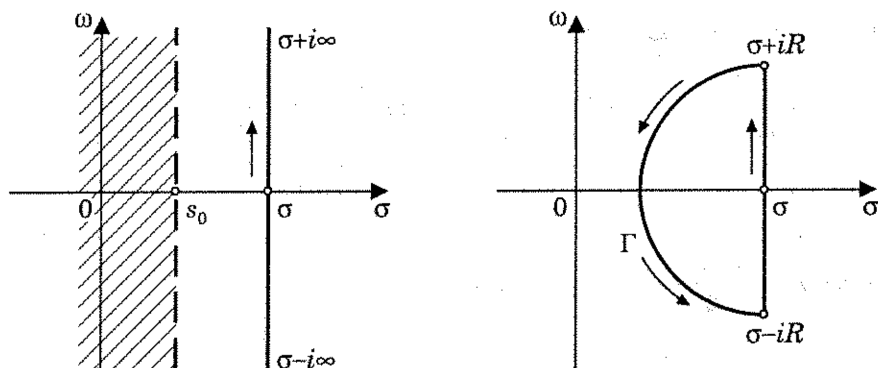


Figura VIII.19.

lungul paralelei prin σ la axa imaginară).

Aplicînd teorema reziduurilor pentru conturul din figură cu $R > 0$ o suficient de mare şi folosind lema Jordan (pentru $R \to \infty$), se obţine şi a doua relaţie din enunţ.

COROLAR 2. Dacă $f, g \in \mathcal{O}$ sînt continue şi dacă $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$, atunci $f = g$.

Demonstraţia corolarului 2 rezultă direct din formula Mellin-Fourier. Teorema 4.4 şi corolarele 1,2 se extind la funcţii continue pe porţiuni, înlocuind $f(t)$ cu $\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]$, pentru orice $t \geq 0$.

OBSERVAŢIE. Merită, nu numai din punct de vedere istoric, să reluăm raţionamentul care l-a condus pe Fourier la consideraţiile anterioare. Se ştie că dacă $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie periodică de perioadă $2l$, continuă pe porţiuni şi cu derivate laterale finite în fiecare punct, atunci notînd

$\underline{f}(t) = \dfrac{f(t-0)+(t+0)}{2}$ are loc formula de reprezentare în serie Fourier.

$$\underline{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi t}{l} + b_k \sin\frac{k\pi t}{l}\right), \ (\forall) t \in \mathbb{R}$$

unde

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x \text{ şi } b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l} \ (k \geq 0)$$

(ceea ce revine la reprezentarea semnalului f ca suprapunerea oscilaţiilor lui armonice de diverse ordine).

Fie acum $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe porţiuni, cu derivate laterale finite în fiecare punct, dar nu neapărat periodică. Fourier a avut ideea de a asimila funcţia f cu una periodică, de perioadă tinzînd la infinit. Iată cum. Să notăm cu f_1 restricţia lui f la un interval $[-l, l)$, prelungită prin periodicitate la întreg $\mathbb{R}$. Atunci putem aplica formula anterioară de reprezentare şi rezultă

$$\underline{f_1}(t) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\right)\cos\frac{k\pi t}{l} + \left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\right)\sin\frac{k\pi t}{l} =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\left[\cos\frac{k\pi x}{l}\cos\frac{k\pi t}{l} + \sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi t}{l}\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi}{l}(t-x)\,\mathrm{d}x$$

Dar $\cos u = \dfrac{e^{iu}+e^{-iu}}{2}$, $(\forall)\, u \in \mathbb{R}$ deci

$$\underline{f_1}(t) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left[e^{i\frac{k\pi(t-x)}{l}} + e^{-i\frac{k\pi}{l}(t-x)}\right]\mathrm{d}x$$

Notăm $\omega = \frac{\pi}{l}$ şi rezultă

$$\underline{f_1}(t) = \frac{1}{2l}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(x)e^{ik\omega(t-x)}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(x)e^{ik\omega(t-x)}\omega\,\mathrm{d}x$$

În fine, notînd $\omega_k = k\omega$, deci $\omega = k\omega - (k-1)\omega = \omega_k - \omega_{k-1}$, formula anterioară devine

$$\underline{f_1}(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(x)e^{i\omega_k(t-x)}\mathrm{d}x(w_k - w_{k-1}).$$

Pînă acum totul este riguros. Fourier a dedus de-aici, făcînd $l \to \infty$, că $\underline{f_1}$ tinde către $\underline{f}$ şi că la limită rezultă formula

$$(7) \qquad \underline{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega(t-x)}\mathrm{d}x, \ \forall\, t \in \mathbb{R}$$

ceea ce se numeşte **formula de reprezentare integrală a lui Fourier**.

Din (7) rezultă

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega,$$

deci tocmai formula de inversare. Dar condiţiile în care are loc formula (7) şi demonstraţia corectă nu sînt uşor de stabilit. Am fost de aceea nevoiţi să adoptăm o altă prezentare a transformării Fourier.

NOTĂ ISTORICĂ. Aşa cum s-a mai întîmplat în istoria ştiinţei, o idee apărută într-un domeniu particular poate deveni un instrument cu largi disponibilităţi de aplicare, pînă la universalizare. J.B. Fourier (1768-1830), întors în 1800 din postul de guvernator civil al Egiptului în timpul lui Napoleon, a început studiul ecuaţiei care descrie difuzia în timp a căldurii; a fost condus la ideea descompunerii soluţiei în armonicele sale, prezentînd-o, după mai multe dificultăţi şi chiar ostilităţi din partea oficialităţilor academice ale vremii în celebra sa carte "Théorie analytique de la chaleur" (1822). Dar metoda sa s-a dovedit extrem de fecundă. Seriile Fourier permit astăzi descompunerea semnalelor în armonicele lor, iar transformata Fourier ("transfurierea") permite o trecere sistematică de la semnale în timp la spectrele lor frecvenţiale şi invers. Se spune, exagerînd puţin, că radiotehnica (respectiv televiziunea, holografia şi tomografia) înseamnă "transfuriere" 1-dimensională (respectiv 2-dimensională, 3-dimensională). După ce Maxwell a stabilit în 1873 ecuaţiile cîmpului electromagnetic, analiza Fourier a devenit esenţială pentru studiul undelor electromagnetice ca şi ale componentelor lor armonice - raze X, lumina vizibilă, microunde, radiounde etc. Posibilitatea descompunerii sunetului în componentele lui armonice permite recunoaşterea vocii umane şi acelaşi lucru este valabil şi în recunoaşterea şi prelucrarea imaginilor.

Calculul transformatelor Fourier se face astăzi prin proceduri speciale ca:

algoritmul TFR (transformarea Fourier rapidă), algoritmul Winograd etc, implementabile pe calculatoarele moderne.

INTERPRETĂRI FIZICE.

Transformata Fourier $F(\omega)=\mathscr{F}\{f(t)\}$ a unui semnal $f(t)$, în condițiile teoremei 4.4. se mai numește **spectrul în frecvență** al semnalului $f(t)$.

Pentru orice frecvență ω (măsurată în Hz), avem

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \in \mathbb{C},$$

deci avem o scriere de forma $F(\omega)=A(\omega)e^{i\Phi(\omega)}$; $A(\omega)=|F(\omega)|$ este o funcție reală numită **amplitudinea în frecvență** a lui $f(t)$ ($A(\omega)$ se măsoară în decibeli), iar $\Phi(\omega)=\arg F(\omega) \bmod 2\pi$ se numește **faza în frecvență** a lui $f(t)$ (măsurată în radiani).

Funcțiile de forma $t\to ae^{i\omega t}$ (respectiv $t\to a\cos\omega t$ sau $t\to a\sin\omega t$; $a>0$, $\omega>0$ constante, se numesc **oscilații armonice** deoarece ele reprezintă mișcarea uniformă în lungul unui cerc și respectiv proiecțiile acestei mișcări pe axe. Toate au frecvența de $\frac{\omega}{2\pi}$ perioade în unitatea de timp, iar numărul real a este tocmai amplitudinea oscilației. Să presupunem că funcția $f(t)$ este o mărime fizică variabilă în timp (pe scurt un semnal). Dacă f are valori complexe, ea măsoară simultan doi parametri, iar dacă ia valori reale (ceea ce vom presupune), f reprezintă un singur parametru fizic. Din formula de inversare $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{it\omega}d\omega$, deoarece integrala este o limită de sume Riemann, putem considera că f este aproximată cu o combinație liniară de oscilații armonice cu amplitudini variabile. Aceasta este o formulare "filozofică" a formulei de inversare (teorema 4.4.). Funcția F este atunci o rezoluție de frecvență a lui f, adică ea listează amplitudinile $F(\omega)$ ale oscilațiilor armonice $e^{i\omega t}$ din care este compusă f. De exemplu, faptul că F se anulează într-un interval înseamnă că oscilațiile armonice corespunzătoare nu apar în f, iar dacă $|F|$ este mare într-un interval și mic în afară, atunci f este dominat de oscilațiile armonice din acel interval.

Analiza dualității timp-frecvență, realizată prin transformarea Fourier, este departe de a fi epuizată. În 1983 matematicianul american Ch. Feferman a publicat un articol intitulat "The uncertainty principle" (Bull. American Math.Soc. vol.9, 129-206), în care dezvoltă aparatul Fourier multidimensional și deduce rezultate profunde de mecanică cuantică, referitor la structura atomică a materiei, legăturile chimice etc.

Schema generală de utilizare a transformării Fourier și a formulei de inversare în practica și teoria comunicațiilor este indicată în figura VIII. 20.

(Prin transmisie apar erori care pot fi minimizate prin tehnici de filtrare, separare de zgomot sau prin tehnologie perfecționată).

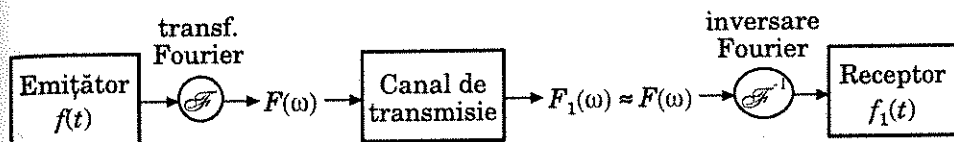


Figura VIII. 20.

4.3. Proprietățile transformării Fourier

După comentariile anterioare pe care le considerăm utile şi stimulatoare, încercăm o sinteză a rezultatelor anterioare, adăugînd unele noi.

1) Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **este o funcție continuă din** L^1, deci $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty$, **atunci transformata ei Fouriei**

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$ **este o funcție continuă şi mărginită.**

Continuitatea a fost deja probată; apoi să observăm că $(\forall)\omega\in\mathbb{R}$,

$$|F(\omega)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\right|\le\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt.$$

Acest rezultat are loc şi în cazul cînd f este continuă pe porțiuni. În plus, reamintim că $\lim_{|\omega|\to\infty}F(\omega)=0$.

EXEMPLU. Fie semnalul dreptunghiular $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(t)=\begin{cases}A & \text{dacă } t\in\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]\\ 0 & \text{în rest}\end{cases}$$

Transformata lui Fourier a lui f este $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$,

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=A\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{-i\omega t}dt=\frac{A}{i\omega}\left(e^{i\omega\frac{T}{2}}-e^{-i\omega\frac{T}{2}}\right)=\frac{2A}{\omega}\sin\left(\omega\frac{T}{2}\right)$$

pentru $\omega\ne 0$ şi $F(0)=AT$. Introducînd funcția de eşantionare ("sinus atenuat")

$$sa:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ sa(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{dacă } x\ne 0\\ 1 & \text{dacă } x=0\end{cases}$$ se observă că $F(\omega)=ATsa(\frac{\omega T}{2})$.

Figura VIII.21 exprimă proprietățile menționate.

Notăm cu $\mathcal{O}_1$ spațiul vectorial real al funcțiilor $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue pe porțiuni şi absolut integrabile şi cu I_1 spațiul funcțiilor continue $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, mărginite, tinzînd către zero spre $\pm\infty$.

2) Transformarea Fourier este un operator $\mathbb{R}$ - liniar

$\mathcal{F}:\mathcal{O}_1\to\mathcal{I}_1$.

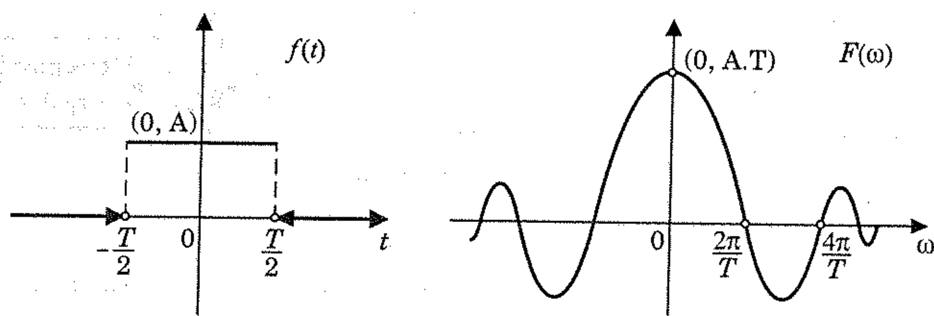


Figura VIII.21.

În plus, dacă $f, f' \in \mathcal{O}_1$, $\lim\limits_{|t|\to\infty} f(t) = 0$ **și** $f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$, **atunci** $\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega)$.

Într-adevăr,

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = f(t)e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

Dar $\lim\limits_{|t|\to\infty} f(t) = 0$ și $|e^{-i\omega t}| = 1$ deci $\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega\mathcal{F}\{f(t)\}$.

Mai general, $\mathcal{F}\{f^{(k)}(t)\} = (i\omega)^k\mathcal{F}\{f(t)\}$, în condiții transparente asupra lui f.

3) **Dacă** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **este o funcție din** $\mathcal{O}^1$, $f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$ **și dacă** λ, τ **sînt constante reale** ($\lambda \neq 0$) **atunci** $f(\lambda t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|\lambda|}\cdot F(\frac{\omega}{\lambda})$ **și** $f(t-\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-i\tau\omega}F(\omega)$, **iar** $f(t)e^{-i\lambda t} \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega+\lambda)$.

Demonstrația este evidentă.

4) **Dacă** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **este o funcție de clasă** C^2 **și dacă** $x^2 f(x)$, $x^2 f'(x)$, $x^2 f''(x)$ **sînt mărginite pe** $\mathbb{R}$, **atunci are loc formula de inversare:**

$$(\forall)t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{it\omega}\mathrm{d}\omega, \quad \textbf{unde } F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}.$$

DEMONSTRAȚIE. Deoarece există $M > 0$ astfel încît $|x^2 f(x)| \leq M$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$ deci f este absolut integrabilă pe $(-\infty, -1]$ și pe $[1, \infty)$, deci și pe $\mathbb{R}$. Apoi integrînd de două ori prin părți se observă că $\omega^2 F(\omega)$ este mărginită deci F este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$ și putem aplica teorema 4.4.

OBSERVAȚIE. Transformarea Fourier există mai general, pentru funcții din L^1 (absolut integrabile), iar formula de inversare are loc în condiții mai largi. Un defect al transformării Fourier ca operator $\mathcal{O}_1 \to \mathcal{I}_1$ este asimetria ei și dificultatea verificării condițiilor de inversare. Acest defect poate fi înlăturat trecînd la spațiul L^2 al funcțiilor de pătrat integrabil. Reamintim că spați-

ul $L^2 = \left\{ f:\mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$ este un spațiu Hilbert relativ la produsul scalar $< f, g > = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt$. Se spune că f este limita în L^2 a unei familii $\{f_\alpha\}$ pentru $\alpha \to \alpha_0$ dacă $\|f_\alpha - f\| \to 0$; se scrie $f = \text{l.i.m.}\, f_\alpha$.

Dacă $f \in L^2$ este fixată, atunci pentru orice $T > 0$ se poate considera "fereastra" f_T a lui f în intervalul $[-T, T]$, adică

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & \text{dacă } t \in [-T, T] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

şi are sens transformata Fourier a lui f_T. Se poate demonstra că există $F(\omega) = \text{l.i.m.} F_{f_T}(\omega)$, că $F \in L^2$ şi că operatorul $\mathscr{F}: L^2 \to L^2$, $f(t) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\omega)$ este un operator $\mathbb{C}$ - liniar şi un izomorfism de spații Hilbert, cu păstrarea produselor scalare; în particular $(\forall) f \in L^2$, $f(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} F(\omega)$, avem $2\pi\|f\|^2 = \|F\|^2$ adică

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega. \tag{8}$$

Semnalele din L^2 se mai numesc **semnale de energie** finită şi dacă $f \in L^2$, numărul pozitiv $\|f\| = (\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt)^{1/2}$ se mai numeşte **energia** semnalului f.

O altă extindere importantă a operatorului Fourier a fost descoperită de Laurent Schwartz. El a introdus clasa $\mathscr{S}$ a funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ care sînt de clasă C^∞ şi pentru care toate produsele $x^j f^{(k)}(x)$ de puteri naturale ale lui x şi derivate ale lui f sînt funcții mărginite [avem evident $\mathscr{D} \subset \mathscr{S} \subset \mathscr{E}$, $\mathscr{S} \subset L^1$ şi $\mathscr{S} \subset L^2$; într-adevăr, dacă $f \in \mathscr{S}$, atunci există $M > 0$ astfel încît $|x^2 f(x)| \le M$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ deci $|f(x)| \le \frac{M}{x^2}$ şi rezultă $f \in L^1$ şi apoi $|x^4 f^2(x)| \le M^2$, deci $|f^2(x)| \le \frac{M^2}{x^4}$ deci $f^2 \in L^1$, adică $f \in L^2$].

Un exemplu tipic de funcție din $\mathscr{S}$ este $f(t) = e^{-t^2}$. Funcțiile din $\mathscr{S}$ se mai numesc **rapid descrescătoare** (spre $-\infty$ şi $+\infty$). Este evident că $\mathscr{S}$ este un spațiu vectorial (complex), că derivatele şi produsele cu polinoame ale unor funcții din $\mathscr{S}$ rămîn în $\mathscr{S}$. O proprietate remarcabilă este următoarea:

5) **Dacă** $f \in \mathscr{S}$ **şi** $f(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} F(\omega)$, **atunci** $F \in \mathscr{S}$.

Într-adevăr, deoarece $t^k f(t)$ este absolut integrabilă pentru orice $k \ge 0$, atunci conform teoremei 4.2., F este de clasă C^∞. În plus,

$F'(\omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-i\omega t} f(t)\, dt$ şi o integrare prin părți arată că

$$i\omega\int_a^b e^{-i\omega t}f(\omega)\,\mathrm{d}t = \int_a^b e^{-i\omega t}f'(t)\,\mathrm{d}t + e^{-i\omega a}f(a) - e^{-i\omega b}f(b).$$

Făcînd $a \to -\infty$, $b \to \infty$, rezultă $i\omega F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}f'(t)\,\mathrm{d}t$, deci $\omega F(\omega)$ este mărginită. Deoarece $tf(t)$ şi $f'(t)$ sînt din clasa $\mathscr{S}$, iterînd raţionamentul, va rezulta că F aparţine clasei $\mathscr{S}$.

6) **Fie** $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **funcţii din clasa** C_c^0 (a funcţiilor continue nule în afara unui interval compact). **Atunci notînd** $F = \mathscr{F}f$, $G = \mathscr{F}g$, **avem**

(9) $$\mathscr{F}\{f*g\} = \mathscr{F}\{f\}\cdot\mathscr{F}\{g\} = F\cdot G;$$

(10) $$(\forall)\, t \in \mathbb{R},\ (f*g)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)e^{it\omega}\mathrm{d}\omega$$

DEMONSTRAŢIE.

$$\mathscr{F}\{f*g\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(t)\, e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\mathrm{d}t\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(t-z)\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{\infty} g(t-z)\, e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \overset{t-z=u}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-i\omega(z+u)}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\, e^{-i\omega z}\,\mathrm{d}z\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, e^{-i\omega u}\,\mathrm{d}u\right) = \mathscr{F}\{f\}(\omega)\cdot\mathscr{F}\{g\}(\omega)$$

pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$. Formula (9) este stabilită. Formula (10) rezultă direct din (9) prin aplicarea formulei de inversare.

În aceleaşi condiţii se poate demonstra şi formula :

(10′) $$\mathscr{F}\{f(t)\cdot g(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - v)\cdot G(v)\,\mathrm{d}v.$$

INTERPRETARE FIZICĂ. Am văzut că funcţia F este o rezoluţie de frecvenţă a lui f, în sensul că ea listează amplitudinile $F(\omega)$ ale oscilaţiilor armonice $e^{i\omega t}$ din care este compus semnalul f. Funcţia g apare ca un filtru de frecvenţă (sau un rezonator). Convoluţia lui f cu g distruge toate frecvenţele din f care nu apar în g. Rezoluţii de frecvenţă sau filtre apar peste tot în natură şi în laboratoare. Ochiul uman realizează o rezoluţie de frecvenţă a luminii (reţinînd doar anumite componente), urechea face acelaşi lucru pentru sunete şi un filtru trece-bandă lasă să treacă undele electromagnetice cu frecvenţe dorite şi absoarbe pe celelalte. Dacă f conţine toate frecvenţele şi g este variabil, atunci formula (10) arată că $f*g$ poate fi oricît de aproape de orice semnal prescris. Acesta este sensul unei teoreme celebre a lui N. Wiener (1894–1964), demonstrate în 1930: dacă $f, h \in L^1$ şi dacă $(\forall)\ \omega \in \mathbb{R}$, $F(\omega) \neq 0$, atunci $(\forall)\ \varepsilon > 0$ există o funcţie g de clasă C^2 nulă în afara unui interval compact astfel încît

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|(f*g)(t) - h(t)\right|\mathrm{d}t < \varepsilon$$

Aceasta a fost începutul teoriei filtrării şi predicţiei, care a cunoscut o dezvoltare extraordinară, mai ales datorită aplicaţiilor militare.

Din relația (10) rezultă pentru $t = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(-z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

Luînd $g(z) = \overline{f(-z)}$, rezultă $G(\omega) = \overline{F(\omega)}$ şi se obține **formula lui Parseval**:

$$2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$$

Dacă $f(t)$ reprezintă intensitatea (la momentul t) a curentului într-un circuit electric, atunci integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$ este energia degajată de circuit dacă rezistența este egală cu 1 ohm. Mărimea $\frac{1}{2\pi}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$ reprezintă energia degajată de armonicele lui $f(t)$, dispuse într-o bandă de frecvență de lățime $\mathrm{d}\omega$ şi conținînd frecvența ω. Funcția $|F(\omega)|^2$ caracterizează repartiția energiei pe frecvențele armonicelor lui $f(t)$ şi de aceea ea se numeşte **caracteristica spectrală energetică** a lui $f(t)$. Relația lui Parseval exprimă o lege de conservare a energiei prin transfuriere.

Dăm acum o altă aplicație.

Să presupunem că f este de clasă C^1, $\lim_{|t|\to\infty} tf(t)^2 = 0$ şi $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t = 1$, deci

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega = 2\pi.$$

Atunci are loc inegalitatea

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega\right) \ge \frac{1}{4}, \tag{11}$$

numită neîntîmplător **relația de incertitudine**. Într-adevăr, să considerăm integrala

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha t f(t) + f'(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

Evident, $(\forall)\,\alpha \in \mathbb{R}$, $I(\alpha) \ge 0$. Pe de altă parte,

$$I(\alpha) = \alpha^2\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)^2\,\mathrm{d}t + 2\alpha\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)f'(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Dar $\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)f'(t)\,\mathrm{d}t = tf(t)^2\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}(tff' + f(t)^2)\,\mathrm{d}t = -1 - \int_{-\infty}^{\infty} tff'\,\mathrm{d}t$, deci $\int_{-\infty}^{\infty} tff'\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}$. Apoi $\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$ (deoarece $f'(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} i\omega F(\omega)$).

În concluzie,

$$I(\alpha) = \alpha^2\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)^2\,\mathrm{d}t + \alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega.$$

şi acest trinom de gradul doi este pozitiv pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ deci discriminantul lui este ≤ 0 şi se obţine (11).

Relaţia (11) are o interpretare interesantă: de îndată ce spectrul în frecvenţă $F(\omega)$ este concentrat (adică devine mic în modul cu excepţia unui interval mic), semnalul în timp are o durată mare. Dealtfel dacă F este mic pentru $|\omega|$, mare, f conţine puţine frecvenţe înalte şi este o funcţie cu valori dispersate. Pentru a concentra f trebuie să crească gama de frecvenţe înalte ale ei.

4.4. Transformarea Fourier al distribuţiilor

Pînă acum am definit transformata Fourier pentru diverse clase de funcţii $(C_c^0, L^1, L^2, \mathscr{S})$ şi implicit am putut vorbi de spectrul în frecvenţă pentru diverse tipuri de semnale. Şi totuşi nu am acoperit toate cerinţele, impunîndu-se o nouă extindere a aparatului transformării Fourier pentru a cuprinde funcţiile constante, polinoamele, treapta unitate, impulsurile etc. Am introdus anterior clasa $\mathscr{S}$ a funcţiilor $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ rapid descrescătoare. Un şir $\{\psi_n\}_{n\geq 1}$ de funcţii din $\mathscr{S}$ se consideră **convergent către zero** (şi se scrie $\psi_n \xrightarrow{\text{în } \mathscr{S}} 0$) dacă pentru orice întregi $j, k \geq 0$ şirul de funcţii $\{x^j \cdot \psi^{(k)}\}_{n\geq 1}$ converge uniform către zero pe $\mathbb{R}$.

DEFINIŢIA 4.2. Se numeşte **distribuţie temperată** orice aplicaţie $\mathbb{C}$ – liniară $f : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ astfel încît ori de cîte ori $\psi_n \xrightarrow{\text{în } \mathscr{S}} 0$, rezultă $\lim_{n\to\infty} f(\psi_n) = 0$. Se notează cu $\mathscr{S}'$ spaţiul tuturor distribuţiilor temperate.

Deoarece $\mathscr{D} \subset \mathscr{S}$ şi este dens în $\mathscr{S}$, rezultă că $\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'$ (distribuţiile temperate fiind exact acele distribuţii din $\mathscr{D}'$ care admit o prelungire continuă de la $\mathscr{D}$ la $\mathscr{S}$.

EXEMPLE. Dăm o listă de distribuţii temperate pentru a dovedi importanţa noţiunii.

1) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ o funcţie continuă pe porţiuni astfel încît să existe $M > 0$, $n \geq 0$ cu proprietatea că $|f(t)| \leq M(1+|t|)^n$ pentru orice t suficient de mare (o astfel de funcţie se mai numeşte **temperată**). Apoi, pentru orice $\psi \in \mathscr{S}$ există $M_1 > 0$ astfel încît $|\psi(t)| \leq M_1(1+|t|)^{-n-2}$ pentru orice $|t|$ suficient de mare.

Rezultă atunci că $f \cdot \psi \in L^1$ şi are sens funcţionala $\underline{f} : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$, definită prin $\underline{f}(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \psi(t) dt$ care determină o distribuţie din $\mathscr{S}'$; deoarece asocierea $f \to \underline{f}$ este injectivă, funcţia f se identifică cu distribuţia temperată $\underline{f}$. În particular, constantele, polinoamele, funcţiile continue mărginite, treapta unitate, sgn, funcţiile-spline etc. pot fi considerate ca aparţinînd lui $\mathscr{S}'$. Am arătat totodată că $L^1 \subset \mathscr{S}'$. Deoarece $\mathscr{S} \subset L^1$ rezultă $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}'$. Se poate arăta deasemenea că $L^2 \subset \mathscr{S}'$. Totuşi $L^1_{loc} \not\subset \mathscr{S}'$ (căci funcţia $f(t) = e^t$ este continuă deci local integrabilă dar distribuţia $\underline{f}$ nu este temperată).

2) Distribuțiile cu suport compact sînt temperate adică $\mathscr{E}' \subset \mathscr{S}'$; într-adevăr, pentru orice $f \in \mathscr{E}'$, $f: \mathscr{E} \to \mathbb{C}$, restricția $f|_{\mathscr{S}}$ a lui f la $\mathscr{S}$ este funcțională liniară și continuă prin șiruri (dacă $\psi_n \xrightarrow{\text{în } \mathscr{S}} 0$ atunci $\psi_n \xrightarrow{\text{în } \mathscr{E}} 0$); în plus asocierea $f \to f|_{\mathscr{S}}$ este injectivă deoarece spațiul $\mathscr{S}$ este dens în $\mathscr{E}$.

Această injectivitate arată în ce sens este considerată incluziunea $\mathscr{E}' \subset \mathscr{S}'$.

În particular δ, δ', δ'', etc. avînd suport compact (redus la origine), ele vor fi temperate.

Se poate arăta că derivatele unei distribuții temperate sînt temperate.

Deoarece funcția

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(t) = \begin{cases} t \ln|t| - t & \text{dacă } t \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } t = 0 \end{cases}$$

este temperată, rezultă că $\underline{h} \in \mathscr{S}'$ deci $VP(\frac{1}{t}) = \underline{h}'' \in \mathscr{S}'$.

DEFINIȚIA 4.3. Se numește **semnal** (deterministic) orice element din $\mathscr{S}'$.

Așadar, funcțiile din L^1, L^2, $\mathscr{S}$, $\mathscr{D}$, polinoamele, funcțiile continue pe porțiuni și temperate, δ, δ', etc. sînt semnale în sensul definiției anterioare.

Spațiul $\mathscr{S}'$ are multe proprietăți bune, dar cea mai importantă disponibilitate o constituie faptul că orice distribuție $f \in \mathscr{S}'$ are o **transformată Fourier,** anume distribuția $F_f : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$, definită prin

$$(1) \qquad F_f(\psi) = f(F\{\psi\}),\ (\forall)\psi \in \mathscr{S}$$

(pentru orice funcție $\psi \in \mathscr{S}$ știm că funcția $F\{\psi\}$ aparține lui $\mathscr{S}$, cf. proprietății 5) de la punctul 4.3.; așadar, membrul secund al formulei (1) are sens bine determinat). Se poate arăta că dacă $f \in L^1$ sau $f \in L^2$ (deci $f \in \mathscr{S}'$), atunci distribuția F_f se identifică cu distribuția asociată transformatei Fourier uzuale a lui f, ceea ce este un rezultat liniștitor (arătînd că extinderea transformării Fourier este compatibilă cu rezultatele de pînă acum). De asemenea, se poate arăta că dacă $f \in \mathscr{S}'$ are suport compact, atunci F_f este o distribuție regulată.

Dacă $L : v(t) \to x(t)$ este un sistem liniar (ca operator între două spații de funcții sau distribuții), atunci cîtul $\Phi(\omega) = \dfrac{\mathscr{F}\{x(t)\}}{\mathscr{F}\{v(t)\}}$ între transformatele Fourier ale ieșirii și intrării se numește **funcția de transfer în frecvență** a sistemului L.

EXEMPLE. 1) Determinăm transformata Fourier a distribuției δ. Conform (1), avem

$$F_\delta(\psi) = \delta(\mathscr{F}\{\psi\}) = \mathscr{F}\{\psi\}(\omega)\Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-i\omega t}\, dt \Bigg|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, dt = \underline{1}(\psi)$$

pentru orice $\psi \in \mathscr{S}$. Deci $F_\delta = \underline{1}$.

În mod similar $F_{\delta^{(k)}} = \underline{(i\omega)^k}$, $(\forall)\, k \geq 1$.

2) Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este o funcție temperată, atunci

$u(r-|t|)\cdot f(t) \xrightarrow{\text{în } \mathscr{S}'} f(t)$ pentru $r \to \infty$. Deci $F_f(\omega) = \lim\limits_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$

(limita făcîndu-se în $\mathscr{S}'$). În particular, dacă $f(t) = e^{ikt}$ ($k \in \mathbb{R}$ constant), atunci

$$\int_{-r}^{r} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \frac{2\sin r(\omega-k)}{\omega-k}\quad .$$

Dar $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{2\sin r(\omega-k)}{\omega-k} = 2\pi\delta(\omega-k)$ deoarece

$(\forall)\psi \in \mathscr{S},\ \lim\limits_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\frac{\sin rt}{t}\psi(t)\,dt = \pi\psi(0)$. Așadar, $F_f(\omega) = 2\pi\delta(\omega-k)$. Pentru $k=0$ se obține $\underline{F_1} = 2\pi\delta$.

Fără a intra în detalii, dăm o listă de proprietăți :

a) Dacă $f \in \mathscr{S}'$, atunci $F_f \in \mathscr{S}'$ și operatorul Fourier $F : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$, $f \to F_f$ este un izomorfism $\mathbb{C}$ – liniar; inversul F^{-1} asociază oricărei distribuții $g \in \mathscr{S}'$ distribuția $F_{g^{-1}}$ definită prin $F_g^{-1}(\psi) = \frac{1}{2\pi}g(F\{\breve{\psi}\})$, pentru orice $\psi \in \mathscr{S}$ (se notează $\breve{\psi}(t) = \psi(-t)$).

b) Pentru orice $f \in \mathscr{S}'$, notînd $g = F_f$, avem $F_g = 2\pi\breve{f}$ ($\breve{f}$ este distribuția $f(-t)$, deci $\breve{f}(\psi) = f(\breve{\psi})$ pentru orice $\psi \in \mathscr{S}$).

c) Pentru orice $f \in \mathscr{S}'$ și $(\forall)\ n \geq 0$, $F_f^{(n)} = \underline{F_{(-it)^n f}}$ și $F_{f^{(n)}} = \underline{(i\omega)^n F_f}$

d) Pentru orice $f \in \mathscr{S}'$, $t_0, k \in \mathbb{R}$, $F_{f(t-t_0)} = e^{-it_0\omega}F_f$ și $F_f(\omega+k) = F_{e^{-ikt}f}$.

e) Dacă $f, g \in \mathscr{S}'$, cel puțin una avînd suport compact, atunci $F_{f*g} = F_f \cdot F_g$.

Indicăm acum o listă de transformate Fourier:

$f(t)$	$F(\omega)$
$u(t+T)-u(t-T),\ T>0$	$2T\cdot sa(\omega T)$
$\frac{k}{\pi}sa(kt),\ k>0$	$u(\omega+k)-u(\omega-k)$
$e^{-k\|t\|},\ k>0$	$\frac{2k}{\omega^2+k^2}$
$\frac{1}{t^2+T^2},\ T>0$	$\frac{\pi}{T}e^{-T\|\omega\|}$
$e^{-kt}\cdot u(t),\ k>0$	$\frac{k-i\omega}{\omega^2+k^2}$
$\frac{1}{2}\cdot\frac{t+iT}{t^2+T^2},\ T>0$	$e^{-T\omega}\cdot u(\omega)$
$e^{-\alpha^2t^2},\ \alpha>0$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}$

$\delta(t)$	$\underline{1}$
$\underline{1}$	$2\pi\delta$
$\cos kt,\ k\in\mathbb{R}$	$\pi[\delta(\omega+k)+\delta(\omega-k)]$
$\sin kt,\ k\in\mathbb{R}$	$\pi i[\delta(\omega+k)-\delta(\omega-k)]$
$e^{ikt}, k\in\mathbb{R}$	$2\pi\delta(\omega-k)$
u	$\pi\delta(\omega)-iVP(\frac{1}{\omega})$
$\breve{u}$	$\pi\delta(\omega)+iVP(\frac{1}{\omega})$
$\mathrm{sgn}=u-\breve{u}$	$-2iVP(\frac{1}{\omega})$
$VP(\frac{1}{t})$	$-\pi i\ \underline{\mathrm{sgn}}(\omega)$
$\delta^{(k)},\ k\geq 0$	$(i\omega)^k$
$\delta(t-T),\ T\in\mathbb{R}$	$e^{-iT\omega}$
$t^k,\ k\geq 1$	$\frac{2\pi}{(-i)^k}\delta^{(k)}$

Remarcăm de asemenea că succesiunea periodică de delte $\Delta=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(t-nT),\ T>0$ are transformata Fourier

$$F_\Delta=\sum_{n\in\mathbb{Z}}F_{\delta(t-nT)}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-inT\omega}F_\delta=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-inT\omega}=\frac{2\pi}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(\omega-\frac{2\pi n}{T}).$$

4.5. Aplicaţii ale transformării Fourier

1) TEOREMA de eşantionare (WKS)

Rezultatul demonstrat aici este fundamental în teoria semnalelor, deoarece el arată în ce condiţii un semnal continual este determinat prin cunoaşterea doar a unui număr discret de valori (eşantioane) ale sale. În forma pur matematică teorema de eşantionare WKS a fost obţinută de matematicianul englez Whittacker în 1915, regăsită de inginerul rus Kotelnikov în 1933 şi pusă în valoare, aplicată sistematic în tehnologia comunicaţiilor, de inginerul american Cl. Shannon după 1948.

Pentru orice $a>0$ notăm $T_a=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f\in L^2$ şi $f(t)=0$ pentru $|t|\geq a\}$; un semnal din T_a se mai numeşte de **durată finită**, concentrat pe intervalul $[-a,a]$. De asemenea, pentru orice $b>0$ notăm $F_b=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f\in L^2$ şi $\mathscr{F}\{f\}(\omega)=0$ pentru $|\omega|\geq b\}$. Un semnal $f\in F_b$ se mai numeşte cu **bandă mărginită de frecvenţă**, de lăţime $2b$.

TEOREMA 4.5. (WKS). Presupunem că $f \in F_b$ **cu** $b>0$ **este continuă şi fie** $T=\frac{\pi}{b}$ (pasul de eşantionare). **Atunci pentru orice** $t \in \mathbb{R}$ **are loc formula :**

$$(*)\qquad f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)sa(b(t-nT)).$$

DEMONSTRAȚIE. Considerăm transformata Fourier $F(\omega)=\mathscr{F}\{f(t)\}$, restrânsă la $[b,b]$ şi apoi prelungită la $\mathbb{R}$. Avem $F(\omega)=\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{\frac{im\pi\omega}{b}}$ pentru $|\omega|<b$, unde $c_m=\frac{1}{2b}\int_{-b}^{b} F(\omega)e^{\frac{-im\pi\omega}{b}}d\omega$. Dar $F(\omega)=0$ pentru $|\omega|\geq b$ deci $c_m=\frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-\frac{im\pi\omega}{b}}d\omega=\frac{\pi}{b}f(-\frac{m\pi}{b})$, conform teoremei 4.4. Atunci

$$F(\omega)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{\pi}{b}f(-\frac{m\pi}{b})e^{\frac{im\pi\omega}{b}}=T\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)e^{-iTn\omega}\qquad (m=-n).$$

Aplicînd încă odată formula de inversare Fourier, rezultă

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b}F(\omega)e^{it\omega}d\omega=\frac{T}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\int_{-b}^{b}e^{it\omega}e^{-iTn\omega}d\omega=$$

$$=\frac{T}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)2bsa(b(t-nT))\quad ,$$

ultima relație decurgînd din relația $\int_{-\alpha}^{\alpha}e^{it\omega}d\omega=2\alpha sa(t\alpha)$ valabilă pentru orice $\alpha>0$.

OBSERVAȚIE. Dăm o demonstrație, în condiții mai generale, folosind distribuțiile. Pentru a verifica relația (*) este suficient să arătăm că transformatele Fourier sînt aceleaşi (aplicînd teorema 4.4.) Avem deci de arătat că

$$F(\omega)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\cdot\mathscr{F}\{sab(t-nT)\},$$

unde

$$sa(bt)*(\delta(t-nT)=sab(t-nT).$$

Dar $\mathscr{F}\{sa(bt)\}=T[u(t+b)-u(t-b)]$ şi $\mathscr{F}\{\delta(t-nT)\}=e^{-inT\omega}$; ca atare trebuie dovedit că $F(\omega)=T\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\cdot[u(\omega+b)-u(\omega-b)]\cdot e^{-inT\omega}$.

Pe de altă parte, avem $F(\omega)=[u(\omega+b)-u(\omega-b)]\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(\omega-2nb)$ [căci pentru $|\omega|\geq b$ relația devine $0=0$, iar pentru $|\omega|<b$ există un singur număr $n\in\mathbb{Z}$ astfel încît $-b<\omega-2nb<b$, anume $n=0$ şi relația devine $F(\omega)=1.F(\omega)$]. Comparînd ultimele două relații, rămîne de arătat că $\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(\omega-2nb)=T\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)e^{-inT\omega}$. Pentru aceasta, observăm că

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(\omega - 2bn) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F*\delta(\omega - 2nb) =$$

$$= F* \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - 2nb) = F*\frac{1}{2b}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-in\omega\frac{\pi}{b}}$$

conform formulei din finalul punctului 3.3.; aşadar,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(\omega - 2nb) = \frac{1}{2b}\mathscr{F}\{f\}(\omega)*\mathscr{F}\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - \frac{n\pi}{b})\} =$$

$$= \frac{2\pi}{2b}\mathscr{F}\{f(t)\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - \frac{n\pi}{b})\} = T\cdot\mathscr{F}\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t)\delta(t - nT)\} =$$

$$= T\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)\mathscr{F}\{\delta(t - nT)\} = T\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT)e^{-inT\omega}$$

EXEMPLU. Să considerăm semnalul $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t) = e^{-t}u(t)$. Transformata lui Fourier este $F(\omega) = \dfrac{1}{1+\omega^2}$. Presupunem că $b = 2000\ \text{Hz} = 2\cdot(\text{ms})^{-1}$ (practic $F(\omega)$ este nul pentru $|\omega| \geq b$). Luăm $T = \dfrac{\pi}{b} = \dfrac{\pi}{2}$ ms. Putem apoi presupune că f este concentrat în intervalul [0, 40]. Alegem momentele de eşantionare nT astfel încît $0 < nT < 40$, adică $0 < n\dfrac{\pi}{2} < 40$, de unde $1 \leq n < \dfrac{80}{\pi} = 25{,}48$.

Semnalul $f(t)$ este bine determinat prin cele 25 de eşantioane $f(n\dfrac{\pi}{2}) = e^{-\frac{n\pi}{2}}$, $1 \leq n \leq 25$, deoarece aplicăm formula

(*) $$f(t) \simeq \sum_{n=1}^{25} f(\frac{n\pi}{2})sa(2t - n\pi).$$

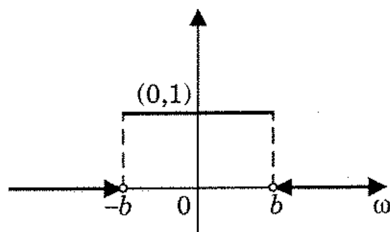


Figura VIII.22.

INTERPRETARE FIZICĂ. Să presupunem că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este un semnal cu banda mărginită $(-b, b)$ de frecvență, în condițiile teoremei WKS. [Dacă semnalul f nu ar fi cu banda mărginită de frecvență, el poate fi trecut printr-un filtru ideal trece-jos avînd funcția de transfer Φ reală de forma indicată în fig. VIII.22, care va lăsa să treacă frecvențele $\omega\in(-b, b)$ şi rejectează celelalte frecvențe. Atunci alegînd $b > 0$ convenabil încît amplitudinea spectrului lui f să fie "mică" în afara intervalului $(-b, b)$, semnalul f poate fi aproximat cu semnalul

$\mathscr{F}^{-1}\{\Phi\}*f = \dfrac{\sin bt}{\pi t}*f = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin b(t-\tau)}{\pi(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau$ şi aplicăm acestuia teorema WKS]. Calculăm apoi $T = \dfrac{\pi}{b}$ şi valorile lui f în punctele echidistante (la intervale de T secunde). Atunci f este bine determinat de valorile $f(nT)$. În practică, relația (*) din teorema 4.5. se aplică însumînd în dreapta un număr

finit de termeni, pentru $-N \le n \le N$, cu N ales convenabil, în funcție de gradul de precizie urmărit. Teorema WKS a fost obiectul multor considerații teoretice şi experimente practice, fiind un rezultat fundamental, "matematico-tehnologic".

2) **Algoritmul Youla de restaurare a imaginilor**

Fie H un spațiu Hilbert real. Reamintim că pentru orice subspațiu vectorial închis $P \subset H$ are loc descompunerea $H = P \oplus P^{\perp}$ deci $(\forall) f \in H (\exists!) g \in P,\ h \in P^{\perp}$ astfel ca $f = g + h$ Aplicațiile $p : H \to H,\ f \to g$ şi $q : H \to H,\ f \to h$ sînt proiectori ($p^2 = p,\ q^2 = q,\ p + q = 1_H$, p şi q sînt autoadjuncți şi au norma 1);

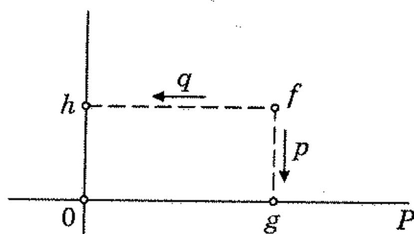


Figura VIII.23

Dacă $x, y,$ sînt vectori nenuli din H, se defineşte unghiul $\theta_{x,y} = (\widehat{x, y})$ ca fiind acel unic număr $0 \le \theta_{x,y} \le \frac{\pi}{2}$ astfel încît $\cos\theta_{x,y} = \frac{|<x,y>|}{\|x\| \cdot \|y\|}$. Dacă U, V sînt subspații închise ale lui H se defineşte unghiul lor $\theta = (\widehat{U, V})$ ca fiind

$$\theta = \inf_{\substack{x \in U \\ y \in V}} \theta_{x,y}.$$

O problemă interesantă şi importantă este următoarea, pusă de D. Youla în articolul "Generalized Image Restoration", IEEE Trans., sept. 1978;

Presupunem fixat un subspațiu închis $P_b \subset H$ şi că un element $f \in H$ aparține lui P_b. De asemenea presupunem cunoscută proiecția $g = p_a f$ a lui f pe un subspațiu închis $P_a \subset H$;

Cum poate fi recuperat (sau restaurat) f?

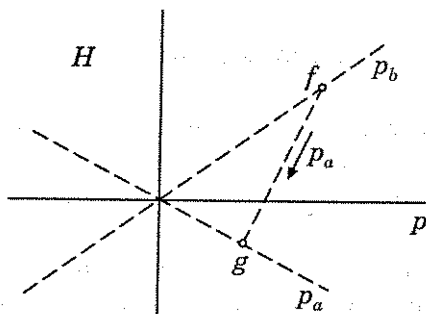


Figura VIII.24

Să observăm că din ipoteza că $f \in P_b$ rezultă $f = p_b f$ deci $g = p_a f = p_a p_b f = (1 - q_a) p_b f = p_b f - q_a p_b f = f - q_a b_b f$. Considerînd operatorul $A = 1_H - q_a p_b$, se obține un operator liniar şi mărginit $A : D_A \to H$, ($D_A \subset H$) cu proprietatea că $Af = g$. Bineînțeles, f este unic determinat de g dacă există A^{-1} şi în acest caz $f = A^{-1} g$. Dacă operatorul liniar $A^{-1} : \operatorname{Im} A \to H$ există şi este mărginit, se spune că problema recuperării lui f este **corect pusă**.

Fiind dat g, relația $Af = g$ privită ca ecuație sugerează considerarea următoarei scheme de recurență :

$$f_{k+1} = g + q_a p_b f_k,\ k \geq 1$$
$$f_1 = g.$$

Un rezultat interesant de analiză în spații Hilbert este următoarea

TEOREMĂ. (D. Youla). **Fie P_a, P_b subspații închise ale unui spațiu Hilbert și $f \in P_b$. Atunci :**

a) **elementul f este unic determinat de proiecția lui $g = P_a f$ dacă și numai dacă $P_b \cap P_a^{\perp} = 0$;**

b) **Problema recuperării lui f este corect pusă dacă și numai dacă $(\widehat{P_b, P_a^{\perp}}) \neq 0$.**

c) **În cazul cînd sînt îndeplinite condițiile** a) **și** b) **un algoritm de determinare a lui f este următorul :**

$$f_{k+1} = g + q_a p_b f_k,\ k \geq 1$$
$$f_1 = g$$

Anume $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ (în sensul că $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\| = 0$) **și** $f \simeq f_N$ **pentru** $N \geq 1$ **suficient de mare.**

Demonstrația poate fi găsită în articolul citat.

Considerăm cazul particular $H = L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\}$ cu produsul scalar $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \overline{g(t)} \, dt$. Pentru orice funcție $f(t)$ din acest H vom nota cu $F(\omega)$ transformata Fourier.

Pentru orice $a > 0$ considerăm

$$P_a = \{ f(t) \in H \mid f = 0 \text{ pentru } |t| > a \}$$

și pentru orice $b > 0$, fie $P_b = \{ f(t) \in H \mid F(\omega) = 0 \text{ pentru } |\omega| > b \}$.

Așadar, P_a este subspațiul semnalelor de durată finită, care sînt semnificative pe intervalul $[-a, a]$, iar P_b este subspațiul semnalelor cu banda de frecvență în intervalul $[-b, b]$. Se verifică ușor că P_a, P_b sînt subspații închise ale lui H și că ortogonalele lor sînt respectiv

$P_a^{\perp} = \{ f \in H \mid f(t) = 0 \text{ pentru } |t| \leq a \}$ și $P_b^{\perp} = \{ f \in H \mid F(\omega) = 0 \text{ pentru } |\omega| \leq b \}$.

Să notăm

$$g_a(t) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } |t| \leq a \\ 0 & \text{dacă } |t| > a \end{cases}$$

Dacă $F(\omega) = \mathscr{F}\{f(t)\}$, atunci evident $p_a f = g_a(t) \cdot f(t)$ și $\mathscr{F}\{p_b f\} = g_b(\omega).F(\omega)$.

În mod explicit, rezultă

$$p_b f = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^{b} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{\sin b(t-u)}{\pi(t-u)} du.$$

Pe acest exemplu problema restaurării se formulează astfel :

Să presupunem că $f(t) \in P_b$ şi că semnalul presupus continuu $f(t)$ ne este accesibil doar pe intervalul de timp $-a \le t \le a$ (deci se cunoaşte $g = p_a f = f(t).g_a(t)$). Se pune problema restaurării lui $f(t)$ pentru $|t| > a$.

Sîntem tocmai în condiţiile aplicării teoremei anterioare. Condiţia $P_b \cap P_a^{\perp} = \{0\}$ este asigurată (Orice funcţie $f \in P_b \cap P_a^{\perp}$ se prelungeşte la o funcţie olomorfă în întreg planul complex şi deoarece f este nulă pe intervalul $[-a, a]$, conform principiului prelungirii analitice rezultă $f = 0$).

Conform teoremei, punctul c) se obţine următorul **algoritm de restaurare** :

Etapa I. Este dat un semnal $f(t)$ cu banda de frecvenţă $[-b, b]$ şi se presupune cunoscută $f_1(t) = f(t).g_a(t)$, deci restricţia lui f la intervalul $[-a, a]$.

Se va aplica schema de recurenţă $f_{k+1} = f_1 + q_a p_b f_k$ pentru $k = 1, 2, 3, ...$

Etapa a II-a. Pentru $k \ge 1$ se limitează în bandă $f_k(t)$ pînă la intervalul $|\omega| \le b$ (folosind un filtru trece jos) şi se corectează funcţia de undă rezultantă pentru $|t| \le a$ pentru a fi compatibilă cu $f_1(t)$. Se cheamă funcţia $f_{k+1}(t)$ şi se repetă etapa a II-a.

Etapa a III-a. Funcţia $f(t)$ pe întreg intervalul $(-\infty, \infty)$ se aproximează prin $f_N(t)$ cu $N \gg 1$ convenabil.

În acest mod, dintr-o informaţie mai restrînsă asupra semnalului $f(t)$, accesibilă prin măsurători, se restaurează (cu aproximaţie) întreg semnalul.

3) **Funcţii caracteristice şi teorema limită centrală.**

Un instrument util în studiul variabilelor aleatoare îl constituie noţiunea de funcţie caracteristică.

DEFINIŢIA 4.4. Fie $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare pe un cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$, având densitatea de probabilitate $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, presupusă din L^1 (VI,§2). **Funcţia caracteristică** $\Phi_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a lui ξ este transformata Fourier a lui p deci $\Phi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-itx} \, dx, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Dăm o listă de proprietăţi ale funcţiilor caracteristice, scriind Φ în loc de Φ_ξ.

1) $\Phi(0) = 1$ şi $|\Phi(t)| \le 1$ **pentru orice** $t \in \mathbb{R}$.

Într-adevăr, $\Phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \, dx = 1$ şi $|\Phi(t)| \le \int_{-\infty}^{\infty} p(x) |e^{-itx}| \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \, dx = 1$.

2) $\Phi(-t) = \overline{\Phi(t)}, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Aceasta rezultă din faptul că $\overline{e^{-itx}} = \overline{\cos tx - i \sin tx} = \cos tx + i \sin tx = e^{itx}$.

3) Φ **este continuă pe** $\mathbb{R}$ şi $\lim_{|t| \to \infty} \Phi(t) = 0$.

Aceasta rezultă din proprietăţile transformării Fourier.

4) **Dacă în plus** p **este continuă pe** $\mathbb{R}$, atunci

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(t)e^{itx}\mathrm{d}t.$$

Aceasta rezultă din teorema de inversare a transformării Fourier (teor. 4.4.).

Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ este o funcție continuă, atunci $M(f\circ\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)\,\mathrm{d}x$; luînd $f(x) = e^{-itx} = \cos tx + i\sin tx$ (t fiind un parametru real), rezultă $f\circ\xi = e^{-it\xi}$ şi ca atare am demonstrat că

5) $Me^{-it\xi} = \Phi(t)$ **pentru orice** $t \in \mathbb{R}$.

6) **Fie** a, b **constante reale şi** $\eta = a\xi + b$. **Atunci**

$$\Phi_\eta(t) = e^{-ibt}\Phi_\xi(at),\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Într-adevăr, $\Phi_\eta(t) \overset{\text{cf. 5)}}{=} Me^{-it\eta} = M^{-it(a\xi+b)} = e^{-itb}\cdot Me^{-iat\xi} = e^{-ibt}\Phi(at)$.

7) **Dacă** ξ, η **sînt variabile aleatoare independente** (pe acelaşi cîmp de probabilitate), **atunci** $\Phi_{\xi+\eta} = \Phi_\xi\cdot\Phi_\eta$ **şi** $p_{\xi+\eta} = p_\xi * p_\eta$.

Avem

$$\Phi_{\xi+\eta}(t) \overset{cf\ 5)}{=} Me^{-it(\xi+\eta)} = M(e^{-it\xi}\cdot e^{-it\eta}) = M(e^{-it\xi})\cdot M(e^{-it\eta}) = \Phi_\xi(t)\cdot\Phi_\eta(t)),$$

deoarece $e^{-it\xi}, e^{-it\eta}$ sînt de asemenea independente. Relația $p_{\xi+\eta} = p_\xi * p_\eta$ rezultă observînd că transformatele Fourier ale celor doi membrii coincid.

8) **Dacă** ξ **are momente** $\gamma_1, \ldots \gamma_n$ **pînă la ordinul** n **inclusiv, atunci**

$$\gamma_k = i^k\Phi_\xi^{(k)}(0),\ \textbf{pentru}\ 1\le k\le n.$$

Într-adevăr, deoarece $\Phi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{-itx}\,\mathrm{d}x$ atunci

$\Phi_\xi^k(t) = (-i)^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x)e^{-itx}\,\mathrm{d}x$ şi făcînd

$$t = 0,\ \Phi_\xi^{(k)}(0) = (-i)^k\int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x)\,\mathrm{d}x = (-i)^k\cdot\gamma_k.$$

9) **Dacă se cunoaşte funcția caracteristică** Φ_ξ, **atunci se cunoaşte şi funcția de rapartiție a lui** ξ.

Într-adevăr, se determină $p(x)$ pentru $x \in \mathbb{R}$ aplicînd 4); apoi

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t.$$

Se poate arăta de asemenea că dacă Φ_n sînt funcțiile caracteristice ale variabilelor aleatoare ξ_n, $n\ge 1$ iar Φ este funcția caracteristică a lui ξ şi dacă $\Phi_n \overset{\text{PC}}{\to} \Phi$ [adică $\forall t\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty}\Phi_n(t) = \Phi(t)$], atunci $\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\xi(x)$ în orice punct x unde F_ξ este continuă.

EXEMPLE. 1) Fie $\xi \in N(0, 1)$. În acest caz,

$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ și $\Phi_\xi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}\{e^{\frac{-x^2}{2}}\}$. Conform cor. teor. 4.1. pentru

$\alpha=\frac{1}{2}$, rezultă $\Phi_\xi(t)=e^{-t^2/2}$.

Dacă $\xi \in \mathrm{N}(m,\sigma)$, atunci luînd $\eta=\frac{1}{\sigma}(\xi-m)$ rezultă $\eta\in \mathrm{N}(0,1)$ deci $\Phi_\eta(t)=e^{-t^2/2}$. Dar $\xi = m + \sigma\eta$ și aplicînd proprietatea 6, rezultă

$$\Phi_\xi(t)=e^{-imt}\,e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

Din proprietatea 8) se pot calcula diversele momente ale lui ξ, cu ajutorul derivatelor lui Φ_ξ.

2) Din estimarea $e^{-itx}=1-itx-\frac{1}{2}t^2x^2(1+g(tx))$ cu g funcție mărginită și $\lim\limits_{u\to 0} g(u)=0$, rezultă că

$$\Phi_\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\left[1-itx-\frac{1}{2}t^2x^2(1+g(tx))\right]\mathrm{d}x$$

Dacă $\xi \in L^2(\Omega, P)$, are media nulă, atunci rezultă estimarea :

$$(*)\qquad \Phi(t)=1-\frac{t^2}{2}D\xi(1+h(t))\quad ,\text{ unde } \lim_{t\to 0}h(t)=0$$

Fie acum un șir $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ de variabile aleatoare independente și $\eta_n=\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}$. Atunci $M\eta_n=\frac{1}{n}(M\xi_1+\ldots+M\xi_n)$ și $D\eta_n=\frac{1}{n^2}(D\xi_1+\ldots+D\xi_n)$.

Dacă dispersiile $D\xi_n$, $n \geq 1$ sînt mărginite de aceeași constantă $A > 0$, atunci $0\leq D\eta_n\leq\frac{A}{n}$. Conform inegalității lui Cebîșev, rezultă $P(|\eta_n-M\eta_n|<\frac{1}{t})\geq 1-\frac{t^2A}{n}$. Luînd $t = n^{\frac{1-\varepsilon}{2}}$ cu $\varepsilon > 0$ și făcînd $n\to\infty$, deducem

TEOREMA 4.6. (legea numerelor mari): Dacă $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \ldots$ sînt variabile aleatoare independente din $L^2(\Omega, P)$, cu dispersiile egal mărginite, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty}P\left(|\xi_1+\ldots+\xi_n-M(\xi_1+\ldots+\xi_n)|<n^{\frac{1+\varepsilon}{2}}\right)=1.$$

APLICAȚIE. Reluăm exemplul experiențelor Bernoulli repetate de n ori, cu probabilitatea de succes p. Un eveniment elementar este un șir de n biți $\omega=(a_1, a_2, \ldots a_n)$ cu $a_i = 0$ sau 1 ($a_i\in\mathbb{B}$). Atunci numărul de succese (adică de componente egale cu 1) este $s(\omega)$ și am văzut în VI, §2, că s este o variabilă aleatoare pe cîmpul discret $(\mathbb{B}^n, P)$, repartizată binomial cu parametrul p. Să considerăm acum șirul de variabile aleatoare $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$ unde

$$\xi_k(\omega)=\begin{cases}1 & \text{dacă în } \omega \text{ componenta de ordin } k \text{ este } 1\\ 0 & \text{în rest}\end{cases}, \quad k\geq 1.$$

Evident $s=\xi_1+...+\xi_n$. Deoarece $M(\xi_k)=p$ şi $D(\xi_k)=p-p^2$ (independent de k), teorema 4.6. se poate aplica şi arată că pentru $n\to\infty$ $\lim_{n\to\infty} P(|s-np|\geq n^{\frac{1+\varepsilon}{2}})=0$ oricare ar fi $\varepsilon>0$; făcînd $\varepsilon\to 0$ pe măsură ce n creşte (repetările experienţei Bernoulli sînt mai numeroase), **este din ce în ce mai puţin probabil ca numărul s de succese să difere de np cu mai mult de $\sqrt{n}$.**

În exemplul anterior, toate variabilele ξ_k au avut aceeaşi lege de repartiţie. Rămînem în aceleaşi condiţii şi considerăm variabilele aleatoare independente, la fel repartizate şi fie D dispersia lor comună. Atunci variabilele aleatoare

$$\eta_n=\frac{1}{\sqrt{Dn}}(\xi_1+...+\xi_n-M(\xi_1+...+\xi_n))$$

vor avea media 0 şi dispersia 1 deci ele nu pot tinde către zero. Să notăm totuşi ce se întîmplă pentru $n\to\infty$. Fie $\theta_k=\frac{\xi_k-M\xi_k}{\sqrt{D}}$ deci $M\theta_k=0$, $D\theta_k=1$.

Atunci $\eta_n=\frac{\theta_1+...+\theta_n}{\sqrt{n}}$; trecînd la funcţii caracteristice,

$$\Phi_{\eta_n}(t)=\Phi_{\theta_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)...\Phi_{\theta_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right).$$

Aplicînd estimarea (*) precedînd teorema 4.6., rezultă

$$\Phi_{\eta_n}(t)=\left[1-\frac{t^2}{2n}(1+h_1(t))\right]...\left[1-\frac{t^2}{2n}(1+h_n(t))\right]$$

cu $\lim_{t\to\infty} h_1(t)=0,...,\lim_{t\to\infty} h_n(t)=0$ obţinem şi estimarea

$$\Phi_{\eta_n}(t)=\left[1-\frac{t^2}{2n}\left(1+H(\frac{t}{\sqrt{n}})\right)\right]^n, \text{ unde } \lim_{t\to 0} H(t)=0$$

Dacă $n\to\infty$, membrul drept tinde către $e^{-\frac{t^2}{2}}$, care este tocmai funcţia caracteristică a unei variabile aleatoare normal repartizată din $N(0,1)$. Atunci

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} P(\eta_n\leq x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

Dar $\eta_n=\frac{1}{\sqrt{Dn}}(\xi_1+...+\xi_n-M(\xi_1+...+\xi_n))$ deci am demonstrat :

TEOREMA 4.7. (teorema limită centrală). Dacă $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ sînt variabile aleatoare din $L^2(\Omega, P)$ independente şi $\xi_k-M\xi_k$ au aceeaşi lege de repartiţie $\forall k$, cu dispersia D, atunci

$$\lim_{n\to\infty} P(\xi_1+...+\xi_n-M(\xi_1+...+\xi_n)\leq x\sqrt{Dn})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

Teorema limită centrală are multe generalizări şi rafinări, dar reținem esența ei : **suma unui număr "mare" de variabile aleatoare independente are tendința de a fi repartizată normal**. Teoremele 4.6. şi 4.7. au fost obținute de Bernoulli (1713), Moivre (1733) şi Laplace (1812) în versiuni rudimentare, în condițiile cînd teoria probabilităților era în faza de constituire.

Din teorema limită centrală reiese caracterul special al repartiției normale printre alte legi probabiliste de repartiție a valorilor unor variabile aleatoare.

Anume, dacă o mărime (de exemplu nivelul unui zgomot, diametrul unei piese etc.) îşi datorează caracterul aleator mai multor factori aleatori independenți, atunci valorile ei urmează o lege normală de repartiție.

Aplicații în statistica matematică

3.1. Am întîlnit anterior mai multe legi teoretice de repartiție. De obicei legile depind de parametri reali (de exemplu m, σ în cazul repartiției normale) şi lor li se asociază anumite caracteristici statistice - medie, dispersie, momente, etc. Dacă avem o anumită mărime cu caracter aleator, atunci fie că se ştie dinainte ce tip de repartiție are, fie se calculează caracteristicile statistice empirice - media empirică, dispersia empirică, momente empirice etc. şi acestea se compară cu cele ale repartiției teoretice, putînd astfel decide la care lege de repartiție se supune mărimea considerată.

Dacă $x_1, ..., x_n$ reprezintă o selecție de valori (măsurători ale mărimii), atunci **media empirică** este $\overline{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$; **momentul empiric de ordin** $k \geq 1$ este $\overline{x^k} = \frac{x_1^k + \ldots + x_n^k}{n}$, **dispersia empirică** este

$$D = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \frac{1}{2n^2} \sum_{i,j} (x_i - x_j)^2 .\text{ Evident } \overline{kx} = k\overline{x}.$$

$D(kx) = k^2 Dx$, $\overline{x + c} = \overline{x} + c$, $D(x + c) = Dx$ (k, c constante reale; kx este setul de valori $kx_1, ..., kx_n$ iar $x + c$ setul de valori $x_1 + c, ..., x_n + c$).

3.2. Fie $\xi_1 ... \xi_n \in L^2(\Omega, P)$ variabile aleatoare independente, toate presupuse normal repartizate din $N(0, 1)$. Atunci se spune că variabila aleatoare $\chi_n = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$ are **repartiția "hipătrat"** a lui Pearson, cu n grade de libertate.

Dacă ξ este o altă variabilă aleatoare din $N(0, 1)$, atunci repartiția lui $t_n = \frac{\xi\sqrt{n}}{\chi_n}$ se numeşte **repartiția Student** cu n grade de libertate.

Fie $x_1, ..., x_n$ o selecție de valori ale unei variabile aleatoare rapartizată normal $\xi \in N(m, \sigma)$. Fie $\overline{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ şi $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$. Atunci se poate arăta că variabila aleatoare $t = \frac{(\overline{x} - m)\sqrt{n}}{s}$ este repartizată Student cu

$n-1$ grade de libertate. Pentru orice α "mic", din tabela valorilor funcției de repartiție Student se poate determina acel prag τ_α pentru care $P(|t|\leq\tau_\alpha)=1-\alpha$, adică $P\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}\tau_\alpha\leq m\leq\bar{x}+s\frac{\tau_\alpha}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$. Intervalul $\left[\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}\tau_\alpha,\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}\tau_\alpha\right]$ se numește **intervalul de încredere pentru media** m **, cu coeficientul de încredere** $1-\alpha$.

În general, dacă $P(|\bar{x}-M\xi|\leq\beta)=p_0$, atunci se spune că intervalul $[\bar{x}-\beta,\ \bar{x}+\beta]$ este de încredere pentru media lui ξ cu coeficientul p_0.

Este interesant că Pearson a pornit de la o ruletă circulară cu r sectoare $\Delta_1,\ldots,\Delta_r$ cu arii $p_1A,\ldots,p_rA$ (A = aria discului ruletei). Rotind de n ori ruleta, să presupunem că indicatorul s-a oprit de ξ_k ori în $\Delta_k(1\leq k\leq r)$. Atunci $\xi_1,\ldots,\xi_r$ sînt variabile aleatoare cu suma n și pentru $n\to\infty$, variabila aleatoare.

$$\chi^2=\frac{1}{np_1}(\xi_1-np_1)^2+\ldots+\frac{1}{np_r}(\xi_r-np_r)^2=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{np_i}(\xi_i-np_i)^2$$

tinde să aibă tocmai repartiția sumei pătratelor de $r-1$ variabile aleatoare normale din $N(0,1)$. Așa cum teorema limită centrală atestă "miracolul repartiției normale", ceva similar se întîmplă și în acest caz; anume, funcția de repartiție a lui χ^2 depinde numai de numărul r de sectoare și nu de mărimea acestora!.

3.3. Metoda Monte Carlo

Ideea de bază constă în a observa o variabilă aleatoare (sau un vector aleator), a cărei medie este egală cu valoarea căutată A deci $A=M\xi$. Se realizează o serie de n repetări ale observațiilor (eventual de simulări pe calculator), conducînd la valorile $\xi_1,\ldots,\xi_n$ și atunci are lor formula aproximativă

$$A\simeq\eta_n=\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n},\ (n>>1)$$

Presupunem că experiențele repetate sînt independente și că $\forall\ k$, $M\xi_k=A$, $D\xi_k=\sigma^2$; rezultă $M\eta_n=A$ și $D\eta_n=\frac{\sigma^2}{n}$. Conform teoremei limită centrală, pentru $n>>1$, η_n este repartizată normal și satisface regula lui 3σ deci

$$P\left(|A-\eta_n|<\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\right)\simeq 0,997$$

adică inegalitatea $|A-\eta_n|<\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$ se realizează aproape sigur. În practică, abaterea medie pătratică σ se calculează după formula $\sigma\simeq\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_n)^2$.

Pentru formula aproximativă $A\simeq\eta_n$ am dat astfel și o evaluare a erorii absolute.

Metoda Monte Carlo poate fi utilizată la calculul integralelor, la rezolvarea unor ecuații sau sisteme de ecuații (deși precizia este limitată), ca și la simularea unor procese prin utilizarea generatoarelor de numere aleatoare (de altfel ruleta de la Monte Carlo, care a oferit terminologia, este tocmai un astfel de generator!).

De exemplu, să presupunem că un anumit parametru fizic A este funcție de mai mulți parametri cunoscuți $a, b, m, \ldots$. Atunci metoda Monte Carlo sugerează să efectuăm măsurători independente directe pentru A și nu pentru $a, b, m, \ldots$. Obținînd valorile $A_1, \ldots, A_N$, se poate lua $A \simeq \frac{A_1 + \ldots + A_N}{N}$ etc.

Apoi pentru a calcula o integrală de tipul $I = \int_0^1 f(x)\,dx$, se consideră o variabilă aleatoare ξ repartizată uniform în intervalul de integrare [0, 1]. Dacă ξ_i, $1 \le i \le N$ sînt valori generate independent ale lui ξ, atunci $I \simeq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)$.

Astfel de valori ξ_i se mai numesc **numere aleatoare uniform repartizate în** [0, 1]. Justificarea formulei anterioare este următoarea :

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x) p_\xi(x)\,dx = M(f \circ \xi) \simeq \frac{1}{N}\left[f(\xi_1) + \ldots + f(\xi_N)\right]$$

unde $p_\xi(x)$ este densitatea de probabilitate a lui ξ.

Orice altă integrală $\int_a^b g(x)\,dx$ se reduce la una de tipul anterior prin schimbarea de variabilă independentă $x = (b - a)t + a$.

Metoda Monte Carlo se aplică de asemenea pentru calculul integralelor multiple, pentru rezolvarea aproximativă a unor ecuații diferențiale ordinare și cu derivate parțiale, în simularea unor sisteme - "service" sau în probleme de fizică statistică care nu pot fi rezolvate cu metodele analitice etc.

4.6. Noțiunea de proces aleator

Pînă acum am considerat variabile aleatoare luate în mod separat.

Procesele aleatoare sînt familii de variabile aleatoare, indexate după mulțimi de momente. Reamintim că o mulțime timp este o submulțime total ordonată $(\mathscr{T}, \le)$ a lui $\mathbb{R}$. Dacă $\mathscr{T} = \{t_1, \ldots, t_N\}$ este finită se spune că timpul este **finit.** Dacă $\mathscr{T}$ este un șir infinit fără puncte de acumulare la distanță finită $t_1 < t_2 < \ldots, t_n < \ldots$, timpul este **discret** iar dacă $\mathscr{T}$ este interval, atunci timpul este numit **continuu.**

DEFINIȚIA 4.5. Fixăm un cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathscr{K}, P)$ și notăm cu $\mathscr{V}$ mulțimea tuturor variabilelor aleatoare $\Omega \to \mathbb{R}$ definite pe acest cîmp. Se numește **proces aleator** relativ la o mulțime-timp $\mathscr{T}$ orice aplicație

$$\xi : \mathscr{T} \to \mathscr{V},\ \xi = \{\xi_t(\omega)\}_{t \in \mathscr{T}}.$$

Procesele aleatoare se mai numesc în literatură **procese stochastice** sau **semnale aleatoare**.

Aşadar, pentru orice moment $t \in \mathcal{T}$ se pune în evidență o variabilă aleatoare ξ_t, un proces aleator fiind deci o familie de variabile aleatoare, indexată după toate momentele din $\mathcal{T}$. Dacă timpul $\mathcal{T}$ este finit sau discret, procesul ξ se mai numeşte **lanț** de variabile aleatoare, iar dacă $\mathcal{T}$ este un interval, se spune că procesul ξ este **continuu**.

Fie $\xi : \mathcal{T} \to \mathcal{V}$ un proces aleator. Atunci pentru orice moment $t \in \mathcal{T}$ şi $\forall\, \omega \in \Omega$ este definit un număr real $\xi_t(\omega)$ notat şi $\xi(t, \omega)$. Dacă ω este fixat, atunci aplicația $\mathcal{T} \to \mathbb{R}$, $t \to \xi_t(\omega) = \xi(t, \omega)$ se numeşte o **traiectorie a procesului**.

Pentru orice momente $t_1, ..., t_p \in \mathcal{T}$ este definit un vector aleator p -dimensional $\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_p}$. Funcția de repartiție (comună) a acestuia se mai numeşte **repartiția procesului** ξ **la momentele** $t_1, ..., t_p$.

EXEMPLE.

1) Vibrațiile dintr-un dispozitiv mecanic pot fi modelate prin procese aleatoare continue. Anume, la fiecare moment t dintr-un interval de timp I se notează cu ξ_t valoarea amplitudinii de vibrație la momentul t; această mărime are evident un caracter aleator. În mod similar, diversele tipuri de zgomote sînt procese aleatoare.

2) Un semnal sinusoidal aleator este de forma
$\xi_t = A(\omega)\sin(\alpha(\omega)t + \sigma(\omega))$, $t \in \mathbb{R}$ unde amplitudinea A, pulsația α şi faza φ sînt presupuse variabile aleatoare.

3) Se numeşte **proces Poisson** cu parametrul λ orice proces aleator $\xi = \{\xi_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ cu $\mathcal{T} = [0, \infty]$ astfel încît $\xi_0 = 0$ şi pentru orice $0 \le t_0 < t_1 < ... < t_n$, variabilele aleatoare $\xi_{t_1} - \xi_{t_0}$, $\xi_{t_2} - \xi_{t_1}$, ..., $\xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$ sînt independente; în plus se presupune că pentru orice momente $0 \le s \le t$, variabila aleatoare $\xi_t - \xi_s$ este rapartizată Poisson cu parametrul $\lambda(t - s)$. De exemplu, notînd cu ξ_t numărul de chemări la o stație telefonică pînă la momentul t, s-a constatat că se obține un proces Poisson.

4) Un proces continuu $\xi = \{\xi_t\}_{t \in I}$ se numeşte un **proces Markov** dacă pentru orice momente $t_1 < t_2 < ... < t_n < ...$ din intervalul I, şirul

$$\xi_{t_1},\ \xi_{t_2},\ \ldots,\ \xi_{t_n} \text{ este lanț Markov.}$$

De exemplu, să considerăm o mărime de stare care descrie evoluția unui dispozitiv automat Σ. Notînd cu ξ_t valoarea (aleatoare) la momentul t a acestei mărimi, se obține un proces aleator. Se consideră că acest proces este markovian, deoarece pentru orice momente $t_1 < t_2 ... < t_{n-1} < t_n < ...$, starea dispozitivului la momentul t_n, condiționată de stările la momentele anterioare, are aceeaşi probabilitate ca şi cînd ea ar fi condiționată numai de starea la momentul t_{n-1} imediat anterior.

5) Un ultim exemplu îl constituie procesele continue **gaussiene** care au proprietatea definitorie că pentru orice momente $t_1 < ... < t_p$, vectorul aleator $(\xi_{t_1}, ..., \xi_{t_p})$ este gaussian. Aceste procese descriu fenomene care depind de multe cauze aleatoare independente.

CARACTERISTICI STATISTICE. Fie $(\Omega, \mathscr{K}, P)$ un cîmp de probabilitate. În cele ce urmează, vom considera numai procese aleatoare $\xi = \{\xi_t\}_{t\in\mathscr{T}}$ astfel încît $\xi_t \in L^2(\Omega, P)$ pentru orice $t \in \mathscr{T}$. Pentru orice $t \in \mathscr{T}$ putem considera media şi dispersia variabilei aleatoare ξ_t :

$$M(t) = M\xi_t \text{ şi } D(t) = D\xi_t = M(\xi_t^2) - M(t)^2$$

Funcţia de repartiţie a procesului ξ la momentul t este

$$F_t : \mathbb{R} \to [0, 1], \ F_t(x) = P(\xi_t \le x)$$

De exemplu, dacă ξ este amplitudinea unui zgomot aleator, atunci pentru orice numere $x < y$, diferenţa $F_t(y) - F_t(x) = P(\xi_t \le y) - P(\xi_t \le x) = P(\xi_t \le y, \ \xi_t > x) = P(x < \xi_t \le y)$ reprezintă probabilitatea ca nivelul amplitudinii la momentul t să fie cuprins între valorile x şi y.

O noţiune deosebit de importantă o constituie funcţia de covarianţă (sau de corelaţie) a unui proces aleator.

DEFINIŢIA 4.6. Fie $\xi = \{\xi_t\}_{t\in\mathscr{T}}$, $\xi : \mathscr{T} \to L^2(\Omega, P)$ un proces aleator relativ la o mulţime-timp $\mathscr{T}$ şi un cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathscr{K}, P)$. Pentru orice momente $t, s \in \mathscr{T}$ se notează

$$K_\xi(t, s) = \text{cov}(\xi_t, \xi_s) = M(\xi_t \cdot \xi_s) - M(\xi_s) \cdot M(\xi_t)$$

Funcţia $K_\xi : \mathscr{T} \times \mathscr{T} \to \mathbb{R}$, $(t, s) \to K_\xi(t, s)$ astfel definită se numeşte **funcţia de covarianţă** a procesului ξ.

Dacă ξ, η sînt două procese aleatoare, se notează $K_{\xi\eta}(t, s) = \text{cov}(\xi_s, \xi_t)$ pentru orice $t, s \in \mathscr{T}$. În cazul când $K_{\xi\eta}(t, s) = 0$ pentru orice t, s, se spune că procesele $\xi = \{\xi_t\}_{t\in\mathscr{T}}$, $\eta = \{\eta_t\}_{t\in\mathscr{T}}$ sînt **necorelate.**

TEOREMA 4.8. Fie $\xi : \mathscr{T} \to L^2(\Omega, P)$ **un proces aleator. Atunci**

a) $K(t, s) = K(s, t)$ **pentru orice** $t, s \in \mathscr{T}$;

b) $D(t) = K(t, t)$ **pentru orice** $t \in \mathscr{T}$.

c) **pentru orice momente** $t_1,...,t_p \in \mathscr{T}$ **matricea** $A = (K(t_i, t_j))_{1\le i, j\le p}$ **este simetrică şi pozitivă** (în sensul că pentru orice vector-coloană p – dimensional c avem $c^T \cdot A \cdot c \ge 0$).

DEMONSTRAŢIE.

a) Avem $K(t, s) = \text{cov}(\xi_t, \xi_s) = \text{cov}(\xi_s, \xi_t) = K(s, t)$.

b) $K(t, t) = \text{cov}(\xi_t, \xi_t) = M(\xi_t^2) - M(\xi_t)^2 = D(\xi_t) = D(t)$.

c) Matricea A este conform a) simetrică. Apoi pentru orice $c = (c_1, ..., c_p)^T$, să considerăm variabila aleatoare $\eta = c_1\xi_{t_1} + ... + c_p\xi_{t_p}$. Avem evident $\eta \in L^2(\Omega, P)$ şi $\text{cov}(\eta, \eta) = D_\eta \ge 0$. Pe de altă parte,

$D_\eta = D(c_1\xi_{t_1} + \ldots + c_p\xi_{t_p}) = \sum_{i,j} c_i c_j \operatorname{cov}(\xi_{t_i}, \xi_{t_j}) = \sum_{i,j} c_i c_j K(t_i, t_j)$, deoarece în general $D(kv) = k^2 Dv$ pentru $k \in \mathbb{R}$ şi $D\left(\sum_{i=1}^{p} v_i\right) = \sum_{i=1}^{p} D(v_i) + 2\sum_{i<j} \operatorname{cov}(v_i, v_j)$ pentru orice variabile aleatoare $v, v_1, \ldots, v_p \in L^2(\Omega, P)$.

Definiția 4.7. Un proces aleator $\xi : \mathscr{T} \to L^2(\Omega, P)$ se numeşte **invariant în timp** dacă $\mathscr{T} = \mathbb{R}$ (în cazul continuu) sau $\mathscr{T} = \mathbb{Z}$ (în cazul discret} şi în plus pentru orice $t, s, h \in \mathscr{T}$ avem

$$M(t+h) = M(t) \text{ şi } K(t+h, s+h) = K(t, s)$$

Procesele invariante în timp se mai numesc **staționare**.

Teorema 4.9. Fie $\xi : \mathscr{T} \to L^2(\Omega, P)$ un proces aleator invariant în timp. Atunci

a) **Media** $M(t) = M(\xi_t)$ **este constantă (independentă de** t**);**

b) **Covarianța** $\operatorname{cov}(\xi_{s+t}, \xi_s)$ **este independentă de** s **şi se notează** $K(t)$; **avem** $K(t) = K(t, 0)$;

c) **Pentru orice** $s, t \in \mathscr{T}$, $K(t, s) = K(t - s)$, $K(-t) = K(t)$.

d) **Dispersia** $D(t) = K(0)$ **este constantă.**

Demonstrație.

a) Conform definiției 4.7. avem $M(t + h) = M(t)$ pentru orice $h, t \in \mathscr{T}$. Să luăm $h = -t$. Atunci $M(t) = M(0)$ pentru orice $t \in \mathscr{T}$.

b) Avem $K(t, s) = K(t + h, s + h)$, pentru orice $t, s \in \mathscr{T}$. Făcînd $h = -s$, obținem $K(t, s) = K(t - s, 0)$. Înlocuind t cu $s + t$, rezultă $K(s + t, s) = K(t, 0)$ deci $\operatorname{cov}(\xi_{s+t}, \xi_s)$ este independentă de s, notată $K(t)$. Totodată $K(t) = K(t, 0)$.

c) Avem $K(t - s) = K(t - s, 0) = K(s + t - s, 0+s) = K(t, s)$. Apoi

$K(-t) = K(-t, 0) = K(0, -t) = K(t + 0, t - t) = K(t, 0) = K(t)$. În fine,

$K(0) = K(t, t) = \operatorname{cov}(\xi_t, \xi_t) = D\xi_t = D(t)$, pentru orice $t \in \mathscr{T}$.

Procesele invariante în timp nu îşi modifică deci proprietățile statistice, în sensul că media şi dispersia sînt aceleaşi la orice moment şi covarianța la două momente distincte depinde numai de lungimea intervalului de timp dintre cele două momente.

În practică, uneori caracteristicile statistice ale unui proces aleator $\xi : \mathscr{T} \to L^2(\Omega, P)$ se calculează astfel: se consideră $N \gg 1$ traiectorii $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ale lui ξ [deci $\xi_i = \xi_t(\omega_i)$ cu $\omega_i \in \Omega$ fixate] şi se aplică pentru orice t, s următoarele formule aproximative:

$$M(t) \simeq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \xi_k(t), \quad D(t) \simeq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \left[\xi_k(t) - M(t)\right]^2$$

şi

$$K(t, s) \simeq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} (\xi_k(t) - M(t)).(\xi_k(s) - M(s))$$

Aplicații. 1) **Răspunsul unor sisteme liniare la semnale aleatoare.** Se numeşte **zgomot alb de intensitate** I un proces aleator ξ pentru care

$K_\xi(t, s) = I\delta(t-s)$. În acest caz $K(t) = K_\xi(t, 0) = I\delta(t)$ şi pentru orice $t \neq s$, $\mathrm{cov}(\xi_t, \xi_s) = 0$ deci orice două eşantioane la momente distincte sînt necorelate.

Se mai spune că zgomotul alb este idealizarea unui proces total haotic, pentru care valoarea la orice moment nu este corelată nici măcar cu valorile a momente vecine de timp.

Să considerăm un sistem liniar de forma

$$L : \mathscr{O} \to \mathscr{O},\ x(t) \to y(t) = \int_0^\infty G(t, s)x(s)\,\mathrm{d}s$$

unde $\mathscr{O}$ este clasa funcţiilor original Laplace şi $G(t, s) = 0$ pentru $t < s$.

Presupunînd că intrările (şi ieşirile) sînt semnale aleatoare, pentru medie şi pentru funcţia de covarianţă rezultă

$$My(t) = M\int_0^\infty G(t, s)x(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty G(t, s)Mx(s)\,\mathrm{d}s$$

şi

$$K_y(t, s) = \int_0^\infty \mathrm{d}u \int_0^\infty G(t, u)G(s, v)K_x(u, v)\,\mathrm{d}v.$$

Dacă intrarea x este un zgomot alb de intensitate I, atunci $K_x(u, v) = I\delta(u - v)$ şi pentru ieşirea corespunzătoare avem

$$K_y(t, s) = I\int_0^\infty G(t, u)G(s, u)\,\mathrm{d}u.$$

Dacă sistemul L este un amplificator de coeficient $k > 0$, atunci $y(t) = kx(t)$ şi $G(t, s) = k\delta(t - s)$. În acest caz, dacă x este un zgomot alb de intensitate I, atunci $K_y = Ik^2\delta(t - s)$ deci y este un zgomot alb de intensitate Ik^2.

Pentru un derivator avem $y(t) = x'(t)$ şi $G(t, s) = \delta'_s(t)$ şi dacă intrarea $x(t)$ este un zgomot alb de intensitate I, atunci ieşirea corespunzătoare are funcţia de covarianţă

$$K_y(t, s) = I\int_0^\infty G(t, u)G(s, u)\,\mathrm{d}u = I\int_0^\infty \delta'_u(t)\delta'(s - u)\,\mathrm{d}u = I\delta''_s(t)$$

2) **Densitatea spectrală a unui semnal aleator**

Cunoaştem rolul important al descompunerii semnalelor în armonicele lor (teoria seriilor Fourier în cazul periodic şi teoria transformării Fourier în cazul general). Astfel de descompuneri au loc şi în cazul semnalelor aleatoare.

Fie $\xi : \mathscr{T} \to L^2(\Omega, P)$ un semnal aleator invariant în timp, pentru care funcţia de covarianţă $K_\xi \in L^1 \cap L^2$). Se numeşte **densitatea spectrală a lui** ξ transformata Fourier a funcţiei K_ξ şi anume

$$S_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\xi(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

(aici ω nu este eveniment aleator ci valoarea curentă a frecvenţei).

Conform teoremei de inversare 4.4. rezultă

$$\underline{K}_\xi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_\xi(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

Conform teoremei 4.9. c), $K_\xi(t)=K_\xi(-t)$ deci

$$S_\xi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}K_\xi(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t-i\int_{-\infty}^{\infty}K_\xi(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}K_\xi(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

apoi

$$\underline{K}_\xi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_\xi(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega$$

Pentru $t=0$ rezultă $D_\xi=\underline{K}_\xi(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_\xi(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ (expresia dispersiei lui ξ).

Exemple. 1) Dacă $K_\xi(t)=D.e^{-a|t|}$ unde $a>0$ și D sînt constante, atunci

$$S_\xi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}D\cdot e^{-a|t|}\cos\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{2Da}{\omega^2+a^2}.$$

2) Dacă densitatea spectrală a semnalului ξ este constantă, $S_\xi=A$, atunci

$$K_\xi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Ae^{i\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{A}{2\pi}\delta(\omega)$$

deoarece $\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega=\delta(t)$, în sensul teoriei distribuțiilor.

Așadar, ξ este un zgomot alb de intensitate $\frac{A}{2\pi}$.

§ 5. Transformarea "Z" și transformarea Fourier discretă

5.1. Semnale și sisteme discrete

Multe tehnici de prelucrare a semnalelor discrete sînt inspirate din cazul semnalelor continuale. În ultimul timp s-au elaborat însă și tehnici specifice cazului discret, obținute ca aplicații ale unor rezultate matematice profunde de algebră sau analiză armonică. Un impuls deosebit l-au adus cercetările de complexitatea calculelor, avînd ca scop obținerea unor algoritmi cerînd un timp de execuție și un spațiu de memorie cît mai reduse.

Definiția 5.1. Se numește **semnal discret** o funcție $x:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, $n\to x_n$. (Uneori este comod să se noteze $x(n)$ sau $x[n]$ în loc de x_n).

Așadar, un semnal discret este un șir de numere reale sau complexe $(x_n)_{n\in\mathbf{Z}}$, indexat după mulțimea numerelor întregi. Dacă $x_n=0$ pentru orice $n<0$ se spune că semnalul x **are suport pozitiv**. Dacă există întregi $M\le N$ astfel încît $x_n=0$ pentru $n<M$ și pentru $n>N$, atunci semnalul x se mai numește **finit**.

Vom nota cu S_d mulțimea semnalelor discrete şi cu S_d^+ mulțimea semnalelor cu suport pozitiv. Evident S_d este un spațiu vectorial (complex).

EXEMPLE.

1) Semnalul discret **unitate** este $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$,

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad n < 0 \end{cases}.$$

Pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ fixat, se poate considera **impulsul unitar discret la momentul** k, notat δ_k, definit prin

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad n = k \\ 0 & \text{dacă} \quad n \neq k \end{cases}.$$

Pentru $k = 0$ notăm δ în loc de δ_0. Evident, u şi δ aparțin lui S_d^+.

2) Dacă $x \in S_d$, atunci pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ fixat, semnalul $y = (x_{n-k})_{n\in\mathbb{Z}}$ se numeşte **întîrziatul** lui x cu k momente. Dacă $x, y \in S_d$ şi dacă pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ seria $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} y_k$ este convergentă cu suma z_n, atunci se spune că există **convoluția** lui x şi y, care este semnalul $x * y = (z_n)_{x\in\mathbb{Z}}$. Dacă $x, y \in S_d^+$, atunci există $x * y$ şi în plus $y * x = x * y$. De asemenea, pentru orice $x \in S_d$ se observă că $x * \delta = x$ şi că $x * \delta_k$ este tocmai întîrziatul lui x cu k momente.

3) Pentru orice funcție reală $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi oprice $T > 0$ fixat, se obține prin eşantionare un semnal discret $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ unde $x_n = f(nT)$.

DEFINIȚIA 5.2. Un **sistem discret** este definit printr-un operator

$$L: S_d \to S_d,\ x \to y = Lx.$$

Semnalul $L\delta$ se mai numeşte **răspunsul-impuls** al sistemului L. Sistemul L se numeşte **liniar** dacă operatorul L este liniar: se mai spune atunci că pentru L are loc principiul suprapunerii (dacă $x_1 \to y_1$ şi $x_2 \to y_2$, atunci $x_1 + x_2 \to y_1 + y_2$ şi $\lambda x_1 \to \lambda y_1$ pentru orice scalar $\lambda \in \mathbb{C}$). Sistemul L se numeşte **invariant în timp** (sau **staționar**) dacă pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, $L(x * \delta_k) = (Lx) * \delta_k$; aşadar, dacă eşantioanele intrării sînt decalate cu k paşi, acelaşi lucru va rezulta pentru eşantioanele ieşirii. Se spune că L este **cauzal** dacă ori de cîte ori $Lx = y$, orice eşantion y_n al ieşirii depinde numai de eşantioanele x_k ale intrării pentru care $k \leq n$.

EXEMPLE.

1) Considerăm sistemul discret $L : S_d \to S_d, x \to y$ definit prin $y_n = \sum_{k=0}^{N} b_k x_{n-k}$, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ (unde $b_0, b_1, \ldots, b_N$ sînt constante complexe). Sistemul este liniar, invariant în timp şi cauzal. Ne propunem să determinăm răspunsul-impuls. Fie deci $x = \delta$. Atunci $y_n = \sum_{k=0}^{N} b_k \cdot \delta[n-k]$ deci $y_0 = b_0, y_1 = b_1, \ldots, y_{N+1} = 0, y_{N+2} = 0$ etc. Notînd $h = L\delta$, rezultă că $h = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ unde

$$h_n = \begin{cases} b_n & \text{dacă} \quad 0 \le n \le N \\ 0 & \text{dacă} \quad n < 0 \text{ sau } n > N \end{cases}$$

Se observă că pentru orice $x \in S_d$ şi $\forall\, n \in \mathbb{Z}$,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N} b_k (x * \delta_k)[n] = \left(\sum_{k=0}^{N} b_k (x * \delta_k) \right)[n] \text{ deci}$$

$$y = \sum_{k=0}^{N} b_k (x * \delta_k) = \sum_{k=0}^{N} b_k (\delta_k * x) = \left(\sum_{k=0}^{N} b_k \delta_k \right) * x = h * x \text{ deci } Lx = h * x.$$

În general, **pentru orice sistem liniar invariant şi cauzal** $L : S_d^+ \to S_d$, notînd $h = L\delta$, **rezultă** $h \in S_d^+$ **şi** $Lx = h * x$, $(\forall)\, x \in S_d$.
[Într-adevăr, $(\forall)\, n \in \mathbb{Z}$, $x[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k]\delta[n-k]$ deci

$(Lx)[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k](L\delta)[n-k] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x[k]h[n-k]$ deci $Lx = h * x$.

2) Fie $a \in \mathbb{R}$ o constantă nenulă. Să considerăm sistemul $L : S_d \to S_d$, $x \to y$ definit prin $y_n - ay_{n-1} = x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, y_0 fiind dat (numit **dată inițială**). Răspunsul-impuls şi comportarea sistemului depind de alegerea inițializării. Într-adevăr, dacă $x = \delta$ şi $y_0 = 1$, atunci se observă că $y_n = a^n \cdot u(n)$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, iar dacă $x = \delta$ şi $y_0 = 0$, atunci $y_n = -a^n \cdot u(-n-1)$, $(\forall)\, n \in \mathbb{Z}$. De fapt sistemul trebuie interpretat ca $\{y_0\} \times S_d \to S_d$, $(y_0, x) \to y$.

5.2. Definiția şi proprietățile transformării Z

DEFINIȚIA 5.3. Fie $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ un semnal discret. Se numeşte **transformata** "Z" a acestui semnal funcția complexă $X : D \to \mathbb{C}$, $X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k}$, definită în domeniul de convergență D al seriei Laurent respective.

Se mai notează $x_n \xrightarrow{z} X(z)$. Transformarea "Z" se mai numeşte şi **transformarea Laplace discretă** şi se mai scrie $X = \mathscr{L}\{x\}$.

EXEMPLE.

1) Determinăm transformata "Z" a semnalului discret unitate

$U(z) = \mathscr{L}\{u(n)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \dfrac{z}{z-1}$; în acest caz $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$. Apoi $\mathscr{L}\delta = 1$ şi $\mathscr{L}\delta_k = z^{-k}$ pentru orice întreg k.

2) Fie $a, b \in \mathbb{C}$ constante cu $a \neq 0$. Considerăm semnalul discret $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, unde $x_n = a^n b$. Dacă $n \ge 0$ şi $x_n = 0$ dacă $n < 0$. Transformata "Z" a acestuia este $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n b z^{-n} = b \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \dfrac{bz}{z-a}$ şi $D = \{|z| > |a|\}$.

Dăm acum o listă de proprietăți ale transformării $x(n) \xrightarrow{z} X(z)$.

a) **Domeniul D de convergență este mulțimea vidă sau o coroană circulară centrată în origine.**

Demonstrația este evidentă.

b) **Transformarea "z" este $\mathbb{C}$- liniară.**

Într-adevăr, pentru orice $x, y \in S_d$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avem $\mathscr{L}\{\alpha x + \beta y\} = \alpha\mathscr{L}\{x\} + \beta\mathscr{L}\{y\}$ (în $D \cap D'$, unde D şi D' sînt domeniile de convergență pentru $X(z)$ şi $Y(z)$ respectiv).

c) **Pentru orice $x \in S_d$ avem $\mathscr{L}\{x*\delta_k\} = z^{-k}\mathscr{L}\{x\}$. Mai general, dacă $x, y \in S_d$ şi există** $x*y$, atunci $\mathscr{L}\{x*y\} = \mathscr{L}\{x\}\cdot\mathscr{L}\{y\}$.

Într-adevăr, fie $X(z) = \mathscr{L}\{x\}$, $Y(z) = \mathscr{L}\{y\}$ deci

$$X(z) = \sum_{k=\infty}^{\infty} x_k z^{-k},\ Y(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y_j z^{-j}. \text{ Atunci}$$

$$X(z)\cdot Y(z) = \sum_{k,j} x_k y_j z^{-k-j} \overset{(k+j=n)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} \text{ unde } c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k}.$$

Evident $x*y = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ şi totodată am arătat că $X(z)\cdot Y(z) = \mathscr{L}\{x*y\}$ în $D \cap D'$.

d) **Presupunem că** $x(n) \xrightarrow{z} X(z)$ **şi** $D = \{r < |z| < R\}$, $0 < r < R$. **Atunci pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ avem**

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{n-1}X(z)\,dz = \sum \text{Rez}(z^{n-1}X(z))$$

C fiind un cerc $|z| = \rho$, $\rho > r$ care conține în interior toate singularitățile la distanță finită ale funcției $z^{n-1}X(z)$, suma făcîndu-se după acestea.

Într-adevăr, avem $X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k}$ deci $z^{n-1}X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{n-k-1}$ deci

$$\oint_C z^{n-1}X(z)\,dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\oint_C z^{n-k-1}\,dz = 2\pi i x(n).$$

Din proprietatea d) rezultă că dacă $x, y \in S_d$ au aceeaşi Z – transformată, atunci $x = y$.

În mod similar se demonstrează că :

e) **Dacă** $x(n) \xrightarrow{z} X(z)$ **şi** $y(n) \xrightarrow{z} Y(z)$, **atunci**

$$x(n)y(n) \xrightarrow{z} \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{u} X\left(\frac{z}{u}\right)Y(u)\,du.$$

f) **Dacă $x \in S_d^+$, atunci** $\lim_{z\to\infty} X(z) = x(0)$. Evident.

Sintetizăm într-un tablou proprietățile de calcul ale transformării "z".

$x(n)$	$X(z)$
$\delta(n)$	1
$\delta_k(n)$	$1/z_k$
$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$
$nu(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$n^2u(n)$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
e^{-an}	$\frac{1}{1-e^{-a}z^{-1}}$
$\cos \omega n$	$\frac{z(z-\cos\omega)}{z^2-2z\cos\omega+1}$
$e^{-an}\cos\omega n$	$\frac{z(z-e^{-a}\cos\omega)}{z^2-2ze^{-a}\cos\omega+e^{-2a}}$
$\sin \omega n$	$\frac{2\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$
$x(n+m)$	$z^m X(z),\ m\in\mathbb{Z}$
$x(n-1)$	$\frac{1}{z}X(z)$
$nx(n)$	$-zX'(z)$
$a^n x_n$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$

APLICAȚII.

Aplicația cea mai semnificativă a transformării "Z" este rezolvarea ecuațiilor liniare cu diferențe finite (şiruri date prin relații de recurență) şi legat de aceasta, studiul sistemelor discrete liniare invariante în timp.

1) **Şirul lui Fibonacci**. Determinăm termenul general al şirului

$a=(a_n)_{n\geq 0}$ din S_d^+ unde $a_0=0$, $a_1=1$ şi $(\forall)\ n\geq 2$, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$.

Aşadar, $(\forall)\ n\in\mathbb{Z}$, $a_n-a_{n-1}-a_{n-2}=\begin{cases}0 & \text{dacă}\quad n\geq 2 \text{ sau } n\leq 0\\ 1 & \text{dacă}\quad n=1\end{cases}$

adică $a_n-a_{n-1}-a_{n-2}=\delta_1[n]$ deci $(a*\delta)[n]-(a*\delta_1)[n]-(a*\delta_2)[n]=\delta_1[n]$. Prin urmare, $a*\delta-a*\delta_1-a*\delta_2=\delta_1$ adică $a*(\delta-\delta_1-\delta_2)=\delta_1$. Aplicînd transformarea Z, se obține, conform proprietății c): $A(z)\left(1-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}\right)$, deci

$$A(z)=\frac{z}{z^2-z-1}.$$

Conform d) se recuperează termenul general al şirului

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{z^n}{z^2-z-1}\,dz,\ n\geq 0$$

unde C este frontiera unui disc centrat în origine conţinînd punctele $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Un calcul imediat de reziduuri arată că $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ pentru orice $n \geq 0$.

NOTĂ. Limita raportului $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ a doi termeni succesivi ai şirului Fibonacci pentru $n \to \infty$ este egală cu $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \simeq 1{,}618$, numit "numărul de aur".

Numărul α are o serie de proprietăţi exprimînd o armonie a proporţiilor în pictură, în muzică. El este unica soluţie pozitivă a ecuaţiei $x^2 - x - 1 = 0$; dacă punctele A, B, M sînt coliniare (B între A şi M) şi dacă $\|AB\| = 1$, $\|BM\| = \alpha$ atunci $\|BM\|^2 = \|AB\| \cdot \|AM\|$.

2) Considerăm sistemul $L: S_d^+ \to S_d$, $x \to h * x$, unde $h = \delta_{-2} + \delta_{-1} - 6\delta$. Ne propunem să determinăm intrarea x pentru care ieşirea corespunzătoare este $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ unde

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad n < 0 \\ n & \text{dacă} \quad n \geq 0 \end{cases}.$$

Aşadar trebuie rezolvată ecuaţia $h * x = y$. Aplicînd transformarea "z", rezultă $H(z) \cdot X(z) = Y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{-n} = \frac{z}{(z-1)^2}$. Dar $H(z) = \mathscr{L}\{h\} = z^2 + z - 6$ deci $X(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z^2+z-6)}$ şi $x_n = \sum \operatorname{Rez} \frac{z^n}{(z-1)^2(z^2+z-6)}$ (suma după reziduurile în punctele $z = 1$, $z = 2$, $z = -3$). Rezultă $x_n = \left[\frac{2^n}{5} - \frac{4n+3}{16} - \frac{1}{80}(-3)^n\right] \cdot u(n)$, pentru orice $n \geq 0$.

3) Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ şi $B \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ matrici constante date şi sistemul discret multivariabil $L: S_d^m \to S_d^n$, $\underline{u} = (\underline{u}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \to \underline{x} = (\underline{x}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ unde

$$\underline{x}(k+1) = A\underline{x}(k) + B\underline{u}(k) \quad \text{pentru orice } k \in \mathbb{Z}.$$

Aşadar, $\underline{x} * \delta_{-1} = A\underline{x} + B\underline{u}$ deci $(\delta_{-1} I_n - \delta A) * x = B\underline{u}$ şi $\underline{x} = W\underline{u}$, unde $W = (\delta_{-1} I_n - \delta A)^{-1} \cdot B$ este matricea de transfer a sistemului. Pentru un sistem discret, univariabil $L: S_d \to S_d$, $x \to y$ (cu o singură intrare şi cu o singură ieşire), se poate defini funcţia complexă de transfer ca fiind

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

5.3. Transformarea Fourier discretă ; algoritmul TFR (de transformare Fourier rapidă)

Fie $N \geq 2$ un întreg fixat. Elementele mulțimii $\mathscr{T} = \{0, 1, ..., N-1\}$ vor fi numite **momente** şi orice şir $x = (x_n)_{n\in\mathscr{T}}$ de numere reale sau complexe se va numi **semnal finit** pe $\mathscr{T}$ cu N eşantioane.

DEFINIȚIA 5.4. Transformarea Fourier discretă a semnalului finit $x = (x_n)_{n\in\mathscr{T}}$ este un alt semnal finit $F_x = (f_k)_{k\in\mathscr{T}}$, dat prin

(1) $f_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \upsilon^{kn}$ unde $\upsilon = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ (Numărul complex f_k se numeşte **eşantionul spectrului lui x pe frecvența k**).

Se mai scrie $x(n) \xrightarrow{\mathscr{F}} f(k)$ sau $F_x = \mathscr{F}\{x\}$.

Reamintim că în loc de x_n se mai scrie $x(n)$ sau $x[n]$ şi în loc de f_k se mai scrie $f(k)$ sau $f[k]$. Relațiile (1) se pot scrie concentrat matriceal; anume să notăm $X = (x_0, x_1, ..., x_{N-1})^T, F_x = (f_0, f_1, ..., f_{N-1})^T$ şi $W = (\upsilon^{kn})_{0\leq k, n\leq N-1}$. Atunci

(2) $$F_x = W \cdot X.$$

Matricea

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \upsilon & \upsilon^2 & \cdots & \upsilon^{N-1} \\ 1 & \upsilon^2 & \upsilon^4 & \cdots & \upsilon^{2(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \upsilon^{N-1} & \upsilon^{2(N-1)} & \cdots & \upsilon^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

este o matrice pătratică de ordin N evident simetrică. Ținînd cont că $\upsilon = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ deci $|\upsilon| = 1$ şi $\overline{\upsilon} = e^{i\frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{\upsilon}$, rezultă că $W \cdot \overline{W} = \overline{W} \cdot W = \frac{1}{N}\mathbf{I}_N$ ($\mathbf{I}_N$ fiind matricea unitate de ordin N şi $\overline{W}$ matricea conjugată. Atunci W rezultă inversabilă şi $W^{-1} = \frac{1}{N}\overline{W}$ Din relația (2) rezultă atunci direct formula de inversare a transformării Fourier $x \to \mathscr{F}\{x\}$, anume

(3) $$X = \frac{1}{N}\overline{W}F_X$$

NOTĂ. Fie $x(t)$, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un semnal continual şi $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt$ transformata lui Fourier. Restrîngînd x la un interval mărginit de timp şi reținînd N eşantioane (unde $N \geq 1$ este ales corespunzător, de obicei o putere a

lui 2), se obţine un semnal finit $(x_n)_{0\le n\le N-1}$. În practică este suficient să fie calculate eşantioanele lui X (ω) în punctele $0, \frac{2\pi}{N}, \frac{4\pi}{N}, \ldots, \frac{2\pi(N-1)}{N}$ adică să calculăm $X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\frac{2\pi}{N}kt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\upsilon^{kt}dt$. Formulele (1) din definiţia 5.4. sînt astfel pe deplin justificate.

Analiza semnalelor este dominată de nevoia calculului unor expresii de tipul (1), (2) sau (3), exprimînd trecerea din domeniul - timp în domeniul - frecvenţă şi invers. De aici rezultă interesul pentru găsirea unor algoritmi cît mai convenabili, dintre care s-a detaşat algoritmul TFR, elaborat de Cooley şi Tukey în anii 1965-1970. În ultimul timp s-au obţinut algoritmi mai rapizi, pentru N ales convenabil (nu neapărat o putere a lui 2) şi folosind rezultate subtile de teoria numerelor.

Pentru a sublinia rolul algoritmului TFR, indicăm timpii de calcul al transformatelor Fourier prin aplicarea directă a formulelor (1) sau prin aplicarea TFR pentru cîteva valori ale lui N :

N	Direct	TFR
2^{12}	8 minute	30 secunde
2^{16}	30 ore	1 minut
2^{18}	20 săptămîni	5 minute
2^{20}	1 an	20 minute

Prezentăm acum pe scurt ideea algoritmului TFR în cazul cînd numărul de eşantionare N nu este prim, $N = N_1 \cdot N_2$ cu întregii N_1, N_2 strict mai mici ca N. Vom numi operaţie o pereche formată dintr-o adunare şi o înmulţire de numere complexe. Cunoscînd $x(n)$ şi υ^{kn}, se observă că pentru a calcula toţi $f(k)$ sînt necesare N^2 operaţii.

Pentru orice $0 \le k$, $n \le N-1$, împărţind k la N_2 şi n la N_1 avem scrieri unice $k = k_1N_2 + k_2$ şi $n = n_2N_1 + N_1$ unde $0 \le k_1$, $n_1 \le N_1 - 1$ şi $0 \le k_2$, $n_2 \le N_2 - 1$. Vom putea scrie $k = (k_1, k_2)$ şi $n = (n_1, n_2)$ fără ambiguitate. Avem $\upsilon^{k_1n_2N_1N_2} = \upsilon^{k_1n_2N} = (\upsilon^N)^{k_1n_2} = 1$, deoarece $\upsilon^N = e^{-2\pi i} = 1$ şi atunci

$$\upsilon^{kn_2N_1} = \upsilon^{(k_1N_2+k_2)n_2N_1} = \upsilon^{k_2n_2N_1}.$$

Rezultă

$$\upsilon^{kn} = \upsilon^{k(n_2N_1+n_1)} = \upsilon^{kn_2N_1}\upsilon^{kn_1} = \upsilon^{k_2n_2N_1}\upsilon^{kn_1} \quad \text{deci}$$

$$f(k) = f(k_1, k_2) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\upsilon^{kn} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n_1, n_2)\upsilon^{k_2n_2N_1}\upsilon^{kn_1} = \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2)\upsilon^{k_2n_2N_1}\upsilon^{kn_1}.$$

Aşadar, avem

$$f(k_1,k_2)=\sum_{n_1=0}^{N_1-1} C_1(n_1,k_2)v^{kn_1} \qquad (4)$$

unde

$$C_1(n_1,k_2)=\sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1,n_2)v^{k_2n_2N_1} \qquad (5)$$

Pentru calculul lui C_1 sînt necesare NN_2 operații (pentru fiecare k fixat şi n_1 fixat calculul lui $C_1(n_1, k_2)$ necesită N_2 operații iar k parcurge N valori).

Apoi cunoscînd valorile lui C_1, pentru calculul lui $f(k_1, k_2)$ cu formulele (4) sînt necesare NN_1 operații. Aşadar, numărul total de operații pentru calculul transformatei Fourier discrete pe această cale este $N(N_1 + N_2)$. Dacă $N_1 \geq 2$, $N_2 \geq 2$, atunci $N_1N_2 \geq N_1 + N_2$ deci $N^2 \geq N(N_1 + N_2)$.

Dacă N_1 este prim şi N_2 se descompune în factori, atunci suma (5) se prelucrează descompunînd N_2 etc. Dacă $N = N_1N_2 \ldots N_m$, atunci în loc de N^2 operații se efectuează $N(N_1 + N_2 + \ldots + N_m)$, ceea ce este sensibil redus. Cazul cel mai utilizat în practică este $N = 2^m$, cînd se ajunge prin aplicarea TFR la micşorarea numărului de operații de $\dfrac{N^2}{N(N_1+\ldots N_m)}=\dfrac{2^{2m}}{2^m 2m}=\dfrac{2^{m-1}}{m}$ ori.

5.4. Transformarea Fourier-Walsh

Fie $n \geq 2$ un întreg fixat şi $N = 2^n$. Notăm $\mathcal{T} = \{0,1,\ldots, N-1\}$. Orice element $a \in \mathcal{T}$ are o scriere binară unică $a = a_{n-1}2^{n-1} +\ldots+ a_1 2 + a_0 = \overline{a_{n-1}\ldots a_1a_0}$ de lungime n. Pentru orice întreg $b \in \mathbb{Z}$ există şi este unic $r \in \mathcal{T}$ astfel încît $b - r$ să fie divizibil cu N. Apoi pentru orice $a, b \in \mathcal{T}$, $a=\overline{a_{n-1}\ldots a_1a_0}$, $b=\overline{b_{n-1}\ldots b_1b_0}$ se poate defini elementul $c = a \oplus b$ din $\mathcal{T}$ pentru care $c_k = a_k + b_k \bmod 2$. Mulțimea $\mathcal{T}$ are o structură de grup abelian relativ la operația $\oplus$.

Orice semnal finit $x:\mathcal{T}\to\mathbb{C}$, $x=(x_n)_{n\in\mathcal{T}}$, se identifică cu un punct din $\mathbb{C}^N$ anume $(x_0, x_1,\ldots, x_{N-1})$. Dacă $y:\mathcal{T}\to\mathbb{C}$ este alt semnal finit, atunci se pot defini **produsul** $x\cdot y$ pe componente $xy=(x_0y_0, x_1y_1,\ldots, x_{N-1}y_{N-1})$ şi **produsul scalar** euclidian $<x, y>= x_0\overline{y}_0 + x_1\overline{y}_1 +\ldots+ x_{N-1}\overline{y_{N-1}}$. Vom numi **bază standard** de semnale finite cu N eşantioane orice sistem

$\mathcal{B}=\{E_0, E_1,\ldots, E_{N-1}\}$ de N vectori-coloană din $\mathbb{C}^N$ astfel încît

1°. Matricea $E=(E_0|E_1|\ldots E_{N-1})$ să fie simetrică (de ordin N), cu toate elementele avînd modulul 1;

2°. Pentru orice $r, s \in \mathscr{T}, E_r E_s = E_{r \oplus s}$

3°. Pentru orice $r, s \in \mathscr{T}, r \neq s, < E_r, E_s > = 0$.

Sistemul $\mathscr{B}$ rezultă liniar independent [dacă $\sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i E_i = 0$ cu $\lambda_i \in \mathbb{C}$, atunci $< \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i E_i, E_j > = 0$ deci conform 3°, $\lambda_i < E_i, E_i >= 0$. Dar $< E_i, E_i > = N$ deci $\lambda_i = 0$ pentru orice i]. Deci $\mathscr{B}$ este chiar o bază pentru $\mathbb{C}^N$, iar matricea E rezultă nesingulară.

EXEMPLE. 1) Să considerăm vectorii-coloană N – dimensionali,

$$E_k = \begin{pmatrix} e_{0k} \\ e_{1k} \\ e_{2k} \\ \dots \\ e_{N-1,k} \end{pmatrix} \text{ unde } e_{tk} = e^{-i\frac{2\pi}{N}tk} = v^{tk},\ 0 \leq t, k \leq N-1.$$

Se verifică ușor condițiile 1°, 2°, 3°, obținându-se baza standard a **exponențialelor discrete**.

2) Un alt exemplu de bază standard a lui $\mathbb{C}^N$ îl constituie baza Walsh.

Pentru orice $0 \leq t, k \leq N-1$, considerăm scrierile binare (unice și de lungime n, deoarece $N = 2^n$) :

$$t = \overline{t_{n-1} \dots t_1 t_0} = t_{n-1} 2^{n-1} + \dots + t_1 2 + t_0;\ k = \overline{k_{n-1} \dots k_1 k_0} = k_{n-1} 2^{n-1} + \dots + k_1 2 + k_0$$

și definim pentru $1 \leq p \leq n$,

$$A_p = \begin{cases} k_p + k_{p-1} \bmod 2 & \text{dacă} \quad 1 \leq p \leq n-1 \\ k_{n-1} & \text{dacă} \quad p = n \end{cases}.$$

Considerăm vectorii-coloană N – dimensionali

$$W_k = \begin{pmatrix} w_{0k} \\ w_{1k} \\ \dots \\ w_{N-1,k} \end{pmatrix} \text{ unde } w_{tk} = (-1)^{\sum_{p=1}^{n} A_p t_{n-p}}$$

Se verifică din nou condițiile 1°, 2°, 3°, obținându-se **baza Walsh de semnale cu N eșantioane**. De exemplu, să detaliem cazul $N = 8$ deci $n = 3$.

În acest caz $t = 4t_2 + 2t_1 + t_0$, $k = 4k_2 + 2k_1 + k_0$, $A_1 = k_1 + k_0 \bmod 2$, $A_2 = k_2 + k_1 \bmod 2$ și $A_3 = k_2$. Pentru $k = 0$ avem $k_0 = k_1 = k_2 = 0$ deci $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ și $w_{t0} = 1$ pentru orice $t \in \mathscr{T} = \{0, 1, \dots, 7\}$. Pentru $k = 1$ avem $k_2 = k_1 = 0, k_0 = 1$ deci $A_1 = 1, A_2 = 0, A_3 = 0$ și $w_{t1} = (-1)^{t_2}$. În mod similar,

$$w_{t2} = (-1)^{t_2+t_1},\ w_{t3} = (-1)^{t_1},\ w_{t4} = (-1)^{t_1+t_0}$$

$$w_{t5} = (-1)^{t_2+t_1+t_0},\ w_{t6} = (-1)^{t_2+t_0},\ w_{t7} = (-1)^{t_0}$$

Matricea $E = (w_0 | w_1 | \dots w_{N-1})$ are în acest caz forma :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Baza Walsh este formată din cei 8 vectori din $\mathbb{C}^8$: $w_0, w_1, \dots, w_7$.

Facem convenția să considerăm intervalul [0, 1], să-l împărțim în 7 părți egale și să reprezentăm un semnal discret cu 8 eșantioane prin "bețe" plasate în punctele de diviziune. Atunci cele 8 funcții Walsh vor fi reprezentate ca în figura VIII. 25.

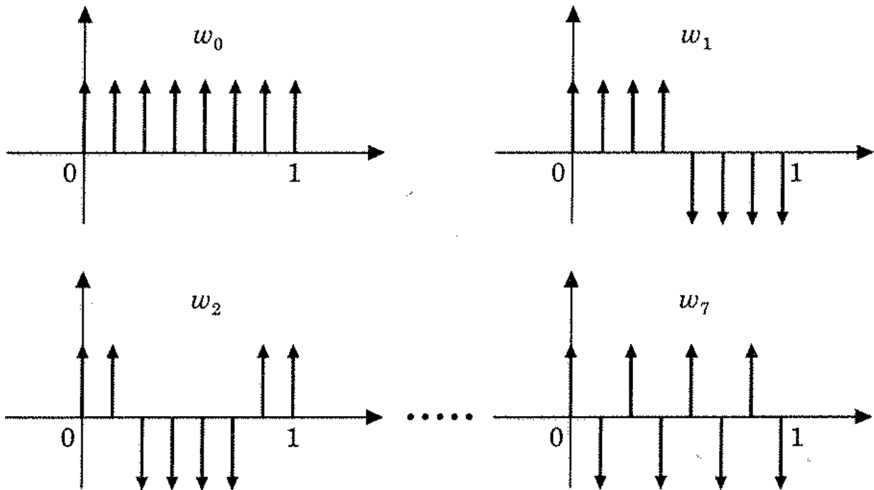


Figura VIII. 25.

Revenim la cazul general. Dacă $\mathscr{B} = \{E_0, E_1, \dots, E_{N-1}\}$ este o bază standard de semnale cu N eșantioane, atunci pentru orice semnal discret $x : \mathscr{T} \to \mathbb{C}$, identificat cu vectorul - coloană corespunzător X se definește **transformarea** $\mathscr{B}$**- Fourier** a lui x ca fiind vectorul-coloană N dimensional $F_X = EX$, unde $E = (E_0 | E_1 | \dots | E_{N-1})$. În cazul cînd $\mathscr{B}$ este baza exponențialelor discrete regăsim transformarea Fourier discretă, iar dacă $\mathscr{B}$ este baza Walsh de semnale cu N eșantioane, atunci obținem **transformarea Fourier-Walsh**; în acest

caz în loc de "frecvenţă" se utilizează termenul de "secvenţă". Detalii şi aplicaţii pot fi găsite în cărţi de specialitate.

NOTĂ. Funcţiile Walsh au numai două valori, 1 şi −1. Apariţia lor în matematică s-a produs ca răspuns la o problemă celebră pusă de Emile Borel (1871 – 1956) la începutul secolului nostru. Se ştie că funcţiile 1, cos t, sin t, cos $2t$, sin $2t$, ..., cos nt, sin nt, ... formează un şir ortogonal total în $L^2_{[0,2\pi]}$ (în sensul că dacă $f \neq g$ sînt două funcţii, avem $< f, g > = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0$ şi în plus, subspaţiul generat de funcţiile anterioare este dens). Borel a pus problema găsirii unui şir ortogonal total de funcţii în $L^2_{[0,1]}$, dar funcţii care să admită doar două valori. Răspunsul a fost obţinut de Walsh în 1923 şi aşa cum s-a întîmplat de multe ori, abia după 50 ani s-au găsit aplicaţiile semnificative în legătură cu tehnicile moderne de comutaţie, care beneficiază de avantajele funcţiilor Walsh. În cele de mai sus am prezentat doar funcţiile Walsh discrete (definite pe mulţimi finite cu N elemente, $N = 2^n$), caz suficient pentru aplicaţii.

Capitolul IX ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE

Obiectul acestui capitol important al matematicii îl constituie construirea şi studierea modelelor matematice ale unor fenomene fizice. După ce Newton a pus bazele mecanicii clasice, s-a constatat că multe procese fizice sînt supuse unor legităţi care se exprimă matematic prin relaţii între o funcţie de mai multe variabile şi derivatele ei parţiale, adică prin ecuaţii cu derivate parţiale - de ordin întîi, doi sau de ordin superior. În această situaţie se află studiul unor fenomene vibratorii (coarda vibrantă, membrana vibrantă), de difuzie (conductibilitatea termică în diverse medii), fenomene hidrodinamice (ecuaţia Navier-Stokes), elastice, fenomene ondulatorii (ecuaţia Schrödinger), ca şi studiul cîmpului electromagnetic etc.

Adeseori starea unui mediu fizic la un moment t şi într-un punct $M(x_1, x_2, x_3)$ este descrisă printr-o funcţie $u(t, x_1, x_2, x_3)$ de clasă C^2. Uneori viteza de variaţie în timp a funcţiei u, adică $\frac{\partial u}{\partial t}$, se exprimă cu ajutorul derivatelor parţiale ale lui u în raport cu variabilele x_i; alteori acceleraţia $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ este exprimată într-un mod similar. Vom vedea în mod concret cum sînt stabilite astfel de relaţii şi vom arăta că determinarea explicită a funcţiei u se va putea face doar dacă se adaugă condiţii la limită formulate convenabil. În acest capitol vom da metode de rezolvare tocmai a unor probleme la limită corect puse, adică stabile la perturbaţii ale datelor.

În orice modelare matematică se pun trei întrebări importante : **existenţa** soluţiei (ceea ce înseamnă necontradicţii între modelul fizic şi modelul matematic asociat), **unicitatea** soluţiei (ceea ce corespunde unicităţii evoluţiei procesului) şi în plus, **stabilitatea** soluţiei la erori de calcul (o problemă se zice **corect pusă** sau **stabilă** dacă soluţia ei variază continuu în raport cu datele problemei).

EXEMPLU. Să considerăm problema determinării unei funcţii armonice $u(x, y)$ în semiplanul superior astfel încît $u(x, 0) = 0$ şi $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \varphi$, cu $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţie de clasă C^1. Se poate arăta că pentru orice dată φ, soluţia u există şi este unică. Arătăm că totuşi problema nu este corect pusă. Dacă $\varphi = 0$ (funcţia nulă), atunci soluţia va fi nulă, iar dacă $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\cos nx (n \geq 1)$,

atunci problema are soluția $u_n(x, y) = \frac{1}{n^2}\cos nx \operatorname{sh} ny$. Se observă că deși $\varphi_n \xrightarrow{UC} 0$ totuși funcțiile u_n sînt nemărginite în deschisul $\{y > 0\}$ și șirul u_n nu converge uniform către zero; așadar dependența $\varphi \to u$ nu este continuă (se poate întîmpla ca φ să varieze "puțin" și totuși u să varieze "mult"). Acest exemplu faimos aparține lui J. Hadamard (1865 - 1963).

Necesitatea aplicării metodelor numerice și tehnicii moderne de calcul a impus cu precădere studiul problemelor corect puse și numai de astfel de probleme ne vom ocupa în continuare. În ultimul timp, problemele incorect puse sînt deasemenea intensiv cercetate.

§1. Cîteva ecuații clasice

1.1. Ecuația proceselor oscilatorii

Să începem studiul oscilațiilor "mici" ale unei coarde vibrante într-un plan xOu în jurul poziției ei de echilibru (presupusă rectilinie, în lungul axei Ox). Să notăm cu $u = u(x, t)$, $x \in [a, b]$ ecuația curbei presupusă de clasă C^2 care exprimă poziția coardei la momentul t, $t \in [0, T_1]$;

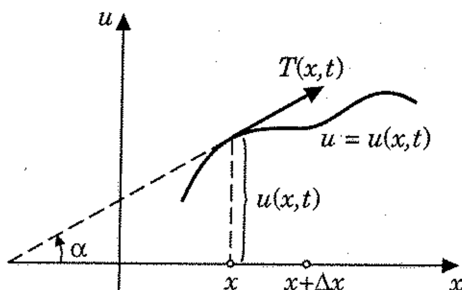


Figura IX.1

Tensiunea $T(x, t)$ în punctul x și la momentul t este dispusă pe tangenta la coardă și o presupunem constantă, cu valoarea T_0. Pe un interval $[x, x + \Delta x]$ notăm cu $\rho(x)\Delta x$ masa elementului corespunzător de pe coardă și cu $F(x, t)\Delta x$ componenta normală pe Ox a forței externe la momentul t. Conform legii a doua a lui Newton aplicată pe intervalul $[x, x + \Delta x]$, avem

$$F(x, t)(\Delta x) + T_0 \sin\alpha\big|_{x+\Delta x} - T_0 \sin\alpha\big|_x \simeq \rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(s-a luat proiecția pe axa Ou, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ fiind accelerația).

Oscilațiile fiind "mici", rezultă că α este "mic" deci

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} \simeq \operatorname{tg}\alpha \simeq \frac{\partial u}{\partial x} \text{ deci}$$

$$F(x, t)\Delta x + T_0\left[\frac{\partial}{\partial x}u(x + \Delta x, t) - \frac{\partial}{\partial x}u(x, t)\right] \simeq \rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Delta x$$

Se obține astfel ecuația

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) \qquad (1)$$

numită **ecuaţia coardei vibrante.**

Dacă $F \equiv 0$ se spune că (1) este ecuaţia oscilaţiilor **libere** iar dacă $F \neq 0$, oscilaţiile sînt **forţate.** Dacă ρ este constantă, T_0 fiind deja presupusă constantă, atunci se spune că avem o coardă omogenă şi ecuaţia (1) devine de forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g\,(x,t) \qquad (1')$$

unde $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ este o constantă pozitivă depinzînd de material. Ecuaţia (1′) se mai numeşte **ecuaţia 1 – dimensională a undelor.**

Ecuaţia membranei vibrante este

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + F \qquad (2)$$

unde necunoscuta este $u\,(x, y, t)$ şi reprezintă distanţa de la punctul curent al membranei la planul poziţiei de echilibru. Apoi propagarea sunetului, luminii în spaţiu (dar şi alte fenomene) sînt descrise de ecuaţia undelor în spaţiu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + F \qquad (3)$$

unde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Aceasta se mai scrie sub forma

$$\mathscr{A}\, u = F \qquad (3')$$

unde $\mathscr{A} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta$ este numit **operatorul lui D'Alembert.**

Coardele vibrante (adică firele flexibile), barele încastrate, membranele vibrante, oscilaţiile electromagnetice etc. şi în general procesele oscilatorii au dinamica în timp descrisă prin ecuaţii de tipul (1), (2) sau (3). **Ecuaţia generală a proceselor oscilatorii în $\mathbb{R}^n$** este

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(\underline{x}, t)$$

unde necunoscuta este funcţia de undă $u(\underline{x}, t)$, $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$; ρ, p, q depind de mediu, iar $F(\underline{x}, t)$ reprezintă acţiunea forţelor externe. Bineînţeles,

$$\text{div}\,(p \text{ grad } u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p \frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Pentru determinarea exactă a soluţiilor (de exemplu în cazul coardei) sînt necesare condiţii suplimentare - **iniţiale** (de exemplu valoarea lui u sau $\frac{\partial u}{\partial t}$ la momentul $t = 0$) sau **la frontieră** (în funcţie de contextul fizic; de exemplu $u\big|_{x=a} = \varphi(t)$, sau coarda prinsă într-un punct sau prinsă la capete etc.).

1.2. Ecuația proceselor de difuzie

Începem cu deducerea ecuației propagării căldurii îm spațiu, invocînd rațiuni fizice experimentale și raționamente tipice de modelare matematică. Fie $u(x, y, z, t)$ temperatura unui mediu izotrop în punctul $M(x, y, z)$ și la momentul t. Notăm ccu $\rho(M)$ densitatea în M, cu $c(M)$ căldura specifică în M și cu $k(M)$ coeficientul de conducție termică în M. Presupunem de asemenea că intensitatea sursei termice în punctul M și la momentul t este $F(M, t)$ și considerăm atît un interval de timp $[t, t + \Delta t]$ cît și un compact bordat oarecare V, cu frontiera suprafața închisă S și normala exterioară $\vec{n}$ (în condițiile formulei Gauss - Ostrogradski). Conform legii Fourier, cantitatea de căldură schimbată de V prin suprafața S în intervalul de timp considerat este

$$Q_1 = (\int_S k\frac{du}{dn}d\sigma)\Delta t = (\int_S k(\vec{n}\cdot \text{grad}\, u)d\sigma)\Delta t = (\int_V \text{div}(k\,\text{grad}\, u)\, dx\, dy\, dz)\Delta t,$$

ultima relație rezultînd din formula Gauss - Ostrogradski.

Pe de altă parte, de la sursele din V se primește cantitatea de căldură

$$Q_2 = (\int_V F(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz)\Delta t$$

iar cantitatea de căldură necesară pentru ca temperatura să varieze de la $u(m, y)$ la $u(m, t + \Delta t)$, deci cu $\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$, este egală cu

$$Q_3 = (\int_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, dy\, dz)\Delta t$$

Bilanțul termic implică relația $Q_1 + Q_2 = Q_3$ deci

$$(\int_V \left[\text{div}(k\,\text{grad}\, u) + F - c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right] dx\, dy\, dz)\Delta t = 0$$

Deoarece V este arbitrar, rezultă ecuația

$$\text{div}(k\,\text{grad}\, u) + F - c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad (5)$$

numită **ecuația propagării căldurii** în mediul considerat cu necunoscuta $u(x, y, z, t)$. Dacă ρ, c, k, sînt constante, mediul se numește **omogen** și rezultă o ecuație de forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + g(x, y, z, t) \qquad (5')$$

unde $a > 0$ este o constantă depinzînd de mediu.

În cazul 1 – dimensional, asimilînd o bară omogenă conducătoare de căldură cu intervalul $[0, 1]$ și notînd cu $u(x, t)$ temperatura barei în punctul $x \in [0, 1]$ și la momentul t, atunci distribuția temperaturii, fără surse, este dată de ecuația $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, stabilită de Fourier în 1822. Luînd pentru simplitate $a = 1$, o soluție a acestei ecuații este $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{\frac{-x^2}{4t}}$ pentru $t > 0$.

Pentru $t > 0$ "mic" temperatura este "mare" în jurul lui $x = 0$ şi devine "mică" pentru $t \to \infty$, ceea ce corespunde fenomenului fizic.

În cazul cînd u nu depinde de timp (numit **cazul staţionar**), ecuaţia (5′) devine de forma

$$\Delta u = g(x, y, z) \qquad (5'')$$

şi este numită **ecuaţia lui Poisson**.

Ecuaţia generală a proceselor de difuzie în $\mathbb{R}^n$ este

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}(p\,\mathrm{grad}\,u) - qu + F(\underline{x}, t)$$

Pentru buna determinare a soluţiilor se impun condiţii suplimentare (de exemplu $u|_S = u_0$ prescris, sau $\left.\frac{du}{dn}\right|_S = u_0$ cu u_0 dat etc.).

Observaţie importantă. În cazul staţionar (cînd u nu depinde de timp), atît ecuaţia proceselor oscilatorii (4) cît şi ecuaţia proceselor de difuzie (6) capătă aceeaşi formă, anume

$$-\mathrm{div}(p\,\mathrm{grad}\,u) + qu = F(\underline{x})$$

În cazul cînd p = constant şi $q = 0$ se obţine **ecuaţia lui Poisson** $\Delta u = \frac{1}{p}F(\underline{x})$ iar dacă $F \equiv 0$, se obţine **ecuaţia lui Laplace** $\Delta u = 0$ (în acest caz funcţia u fiind armonică). Dacă cunoaştem o soluţie particulară u_0 a ecuaţiei Poisson deci $\Delta u_0 = \frac{1}{p}F(\underline{x})$, atunci punînd $u = u_0 + v$, rezultă că ecuaţia Poisson se reduce la o ecuaţie Laplace.

1.3. Ecuaţiile lui Maxwell

Aceste ecuaţii descriu cîmpul electromagnetic dintr-un mediu material.

Presupunem că $\vec{E}(x, y, z, t)$ reprezintă intensitatea cîmpului electric (cu componentele scalare E_1, E_2, E_3) şi $\vec{H}(x, y, z, t)$ este intensitatea cîmpului magnetic (cu componentele H_1, H_2, H_3). Fie $\vec{I}(x, y, z, t)$ densitatea curentului de conducţie, $\rho(x, y, z)$ densitatea de sarcină, ε constanta dielectrică a mediului şi μ permeabilitatea magnetică a mediului. Aceste mărimi verifică în fiecare punct al mediului considerat şi la fiecare moment următorul sistem de ecuaţii, care poartă numele generic de **ecuaţiile lui Maxwell** (stabilite în 1860):

$$\mathrm{div}(\varepsilon\vec{E}) = 4\pi\rho \qquad (7_1)$$

$$\mathrm{div}(\mu\vec{H}) = 0 \qquad (7_2)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mu\vec{H}) \qquad (7_3)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\vec{E}\right) + \frac{4\pi}{c}\vec{I} \qquad (7_4)$$

[De fapt numai (7_1) şi (7_2) sînt datorate lui Maxwell; ecuaţia (7_3) este datorată lui Faraday iar (7_4) aparţine lui Ampère; Maxwell a introdus pentru

prima dată operatorii "div", "rot"]. Constanta $c = 3.10^{10}$ cm/s reprezintă viteza de propagare a luminii în vid.

Bineînțeles, nu ne propunem stabilirea ecuațiilor lui Maxwell. Considerăm cîteva cazuri particulare :

1) Să presupunem că $\rho \equiv 0$, ε = constant, μ constant, şi $\vec{\mathrm{I}} = \lambda\vec{\mathrm{E}}$ (legea lui Ohm, unde λ este o constantă).

În acest caz sistemul anterior devine

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = 0 \\ \operatorname{div}\vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \dfrac{4\pi\lambda}{c}\vec{E} \end{cases}$$

Rezultă

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = -\frac{\mu}{c}\operatorname{rot}(\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}) = -\frac{\mu}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{H}) =$$

$$= -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\lambda}{c}\vec{E}\right) = -\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\lambda\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Dar $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$. Atunci fiecare din componentele E_1, E_2, E_3 va verifica **ecuația telegrafiştilor**, anume

$$\Delta E_k = \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 E_k}{\partial t^2} + \frac{4\pi\lambda\mu}{c^2}\frac{\partial E_k}{\partial t}, \quad 1 \le k \le 3.$$

În mod similar,

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{H}) = \operatorname{rot}\left(\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\lambda}{c}\vec{E}\right) = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{E}) + \frac{4\pi\lambda}{c}\operatorname{rot}\vec{E} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right) + \frac{4\pi\lambda}{c}\left(-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right) = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\lambda\mu}{c^2}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}.$$

Pe de altă parte, $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{H}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{H}) - \Delta\vec{H} = -\Delta\vec{H}$ şi ca atare, componentele lui H verifică şi ele ecuația telegrafiştilor.

2) Să presupunem acum că $\vec{I} = 0$, ε = constant, μ = constant şi că mediul este simplu conex. În acest caz sistemul lui Maxwell devine

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = 4\dfrac{\pi\rho}{\varepsilon} \\ \operatorname{div}\vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Deoarece $\vec{H}$ este un cîmp solenoidal, el va fi un cîmp de rotori $\vec{H} = \dfrac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{w}$.

Atunci $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{w}) = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\left(\frac{\partial\vec{w}}{\partial t}\right)$, deci $\operatorname{rot}(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{w}}{\partial t}) = 0$ şi există un cîmp scalar w_0 astfel încît $\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{w}}{\partial t} = -\operatorname{grad} w_0$ deci $\vec{E} = -\operatorname{grad} w_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{w}}{\partial t}$. [Perechea $(w_0, \vec{w})$ se mai numeşte **cuadrivectorul potenţialelor** cîmpului electromagnetic.]. Cîmpurile $\vec{w}$, w_0 pot fi alese astfel încît să fie satisfăcută condiţia

$$\operatorname{div}\vec{w} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial w_0}{\partial t} = 0$$

Atunci din ecuaţia $\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\frac{\rho}{\varepsilon}$ rezultă $\operatorname{div}\left(-\operatorname{grad} w_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{w}}{\partial t}\right) = 4\pi\frac{\rho}{\varepsilon}$ adică $-\Delta w_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\vec{w}) = 4\pi\frac{\rho}{\varepsilon}$ sau $-\Delta w_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial w_0}{\partial t}\right) = 4\pi\frac{\rho}{\varepsilon}$. Aşadar w_0 verifică ecuaţia undelor, anume $\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \Delta w_0 = 4\pi\frac{\rho}{\varepsilon}$, care este o ecuaţie de tipul (3).

3) În cazul electrostatic (adică $\vec{H} = 0$ şi $\vec{E}$ nu depinde de timp), ecuaţiile lui Maxwell devin

$$\operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}) = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = 0$$

În acest caz $\vec{E} = -\operatorname{grad} w_0$ şi dacă ε este constant, potenţialul w_0 verifică ecuaţia lui Poisson $\Delta w_0 = -4\pi\frac{\rho}{\varepsilon}$.

În fine, în cazul magnetostatic (deci $\vec{E} = 0$ şi $\vec{H}$ nu depinde de timp), rezultă $\operatorname{div}(\mu\vec{H}) = 0$ şi $\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{I}$.

În teoria cîmpurilor se pune adeseori problema determinării cîmpurilor cu divergenţa şi rotorul cunoscute, motivat de studiul ecuaţiilor lui Maxwell.

1.4. Ecuaţia lui Schrödinger

Să considerăm o particulă de masă m aflată în mişcare sub acţiunea unui cîmp extern de forţe cu potenţialul $V(\underline{x})$. Dacă $\psi(\underline{x}, t)$ este funcţia de undă (deci pentru orice compact bordat $K \subset \mathbb{R}^n$, integrala $\int_K |\psi(\underline{x}, t)|^2 \, d\underline{x}$ reprezintă probabilitatea ca particula să se afle în K la momentul t), atunci funcţia $\psi(\underline{x}, t)$ satisface **ecuaţia lui Schrödinger** :

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + V\psi \qquad (8)$$

unde h este constanta lui Planck. Dacă energia E a particulei are o valoare dată (adică starea particulei este staţionară), atunci funcţia de undă este de forma

$$\psi(\underline{x}, t) = \psi(\underline{x})e^{-\frac{i}{h}Et}$$

şi funcţia $\psi(\underline{x})$ va satisface ecuaţia staţionară a lui Schrödinger :

$$-\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + V\psi = E \qquad (8')$$

OBSERVAȚIE. Să considerăm ecuaţia undelor $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = f(x, y, z, t)$. Să presupunem că membrul drept este o funcţie continuă periodică cu frecvenţa ω şi amplitudinea $A(x, y, z)$ adică $f(x, y, z, t) = A(x, y, z)e^{i\omega t}$ şi căutăm soluţii periodice, cu aceeaşi frecvenţă $u(x, y, z, t) = v(x, y, z)e^{i\omega t}$. Atunci $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 v e^{i\omega t}$ şi $\Delta u = e^{i\omega t}\Delta v$ şi înlocuind în ecuaţia undelor, se obţine $-\omega^2 v e^{i\omega t} - a^2 e^{i\omega t}\Delta v = Ae^{i\omega t}$, adică $a^2\Delta v + \omega^2 v = A$. Se obţine o ecuaţie de forma

$$\Delta v + k^2 v = g(x, y, z), \text{ unde } k = \text{constant} \quad (9)$$

numită **ecuaţia lui Helmholtz**. Se observă legătura strînsă cu ecuaţia (8′).

În cele de mai sus, am pus în evidenţă mai multe tipuri de ecuaţii cu derivate parţiale, obţinute în legătură cu descrierea unor procese fizice. Trecem acum la studiul lor mai sistematic şi la prezentarea unor metode matematice de rezolvare.

§2. Ecuaţii cvasiliniare de ordinul 2

2.1. Clasificarea ecuaţiilor cvasiliniare de ordinul 2

DEFINIȚIA 2.1. Se numeşte **ecuaţia cvasiliniară de ordin II** în mulţimea deschisă $D \subset \mathbb{R}^n$ o ecuaţie de forma

$$\sum_{1\le i,\, j\le n} a_{ij}(\underline{x})\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial k_j} + G(\underline{x}, u\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0$$

unde $a_{ij} = a_{ji}$ sînt funcţii continue $D \to \mathbb{R}$ şi funcţia G este continuă în argumentele ei, pentru $\underline{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in D$. Necunoscuta este o funcţie $u \in C^2(D)$; în unele consideraţii soluţia se caută în clasa distribuţiilor.

O suprafaţă $S \subset D$ de ecuaţie $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ se numeşte **caracteristică a ecuaţiei** (1) dacă φ este de clasă $C^1(D)$ şi $(\forall)$ $\underline{x} \in S$, avem $\nabla\varphi(\underline{x}) \neq 0$ şi

$$\sum_{1\le i,\, j\le n} a_{ij}(\underline{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\underline{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(\underline{x}) = 0 \qquad (2)$$

Clasificarea ecuaţiilor de tipul (1) se face în fiecare punct $x_0 \in D$ în parte.

Anume, se consideră forma pătratică $q(x_0)$ asociată matricei simetrice $S = (a_{ij}(x_0))$. Ecuaţia (1) se numeşte: de **tip eliptic** în x_0 dacă $q(x_0)$ este pozitiv sau negativ definită (deci S are toate valorile proprii > 0, sau toate < 0); de **tip hiperbolic** (în x_0) dacă $q(x_0)$ este nedefinită (S nesingulară şi are valori proprii atît strict pozitive cît şi strict negative). Ecuaţia (1) este de **tip parabolic** în x_0 dacă matricea S este singulară (adică admite valoarea proprie 0).

NOTĂ. Terminologia este pur convenţională (deoarece nu se folosesc elipse, hiperbole sau parabole).

EXEMPLE. 1) Să considerăm ecuația undelor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0, \ a > 0 \text{ constant pentru } (t, \underline{x}) \in D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

În acest caz suprafețele caracteristice au ecuația $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$ unde

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 - a^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 = 0$$

Printre aceaste se află conurile de ecuație $a^2(t - t_0)^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - c_i)^2 = 0$, cu vîrful $(t_0, c_1, \ldots, c_n)$. În orice punct, matricea simetrică asociată este

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & -a^2 & & & \\ & & -a^2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & -a^2 \end{pmatrix}$$

şi valorile proprii sînt 1 şi $-a^2$ deci ecuația este de tip hiperbolic.

2) Ecuația Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$ nu are suprafețe caracteristice reale şi este de tip eliptic (în fiecare punct din $\mathbb{R}^n$).

3) Ecuația căldurii $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = 0$ este de tip parabolic (în orice punct din $\mathbb{R}^{n+1}$).

Considerăm acum cazul $n = 2$; cu notații puțin schimbate ecuația (1) este de forma

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (3)$$

Necunoscuta este $u = u\,(x, y)$, de clasă $C^2(D)$ unde $D \subset \mathbb{R}^2$. Caracteristicile sînt în acest caz curbe plane nesingulare $\Gamma : \varphi\,(x, y) = 0$ situate în D, astfel încît

$$A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Fie $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma$ un punct fixat şi presupunem că $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, u_0) \neq 0$. Atunci conform TFI, curba Γ are o ecuație $y = y(x)$ în vecinătatea punctului M_0. Din relația $\varphi(x, y\,(x)) = 0$ rezultă $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0$ deci $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} y'$ şi ca atare,

$$A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 y'^2 - 2B\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 y' + C\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0, \text{ de unde } Ay'^2 - 2By' + C = 0$$

sau

$$A\mathrm{d}y^2 - 2B\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + C\,\mathrm{d}x^2 = 0 \qquad (4)$$

Aceasta este ecuaţia diferenţială a curbelor caracteristice ale ecuaţiei (3). Pentru orice punct $(x, y) \in D$, matricea simetrică asociată ecuaţiei (3) este

$$S = \begin{pmatrix} A(x,y) & B(x,y) \\ B(x,y) & C(x,y) \end{pmatrix}$$

Valorile proprii λ_1, λ_2 verifică ecuaţia $\lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - B^2 = 0$. Dacă $AC - B^2 = 0$, atunci ecuaţia (3) este de tip parabolic în punctul (x, y). Dacă $AC - B^2 > 0$, atunci $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ şi ecuaţia (5) este de tip eliptic, iar dacă $AC - B^2 < 0$, atunci ecuaţia (3) este de tip hiperbolic.

2.2. Metode de rezolvare a ecuaţiilor cvasiliniare de ordinul II

a) **Metode elementare directe**

Acestea se pot aplica numai pentru ecuaţii foarte simple.

Ecuaţia $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ se scrie echivalent $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$ deci $\frac{\partial u}{\partial y}$ este constantă în raport cu x deci este o funcţie arbitrară de y, $\frac{\partial u}{\partial y} = f(y)$. Atunci

$u(x, y) = \int_{y_0}^{y} f(y)\,dy + \varphi(x)$ deci u este suma unei funcţii arbitrare de x cu o funcţie arbitrară de y, $u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$, cu φ, ψ de clasă C^2. Aceasta este soluţia generală a ecuaţiei $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.

În mod similar, ecuaţia $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ se scrie $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$ deci $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(y)$ şi $u(x, y) = x\varphi(y) + \psi(y)$ cu φ, ψ funcţii arbitrare.

Dăm încă un exemplu. Ne propunem să determinăm funcţiile armonice în $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ care au simetrie centrală, adică sînt de forma

$$u = u(r) \quad \text{unde } r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \|x\|.$$

În acest caz,

$$\Delta u = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u(r)) = \operatorname{div}\left(u'(r)\frac{x_1}{r}, \ldots, u'(r)\frac{x_n}{r}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(u'(r)\frac{x_1}{r}\right) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(u'(r)\frac{x_n}{r}\right) = u''(r)\frac{x_1^2}{r^2} + u'(r)\frac{r^2 - x_1^2}{r^3} + \ldots$$

$$\ldots + u''(r)\frac{x_n^2}{r^2} + u'(r)\frac{r^2 - x_n^2}{r^3} = u''(r) + u'(r)\frac{n-1}{r}.$$

Din ecuaţia $\Delta u = 0$ rezultă $\frac{u''(r)}{u'(r)} = -\frac{n-1}{r}$ deci $u'(r) = \frac{C}{r^{n-1}}$. Dacă $n = 1$, atunci $u(r) = Cr + C_1$. Dacă $n = 2$, atunci $u(r) = C \ln r + C_1$, iar dacă $n \geq 3$, re-

zultă $u(r) = C\frac{1}{r^{n-2}} + C_1$ cu C, C_1 constante arbitrare. [Pentru $n = 2$, funcția armonică fundamentală este $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ și pentru $n = 3$,

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}].$$

b) **Metoda reducerii la forma canonică**

Ne restrîngem la cazul $n = 2$ și considerăm ecuația (3), în care A, B, C sînt presupuse funcții de clasă C^2 într-un deschis $D \subset \mathbb{R}^2$, cu $A \neq 0$ [cazul $C \neq 0$ este similar iar cazul $A \equiv 0$, $C \equiv 0$ se reduce la cel anterior făcînd schimbarea de variabile independente $(x, y) \to (\xi, \eta)$ unde $\xi = x + y$, $\eta = x - y$].

Să facem o schimbare de variabile independente

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \qquad (5)$$

cu ξ, η de clasă C^2 și $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$. Un calcul imediat arată că ecuația (3) devine de forma

$$A_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C_1\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + G_1(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0 \qquad (6)$$

unde

$$A_1 = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2$$

$$B_1 = A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$C_1 = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2.$$

Dacă ecuația este de tip hiperbolic, atunci din ecuația (4) a caracteristicilor rezultă două familii de curbe caracteristice $\xi(x, y) = C_1$, $\eta(x, y) = C_2$ și pentru ele avem $A_1 \equiv 0$, $C_1 \equiv 0$. Așadar, făcînd schimbarea (5) se obține o ecuație de forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = G_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \qquad (7)$$

numită **forma canonică** a ecuațiilor de tip hiperbolic. Dacă ecuația este de tip parabolic, atunci ecuația (4) determină o singură familie de curbe caracteristice $\xi(x, y) = C_1$; făcînd schimbarea de variabile $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = x$, ecuația (3) devine de forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = G_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \qquad (8)$$

numită **forma canonică** (pentru cazul parabolic).

În cazul eliptic, ecuația (4) va avea soluții de tipul $\varphi(x, y) \pm i\psi(x, y) = C$ și se face schimbarea de variabile $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$. Ecuația (6) va căpăta forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=G_2\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \qquad (9)$$

Nu dăm mai multe detalii.

EXEMPLE. 1) Să considerăm ecuația oscilațiilor libere ale unei coarde vibrante omogene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x\in[A,B],\ t\in[0,T]$$

Ecuația curbelor caracteristice este conform (4), $dx^2-a^2dt^2=0$, adică $(dx+a\,dt)(dx-a\,dt)=0$ și are soluțiile $x+at=c_1$, $x-at=c_2$. Se recomandă atunci schimbarea de variabile $\xi=x+at$, $\eta=x-at$. Ecuația devine $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$ și va avea soluția generală $u=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$ adică $u=\varphi(x+at)+\psi(x-at)$ cu φ, ψ funcții arbitrare (de clasă C^2).

Funcțiile $v_1(t,x)=\varphi(x+at)$ și $v_2(t,x)=\psi(x-at)$ reprezintă mișcări ale coardei, ce pot fi descrise ca unde deplasîndu-se cu viteza a spre dreapta și respectiv spre stînga.

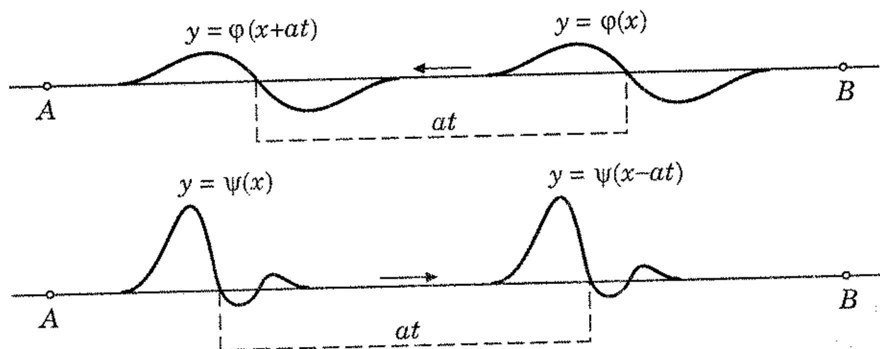


Figura IX.2.

Ecuația coardei singură nu determină mișcarea ei în mod univoc și trebuie adăugate atît condiții inițiale (care indică poziția și viteza coardei la un moment dat) cît și condiții la frontieră (care se referă la mișcarea coardei la capete). De exemplu, funcțiile φ, ψ și ca atare, $u(x,t)$ pot fi determinate dacă se pun condițiile $u(x,0)=u_0(x)$ și $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x)$ cu u_0 și u_1 funcții date; aceasta revine la rezolvarea sistemului $\varphi(x)+\psi(x)=u_0(x)$ și

$\varphi'(x)a-\psi'(x)a=u_1(x)$, $\forall x\in[A,B]$ ceea ce este imediat.

2) Fie ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

Ecuația caracteristicilor este $dy^2-4dx\,dy+5dx^2=0$ sau $y'^2-4y'+5=0$ de unde $y'=2\pm i$. Rezultă $y=(2\pm i)x+C$, adică $y-2x\pm xi=C$. Se recomandă

schimbarea de variabile $\xi = y - 2x$, $\eta = x$ și ecuația se reduce la forma canonică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$$

Am văzut că reducerea la forma canonică a ecuațiilor cvasiliniare se realizează prin schimbări de variabilă convenabile, obținute cu ajutorul curbelor caracteristice. Dar există și alte schimbări de variabile utilizate în studiul ecuațiilor cu derivate parțiale, unele fiind sugerate de simetriile existente în natura fizică a problemeni. Astfel, trecerile la coordonate polare în plan sau la coordonate sferice (sau cilindrice) în spațiu sînt utile în cazul unor simetrii centrale (și respectiv axiale). În acest sens, reamintim expresia operatorului Δ al lui Laplace în coordonate sferice r, θ, φ și respectiv cilindrice ρ, φ, z (stabilită la pag 243) :

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

În coordonate polare (ρ, θ în plan), avem

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Așa cum am văzut, pentru buna determinare a soluțiilor sînt necesare condiții la capete, condiții inițiale sau condiții la frontieră, în funcție de contextul fizic.

c) **Metoda separării variabilelor**

Dacă se știe apriori (fie din teoreme de existență și unicitate, fie din considerații fizice) că o anumită problemă are soluție și aceasta este unică, atunci nu contează metoda prin care este obținută această soluție. În acest sens, vom ilustra **metoda separării variabilelor** (atribuită lui Fourier) pentru rezolvarea unor ecuații cu derivate parțiale cu condiții suplimentare.

Subliniem că această metodă este însoțită adeseori de aplicarea "principiului suprapunerii efectelor".

Rezolvarea problemei lui Dirichlet pentru discul unitate

Să considerăm discul unitate raportat la reperul ortogonal xOy. Așadar $D = \{x^2 + y^2 < 1\}$ și fie $\Gamma = \overline{D} \setminus D$ frontiera orientată pozitiv a lui D. Problema Dirichlet constă în a determina o funcție continuă $u(x, y)$, $u: \overline{D} \to \mathbb{R}$ care să fie armonică în $D(\Delta u = 0)$ și astfel încît $u \mid \Gamma$ să ia valori prescrise.

Să arătăm că această problemă admite o soluție unică. Într-adevăr, fie u_1, u_2 două soluții și $v = u_1 - u_2$. Atunci $\Delta v = 0$ în D și $v \mid \Gamma = 0$. Aplicînd formula Green-Riemann, rezultă

$$\int_\Gamma \left(-v\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x + v\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y\right) = \iint_{\overline{D}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_D\left[v\Delta v + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

Ținînd cont că $v\,|_\Gamma = 0$ și $\Delta v = 0$ în D, rezultă

$$\iint_D\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = 0$$

deci $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \equiv 0$ ($\equiv$ înseamnă egalitate în fiecare punct). Atunci $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ deci v este constantă în D, $v = k$. Fiind continuă în $\overline{D}$, v va fi egală cu k și în punctele lui Γ deci $k = 0$ deci $v \equiv 0$ și ca atare $u_1 = u_2$ în D.

Din cauza simetriei centrale (relativ la 0) a problemei, se recomandă trecerea la coordonate polare (ρ, θ) în plan; figura IX. 3.

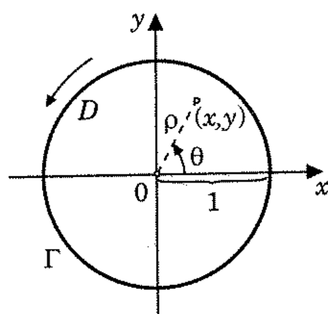


Figura IX. 3.

Problema se reformulează astfel: trebuie determinată o funcție $u(\rho, \theta)$, $(\rho, \theta) \in [0, 1]\times\mathbb{R}$ astfel încît

$$\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \rho\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0 \qquad (10)$$

pentru $\rho \in [0, 1]$, $\theta \in \mathbb{R}$ și în plus $u(\rho, 0)\,|_{\rho=1} = f(\theta)$ cu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cunoscută, presupusă continuă, nenulă, periodică de perioadă 2π. (Dacă $f \equiv 0$, atunci $u \equiv 0$).

Unicitatea soluției fiind demonstrată, nu contează prin ce mijloace se obține acea soluție. Aplicăm metoda separării variabilelor, căutînd soluții de forma

$$u(\rho, \theta) = X(\rho)Y(\theta) \qquad (11)$$

cu X și Y funcții de clasă C^2 (și Y neapărat periodică de perioadă 2π). Atunci

$$\frac{\partial u}{\partial\rho} = X'(\rho)Y(\theta),\ \frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} = X''(\rho)Y(\theta) \text{ și } \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = X(\rho)Y''(\theta)$$

și înlocuind în ecuația dată, rezultă $\rho^2X''(\rho)Y(\theta) + \rho X'(\rho)Y(\theta) + X(\rho)Y''(\theta) = 0$ sau "separînd variabilele",

$$\frac{\rho^2X''(\rho) + \rho X'(\rho)}{X(\rho)} = -\frac{Y''(\theta)}{Y(\theta)} \qquad (12)$$

LEMĂ. Presupunem că $u : I \to \mathbb{R}$, $v : J \to \mathbb{R}$ sînt funcții definite pe intervale astfel încît $u(x) = v(y)$ pentru orice $x \in I$ și $y \in J$.

Atunci ambele funcții sînt constante, egale cu aceeași constantă k.

Demonstrație. Fixăm $y_0 \in J$ și notăm $v(y_0) = k$. Conform ipotezei rezultă $u(x) = v(y_0) = k$ pentru orice $x \in I$. Apoi $v(y) = u(x) = k$ pentru orice $y \in J$.

Aplicînd această lemă relației (12), rezultă că ambii membrii sînt egali cu aceeași constantă reală k deci

$$\rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho) - kX(\rho) = 0$$

și

$$Y''(\theta) + kY(\theta) = 0 \text{ pentru } \rho \in [0, 1) \text{ și } \theta \in \mathbb{R}.$$

Dacă $k < 0$, din ecuația diferențială $Y''(\theta) + kY(\theta) = 0$ va rezulta

$$Y(\theta) = C_1 e^{\theta\sqrt{-k}} + C_2 e^{-\theta\sqrt{-k}}$$

cu C_1, C_2 constante și aceasta este periodică doar dacă $C_1 = C_2 = 0$ adică $Y \equiv 0$ și f ar rezulta nulă, din nou caz exclus.

Rămîne ca unică posibilitate $k \geq 0$, $k = \omega^2$ $(\omega \geq 0)$ ecuația $Y''(\theta) + \omega^2 Y(\theta) = 0$ are o soluție $Y(\theta) = A\cos\omega\theta + B\sin\omega\theta$, cu A, B constante. Funcția $Y(\theta)$ fiind periodică de perioadă 2π rezultă în mod necesar că $\omega = n$, întreg $(n \geq 0)$.

Atunci

$$Y(\theta) = A\cos n\theta + B\sin n\theta$$

Pe de altă parte, rezultă $k = n^2$ și $\rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho) - n^2 X(\rho) = 0$. Aceasta este ecuație Euler și căutăm pentru ea soluții de forma $X(\rho) = \rho^p$; rezultă $p(p-1) + p - n^2 = 0$ deci $p = \pm n$ și soluția ei generală este $X(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n}$, cu C, D constante. Dacă $D \neq 0$, atunci făcînd $\rho \to 0$ ar rezulta că $X(\rho) \to \pm\infty$ și ar rezulta că funcția armonică $u(\rho, \theta)$ ar tinde către infinit spre centrul discului, ceea ce este exclus. Așadar, $D = 0$ și $X(\rho) = C\rho^n$.

În acest mod, pentru orice întreg $n \geq 0$ am pus în evidență cîte o soluție (11) a ecuației (10), anume

$$u_n(\rho, \theta) = \rho^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

Aplicăm "principiul suprapunerii efectelor" care afirmă că suma seriei $\sum_{n\geq 0} u_n(\rho, \theta)$ este de asemenea soluție (în ipoteza convergenței).

Așadar, funcția

$$u(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \qquad (13)$$

este soluție și rămîne să determinăm constantele A_n, B_n, din condiția la frontieră $u(\rho,\theta)\big|_{\rho=1} = f(\theta)$, adică

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

Aceasta fiind de fapt dezvoltarea Fourier a lui f, rezultă

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\,d\varphi,\ A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi,\ B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi\ (n \geq 1)$$

Înlocuind în (13), rezultă $u(\rho,\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\theta - \varphi)\right] d\varphi$

Dar

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cos n(\theta-\varphi)=\operatorname{Re}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n e^{in(\theta-\varphi)}\right]=$$

$$=\operatorname{Re}\left[1+2\frac{\rho e^{i(\theta-\varphi)}}{1-\rho e^{i(\theta-\varphi)}}\right]=\operatorname{Re}\frac{1+\rho e^{i(\theta-\varphi)}}{1-\rho e^{i(\theta-\varphi)}}=\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}$$

şi soluția explicită a problemei Dirichlet pentru discul unitate este

$$u(\rho,\theta)=\frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\varphi)d\varphi}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}$$ **(formula clasică a lui Poisson).**

În cazul discului $\{x^2+y^2\le R^2\}$ de rază $R>0$, după un raționament similar, formula devine

$$u(\rho,\theta)=\frac{R^2-\rho^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\varphi)\,d\varphi}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}.$$

Oscilațiile unei coarde vibrante prinse la capete

Să considerăm o coardă vibrantă prinsă la capetele unui interval $[0, L]$ de pe axa Ox, care oscilează într-un plan xOu fără viteză inițială şi care la un moment dat $t=0$ poate fi identificată cu graficul G al unei funcții continue nenule $u=f(x)$, $f:[0,L]\to\mathbb{R}$.

Notăm cu $u(x, t)$ ordonata la momentul t a punctului de pe coardă care corespunde abscisei $x\in[0, L]$. Condițiile impuse se traduc matematic în:

$$u(0,t)=0,\ \ u(L,t)=0 \qquad (14)$$

pentru orice t (**condiții la capete**, exprimînd că avem o coardă prinsă la capete);

$$u(x,0)=f(x) \text{ şi } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0 \text{ pentru orice } x\in[0,L] \qquad (15)$$

(**condiții inițiale**).

Presupunem în plus coarda omogenă şi ne propunem să studiem oscilațiile libere ale coardei; aşadar funcția $u(x, t)$ satisface pentru $(x,t)\in[0,L]\times[0,\infty)$ ecuația cvasiliniară de tip hiperbolic :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (a>0 \text{ constant}) \quad (16)$$

Problema fiind bine determinată fizic, admite soluție unică (de fapt ar trebui arătat matematic, aşa cum am făcut în cazul problemei Dirichlet, că problema (14) + (15) + (16) are soluție unică; nu dăm detalii). Pentru a determina soluția ei, aplicăm metoda separării variabilelor. Căutăm soluții pentru ecuația (16) de tipul $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$ deci $X''(x)T(t)=\frac{1}{a^2}X(x)T''(t)$ şi

$$\frac{X''}{X}=\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}=k, \text{ constant (conform lemei anterioare).}$$

Dacă $k=0$, atunci $X''=0$ şi $X(x)=mx+n$. Dar din (14) rezultă $X(0)=0$ şi $X(L)=0$ deci $m=n=0$ şi ar rezulta $u\equiv 0$, exclus (căci $f\neq 0$). Dacă $k>0$,

atunci din ecuația $X'' - kX = 0$ rezultă $X(x) = C_1 e^{x\sqrt{k}} + C_2 e^{-x\sqrt{k}}$ cu C_1, C_2 constante. Deoarece $X(0) = X(L) = 0$, rezultă $C_1 = C_2 = 0$ și din nou $u \equiv 0$, exclus.

Rămîne ca unică posibilitate $k < 0$ deci $X(x) = C_1 \cos x\sqrt{-k} + C_2 \sin x\sqrt{-k}$.

Din $X(0) = 0$ rezultă $C_1 = 0$ și din condiția $X(L) = 0$ rezultă $C_2 \sin L\sqrt{-k} = 0$.

Deoarece $X \neq 0$, rezultă $C_2 \neq 0$ deci $\sin L\sqrt{-k} = 0$ și ca atare $L\sqrt{-k} = n\pi$ cu $n \in \mathbb{Z}$. Așadar, $k = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ și $X(x) = C_2 \sin\frac{n\pi x}{L}$.

Pe de altă parte, $\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = k$ deci $T'' + \frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}T = 0$ și $T(t) = D_1 \cos\frac{n\pi a}{L}t + D_2 \sin\frac{n\pi a}{L}t$ cu D_1, D_2 constante. Așadar, pentru orice întreg $n \geq 1$ am obținut cîte o soluție a ecuației (16) satisfăcînd condițiile (14); anume

$$u_n(x, t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\left(A_n \cos\frac{n\pi a t}{L} + B_n \sin\frac{n\pi a t}{L}\right)$$

Aplicînd principiul suprapunerii efectelor, o soluție a problemei (14) + (16) este

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{L}\left(A_n \cos\frac{n\pi a t}{L} + B_n \sin\frac{n\pi a t}{L}\right)$$

și rămîne să determinăm constantele A_n, B_n din condițiile inițiale (15).

Deoarece $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\big|_{t=0} = 0$, rezultă $B_n = 0$ și apoi $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}$ deci

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(y)\sin\frac{n\pi y}{L}\,dy.$$

Am determinat deci într-o formă analitică poziția coardei la fiecare moment t; anume

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi a t}{L}, \text{ cu } A_n \text{ determinați anterior.}$$

INTERPRETARE FIZICĂ.

Fiecare "vibrație armonică $u_n(x, t) \equiv A_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi a t}{L}$, $n \geq 1$ descrie cîte una din mișcările coardei și are frecvența proprie $\frac{n\pi a}{L}$ și amplitudinea $A_n \sin\frac{n\pi x}{L}$ (unde $\lim_{n\to\infty} A_n = 0$). Punctele $0, \frac{L}{n}, \frac{2L}{n}, \frac{3L}{n}, \ldots, L$ în care se anulează amplitudinea se numesc **noduri** iar punctele în care amplitudinea este extremă se numesc **ventre.** Vibrația armonică $u_1(x, t)$ cu frecvența minimă $\frac{\pi a}{L}$ se numește **tonul fundamental** al coardei, iar $\{u_n(x, t)\}_{n\geq 2}$ se numește **șirul armonicelor**. Soluția problemei puse este așadar obținută prin supra-

punerea tonului fundamental și a armonicelor, acțiunea lor totală formînd timbrul sunetului emis de coardă.

Distribuția temperaturii staționare a unei bile sferice

Fie o sferă materială omogenă de centru O și rază R. Alegem un reper ortogonal $Oxyz$ și notăm cu $u(x, y, z, t)$ temperatura în punctul (x, y, z) al bilei sferice închise și la momentul t. Ecuația propagării căldurii este $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$ conform ecuației (5')). Condiția de staționaritate a temperaturii înseamnă că u nu depinde de t și ca atare $\Delta u = 0$.

Ne propunem să determinăm distribuția temperaturii (adică expresia funcției u), în ipoteza că u nu depinde de φ și că la suprafața sferei $u = u_0 \sin^2 \theta$ cu u_0 = constant. Matematic, aceasta revine la a rezolva ecuația lui Laplace $\Delta u = 0$ știind că u nu depinde de φ și că $u\big|_{r=R} = u_0 \sin^2 \theta$. În coordonate sferice avem

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

și problema revine la a determina funcția $u(r, \theta)$ știind că

$$\sin\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta\right) = 0 \qquad (17)$$

pentru $0 \le r \le R$, $\theta \in [0, \pi]$ și are loc condiția la frontieră

$$u(R, \theta) = u_0 \sin^2 \theta,\ (\forall)\, \theta \in [0, \pi] \qquad (18)$$

Aplicăm din nou metoda separării variabilelor, căutînd necunoscuta de forma :

$$u = X(r)Y(\theta)$$

Înlocuind în (17) obținem :

$$Y(\theta)\sin\theta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2 X'(r)) + X(r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(Y'(\theta)\sin\theta) = 0$$

deci $Y(\theta)\sin\theta(2rX'(r) + r^2 X''(r)) + X(r)(Y''(\theta)\sin\theta + Y'(\theta)\cos\theta) = 0$, de unde

$$\frac{r^2 X''(r) + 2rX'(r)}{X(r)} = -\frac{Y''(\theta)\sin\theta + Y'(\theta)\cos\theta}{Y(\theta)\sin\theta} = k.$$

Pe de altă parte, se obține ecuația diferențială

$$Y''(\theta) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}Y'(\theta) + kY = 0 \qquad (19)$$

Dar să reamintim (vezi pag. 344) că pentru ecuația Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ (λ parametru real), se obțin soluții mărginite pe intervalul $[-1, 1]$ numai dacă $\lambda = n(n + 1)$ cu $n \ge 0$ întreg și în acest caz soluția este $y = P_n(x)$ (pînă la o constantă multiplicativă). Dacă facem schimbarea de variabilă $x = \cos\theta$, atunci

$$y'(x) = -\frac{y'(\theta)}{\sin\theta} \text{ și } y''(x) = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{y'(\theta)}{\sin\theta}\right) = \frac{y''(\theta)\sin\theta - y'(\theta)\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

şi ecuaţia anterioară devine $y''(\theta)+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}y'(\theta)+\lambda y=0$. Comparînd cu ecuaţia (19) obţinem în mod necesar $k=n(n+1)$ şi $Y(\theta)=P_n(\cos\theta)$, $n\in\mathbb{N}$.

Pe de altă parte obţinem $r^2X''+2rX'-kX=0$ cu $k=n(n+1)$, care este o ecuaţie Euler; căutăm soluţii de forma $X(r)=r^p$ deci $p^2-p+2p-n(n+1)=0$, de unde $p_1=n$ şi $p_2=-(n+1)$ şi ecuaţia are soluţia generală $X(r)=C_1r^n+C_2r^{-n-1}$ cu C_1, C_2 constante arbitrare. Deoarece pentru $r\to 0$ (spre origine) temperatura este finită, rezultă în mod necesar $C_2=0$.

Aşadar, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, ecuaţia (17) admite soluţia $u_n(r,\theta)=A_nr^nP_n(\cos\theta)$ şi aplicînd principiul suprapunerii efectelor, admite şi soluţia

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nr^nP_n(\cos\theta),$$

unde P_n este polinomul Legendre de grad n. Punînd condiţia la frontieră (18) avem pentru $r=R$, $u_0\sin^2\theta=\sum_{n=0}^{\infty}A_nR^nP_n(\cos\theta)$

Făcînd înlocuirea $\cos\theta=x$, rezultă $u_0(1-x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nR^nP_n(x)$. Înmulţind cu $P_m(x)$ şi integrînd pe intervalul $[-1, 1]$, rezultă

$$A_mR^m\frac{2}{2m+1}=u_0\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_m(x)\,dx,\ (\forall)\,m\in\mathbb{N}$$

Se obţin imediat A_0, A_1, A_2 şi evident $A_m=0$ pentru $m\geq 3$. Soluţia finală a problemei puse este $u(r,\theta)=A_0+A_1r\cos\theta+A_2r^2\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right)$, cu A_0, A_1, A_2 aflaţi.

Am ilustrat anterior modul de utilizare a seriilor Fourier pentru rezolvarea unor ecuaţii ale fizicii matematice. Indicăm acum pe scurt o aplicaţie a transformării Fourier.

Propagarea căldurii într-o bară infinită

Să considerăm o "bară infinită" omogenă identificată cu dreapta reală.

Presupunem că temperatura $u(x,t)$ a barei în punctul $x\in\mathbb{R}$ şi la momentul t, $t\geq 0$ verifică ecuaţia $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$ şi condiţia iniţială $u(x,0)=u_0(x)$, $(\forall)\,x\in\mathbb{R}$. Presupunem că $u, u_0, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2u}{\partial x^2}$ sînt continue şi absolut integrabile pentru $x\in\mathbb{R}$, $t\geq 0$ şi că $\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|\leq\Phi(x)$, unde $\Phi\in L^1$.

Notăm cu $U(\omega,t)=\mathscr{F}\{u(x,t)\}$, transformata Fourier a lui u, considerînd t ca parametru. Atunci ecuaţia devine

$$\mathscr{F}\{\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\} = \mathscr{F}\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\} \quad \text{deci } \frac{dU}{dt} = -\omega^2 U$$

Aşadar, rezultă ecuația diferențială $\frac{dU}{dt} + \omega^2 U = 0$ (în care ω este parametru) şi condiția inițială devine $U(\omega, 0) = F_0(\omega)$, unde $F_0(\omega) = \mathscr{F}\{u_0(x)\}$.

Rezultă

$$U(\omega,t) = e^{-\omega^2 t}F_0(\omega) = \mathscr{F}\left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right\}\mathscr{F}\{u_0(x)\} = \mathscr{F}\left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x)\right\}$$

şi aplicînd formula de inversare (teor. 4.4. pag. 487) rezultă

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4t}}u_0(x-\xi)\,d\xi \overset{x-\xi=y}{=} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,dy$$

Să presupunem că

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0 & \text{constant} \quad \text{dacă } \alpha \le x \le \beta \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Atunci

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,dy$$

Să facem schimbarea de variabilă $\frac{x-y}{2\sqrt{t}} = v$ deci

$$u(x,t) = -\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x-\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\frac{x-\beta}{2\sqrt{t}}} e^{-v^2}dv$$

Notînd $\Phi(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^v e^{-x^2}\,dx$, rezultă în final :

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-\alpha}{2\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-\beta}{2\sqrt{t}}\right)\right]$$

§3. Funcții Bessel

Să presupunem că ne interesează distribuția $u(x,y,z)$ a temperaturii staționare într-un conductor cilindric omogen. Această problemă avînd simetrie axială, se recomandă trecerea la coordonate cilindrice pentru rezolvarea ecuației Laplace $\Delta u = 0$, adică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Aplicînd metoda separării variabilelor, căutăm soluții de forma $u = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$; înlocuind în ecuația anterioară, rezultă

$$(R''\Phi+\frac{1}{\rho}R'\Phi+\frac{1}{\rho^2}R\Phi'')Z+R\Phi Z''=0,$$

de unde $$\frac{(R''+\frac{1}{\rho}R')\Phi+\frac{1}{\rho^2}R\Phi''}{R\Phi}=-\frac{Z''}{Z}=k\text{, constant.}$$

Aşadar,

$$\left(R''+\frac{1}{\rho}R'\right)\Phi+\frac{1}{\rho^2}R\Phi''=kR\Phi \quad \text{de unde} \quad \left(R''+\frac{1}{\rho}R'-kR\right)\Phi=-\frac{1}{\rho^2}R\Phi''$$

şi ca atare, $\dfrac{\rho^2R''+\rho R'-k\rho^2R}{R}=-\dfrac{\Phi''}{\Phi}=k_1$, constant.

Se ajunge astfel în mod natural la ecuaţia diferenţială ordinară $\rho^2R''+\rho R'-(k\rho^2+k_1)R=0$, cu k, k_1 constante şi cu necunoscuta $R(\rho)$. Aceasta este o ecuaţie liniară omogenă de ordinul II, cu coeficienţi variabili, de un tip încă neîntîlnit, anume este o ecuaţie Bessel. Pentru importanţa deosebită a soluţiilor unei astfel de ecuaţii, ele necesită un studiu special, pe care îl facem în continuare, revenind ulterior la problema distribuţiei temperaturii în conductori cilindrici.

3.1. Definiţia şi proprietăţile funcţiilor Bessel (F.W. Bessel, 1784–1846)

DEFINIŢIA 2.1. Ecuaţia diferenţială liniară omogenă de ordin II

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \qquad (20)$$

cu ν parametru real, (putem presupune $\nu\geq 0$), se numeşte **ecuaţia lui Bessel** de indice ν. Soluţiile $y(x)$ nenule ale acestei ecuaţii se numesc **funcţii Bessel** (sau **cilindrice**).

Se poate observa că orice ecuaţie diferenţială de forma $x^2y''+axy'+(bx^n+c)y=0$ cu a, b, c, n constante poate fi adusă la forma (20), făcînd schimbarea de variabilă $x=t^{2/n}$ şi schimbarea de funcţie $y=t^mz$ cu m convenabil.

Căutăm soluţii pentru ecuaţia (20) de forma unor dezvoltări în serie de puteri :

$$y=x^r(c_0+c_1x+c_2x^2+\dots) \text{ cu } r \text{ real şi } c_0\neq 0. \qquad (21)$$

Înlocuind în (20) şi identificînd coeficienţii ($\sum_{k=0}^{\infty}d_kx^k=0\Rightarrow$ toţi $d_k=0$), rezultă relaţiile

$$(r^2-\nu^2)c_0=0$$
$$[(r+1)^2-\nu^2]c_1=0$$
$$\vdots$$
$$[(r+k)^2-\nu^2]c_k=-c_{k-2}$$

pentru orice $k \geq 2$.

Deoarece $c_0 \neq 0$, rezultă $r = \pm\nu$. Considerăm cazul $r = \nu$. Atunci $c_1 = 0,\ c_3 = 0, \ldots,\ c_{2k-1} = 0, \ldots$. Apoi, punînd $k = 2p$, din relația $[(r+k)^2 - \nu^2]c_k = -c_{k-2}$, rezultă $4p(p+\nu)c_{2p} = -c_{2p-2}$ pentru $p \geq 1$. Dînd lui p valorile $1, 2, \ldots, p$ și înmulțind relațiile obținute, rezultă după un calcul imediat $(-1)^p 4^p p!(\nu+1)\ldots(\nu+p)c_{2p} = c_0$ deci

$$c_{2p} = \frac{(-1)^p c_0}{2^{2p} p!(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+p)},\quad p \geq 1$$

Deoarece căutăm o singură soluție de forma (21) putem fixa o valoare pentru coeficientul c_0. Pentru comoditate se ia $c_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ deci

$c_{2p} = \dfrac{(-1)^p}{2^{2p+\nu} p!\Gamma(\nu+p+1)}$, pentru $p \geq 0$. Înlocuind în (21) se obține o primă soluție a ecuației lui Bessel (20), notată $y = J_\nu(x)$ unde

$$J_\nu(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\Gamma(\nu+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2p} \qquad (22)$$

Cazul $r = -\nu$ va conduce după calcule similare la soluția $J_{-\nu}(x)$ obținută înlocuind ν cu $-\nu$ în (22). Seria din membrul II al relației (22) are raza de convergență $R = \infty$ deci este uniform convergentă pe orice interval compact.

NOTĂ. Considerațiile anterioare se pot face și în domeniul complex.

Conform (22) avem $J_\nu(x) = x^\nu f(x^2)$, unde $f(z) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p z^p}{2^{2p+\nu} p!\Gamma(\nu+p+1)}$ este o funcție întreagă (raza de convergență fiind infinită). Pentru ν întreg, $J_\nu(x)$ este o funcție olomorfă, iar pentru $\nu \notin \mathbb{Z}$, $J_\nu(x)$ este multiformă. Se convine să se aleagă ramura cu proprietatea că dacă $x > 0$, atunci $x^\nu > 0$.

Dacă $\nu \notin \mathbb{Z}$, atunci funcțiile $J_\nu(x)$ și $J_{-\nu}(x)$ sînt liniar independente; într-adevăr, să observăm că

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}\left[1 + x\varphi_1(x)\right] \text{ și } J_{-\nu}(x) = \frac{x^{-\nu}}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}[1 + x\varphi_2(x)]$$

cu $\lim_{x\to 0} \varphi_1(x) = 0$ și $\lim_{x\to 0} \varphi_2(x) = 0$. Atunci dacă $aJ_\nu(x) + bJ_{-\nu}(x) = 0$ pentru orice x, rezultă $a = 0$, $b = 0$. Conform obs. 2 pag. 292, rezultă un prim rezultat important :

TEOREMA 3.1. Dacă $\nu \notin \mathbb{Z}$ atunci soluția generală a ecuației (20) **este $y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$ cu C_1, C_2 constante arbitrare.**

Dacă $\nu = n \in \mathbb{Z}$, atunci $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ deci funcțiile J_n și J_{-n} sînt liniar dependente; într-adevăr, deoarece $\Gamma(n) = \infty$ pentru $n = 0, -1, -2, \ldots$, rezultă

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k-n+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}=$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}=(-1)^n J_n(x)$$

Dacă $Y_n(x)$ este o soluție liniar independentă de $J_n(x)$ pentru ecuația (20), atunci soluția generală a ecuației va fi

$$y=C_1 J_n(x)+C_2 Y_n(x)$$

Din teoria generală se știe că o astfel de soluție Y_n există; dealtfel se poate lua $Y_n(x)=\lim\limits_{\nu\to n}\dfrac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$.

TEOREMA 3.2. Fie un întreg $n\geq 0$ și $Y_n(x)$ o soluție a ecuației (20) liniar independentă de $J_n(x)$. Atunci există și sînt finite următoarele limite:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{Y_0(x)}{\ln x}$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n Y_n(x)$, pentru $n\geq 1$

În particular, pentru orice întreg $n\geq 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}|Y_n(x)|=\infty$.

DEMONSTRAȚIE. Să notăm cu $W(x)$ wronskianul soluțiilor J_n și Y_n. Atunci pentru orice $x_0>0$ fixat și pentru orice $x>0$ rezultă cf. obs. 1, pag. 292

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{1}{x}dx}\quad\text{adică}\quad W(x)=\frac{x_0 W(x)}{x}$$

Așadar, pentru orice întreg $n\geq 0$ avem :

$$J_n(x)Y_n'(x)-J_n'(x)Y_n(x)=\frac{x_0W(x_0)}{x}=\frac{a_n}{x}\ \text{cu}\ a_n\neq 0,\ \text{de unde}$$

$$\left(\frac{Y_n}{J_n}\right)'=\frac{a_n}{xJ_n^2(x)}\quad\text{și}\quad \frac{Y_n(x)}{J_n(x)}=c_n+a_n\int_{u_n}^{x}u_n x\frac{du}{uJ_n^2(u)}$$

cu c_n, a_n, u_n constante, $u_n>0$ suficient de mic. Deoarece

$$J_n(x)=\frac{x^n}{2^n n!}(1+x\varphi_n(x))\ \text{cu}\ \lim_{x\to 0}\varphi_n(x)=0,\ \text{teorema rezultă.}$$

Demonstrăm acum cîteva identități numite **relații de recurență** pentru funcțiile Bessel.

TEOREMA 3.3. Pentru orice $\nu\in\mathbb{R}$ și pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ au loc următoarele relații :

a) $J_\nu'(x)=J_{\nu-1}(x)-\dfrac{\nu}{x}J_\nu(x)$

b) $J_\nu'(x)=-J_{\nu+1}(x)+\dfrac{\nu}{x}J_\nu(x)$

$$\text{c) } J_{\nu+1}(x)+J_{\nu-1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)$$

$$\text{d) } J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=2J'_\nu(x)$$

DEMONSTRAȚIE. a) Avem

$$J'_\nu(x)-J_{\nu-1}(x)\overset{cf.(22)}{=}\sum_{p=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^p(2p+\nu)}{2p!\Gamma(p+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\nu-1}-\frac{(-1)^p}{p!\Gamma(p+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\nu-1}\right]=$$

$$=-\frac{\nu}{x}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p!\Gamma(p+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\nu}=-\frac{\nu}{x}J_\nu(x)$$

b) se demonstrează similar. Dacă se scad şi respectiv se adună relațiile a) şi b) se obțin ultimele două relații din enunț.

În încheierea acestui punct, indicăm o listă de funcții speciale legate de funcțiile Bessel şi utilizate în unele aplicații.

1) **funcțiile Neumann :**

$$N_\nu(x)=\frac{1}{\sin\pi\nu}(J_\nu(x)\cos\pi\nu-J_{-\nu}(x))\quad \text{pentru } \nu\notin\mathbb{Z};$$

$$N_n(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{\nu\to n}\left[\frac{d}{d\nu}J_\nu(x)-(-1)^n\frac{d}{d\nu}J_{-\nu}(x)\right],\ n\in\mathbb{Z}$$

2) **funcțiile Hankel de speța I :**

$$H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iN_\nu(x) \text{ pentru orice } \nu\in\mathbb{R}$$

3) **funcțiile Hankel de speța II :**

$$H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iN_\nu(x) \text{ pentru } \nu\in\mathbb{R}$$

4) **funcțiile Kelvin (sau funcții Bessel modificate)**

$$I_\nu(x)=e^{\frac{i\pi\nu}{2}}J_\nu(ix)$$

$$K_\nu(x)=\frac{i\pi}{2}e^{\frac{i\pi\nu}{2}}H_\nu^{(1)}(ix),\ \ \nu\in\mathbb{R}$$

Notăm că în unele considerații ecuația (20) este înlocuită prin ecuația $x^2y''+xy'-(x^2+\nu^2)y=0,\ \nu\in\mathbb{R}$. Făcînd schimbarea de variabilă independentă $x\to ix$ soluțiile acestei ecuații sînt $y(ix)$ unde $y(x)$ este o funcție Bessel.

Soluția generală a ecuației anterioare este (pentru $\nu\geq 0$) :

$y(x)=C_1I_\nu(x)+C_2K_\nu(x)$ cu C_1, C_2 constante arbitrare.

EXEMPLE. 1) Avem conform (22), pentru $\nu=\frac{1}{2}$,

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{2p+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,;$$

în mod similar, $J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$. Din relațiile de recurență c) pentru

$\nu = \frac{1}{2}$ vom obține $J_{3/2}(x)$ iar pentru $\nu = -\frac{1}{2}$, $J_{-3/2}(x)$ etc. Se pot calcula astfel funcțiile Bessel de indice semiîntreg $J_{k+1/2}$ cu $k \in \mathbb{Z}$.

2) Pentru $\nu = 0$ se obține cf. (22)

$$J_0(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{96} - \ldots$$

și

$$J_1(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} - \ldots .$$

și conform teor. 3.3. c) se calculează $J_2(x)$, $J_{-1}(x)$ etc.

Pentru importanța lor deosebită, valorile funcțiilor Bessel sînt tabelate.

3) Determinăm soluția $x(t)$ în intervalul $t \in [0, \infty)$ pentru ecuația $tx'' + x' + x = 0$, cu condiția $x(0) = x_0$ dat. Notînd $\mathscr{L}\{x(t)\} = X(s)$, rezultă $\mathscr{L}\{tx''\} = -s^2X'(s) - 2sX(s) + x_0$ și ecuația inițială dă $s^2X'(s) + (s-1)X(s) = 0$, de unde $X(s) = A\frac{1}{s}e^{-\frac{1}{s}}$, cu A constantă arbitrară. Originalul va fi $x(t) = AJ_0(2\sqrt{t})u(t)$ (unde $A = x_0$, deoarece $J_0(0) = 0$. Dealtfel ecuația inițială era o ecuație Bessel de indice $\nu = 0$ și avea soluția $x(t) = C_1J_0(2\sqrt{t}) + C_2Y_o(2\sqrt{t})$ cu C_1, C_2 constante arbitrare, deoarece din $\lim\limits_{t\to 0} |Y_0(t)| = \infty$ rezultă $C_2 = 0$ etc.

3.2. Relațiile de ortogonalitate pentru funcțiile Bessel și aplicații.

Fixăm un indice $\nu > -1$.

TEOREMA 3.4. (relațiile de ortogonalitate). Fie α, β două soluții pentru ecuația $J_\nu(x) = 0$.

a) $\int_0^1 xJ_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)\,dx = 0$ **dacă** $\alpha^2 \neq \beta^2$;

b) $\int_0^1 xJ_\nu(\alpha x)^2\,dx = \frac{1}{2}(J'_\nu(\alpha))^2$.

DEMONSTRAȚIE. Fie deocamdată α, β numere reale oarecare. Să observăm că funcția $u = J_\nu(\alpha x)$ verifică ecuația $u'' + \frac{1}{x}u' + (\alpha^2 - \frac{\nu^2}{x^2})u = 0$ iar funcția $v = J_\nu(\beta x)$ verifică relația $v'' + \frac{1}{x}v' + (\beta^2 - \frac{\nu^2}{x^2})v = 0$.

Înmulțind prima cu xv și a doua cu xu și scăzînd egalitățile obținute vom obține relația

$$x(vu'' - uv'') + (vu' - uv') + (\alpha^2 - \beta^2)xuv = 0$$

Observînd că suma primilor doi termeni este egală cu $\frac{d}{dx}[x(vu'-uv')]$ şi integrînd pe intervalul [0, 1], rezultă

$$v(1)u'(1)-u(1)v'(1)+(\alpha^2-\beta^2)\int_0^1 xuv\,dx=0 \qquad (*)$$

Ipoteza $\nu>-1$ asigură faptul că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x(vu'-uv')=0$; într-adevăr, avem

$$u(x)=J_\nu(\alpha x)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{\alpha x}{2}\right)^\nu+o\left(x^{\nu+2}\right)$$

şi

$$xu'(x)=x\alpha J_\nu'(\alpha x)=\frac{\nu}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{\alpha x}{2}\right)^\nu+o\left(x^{n+2}\right) \text{ şi deci } x(vu'-uv')=o\left(x^{2\nu+2}\right)$$

Odată demonstrată relaţia (*), demonstraţia teoremei continuă astfel.

Dacă α,β sînt soluţii pentru ecuaţia $J_\nu(x)=0$, atunci $u(1)=J_\nu(\alpha)=0$ şi $v(1)=J_\nu(\beta)=0$ şi din (*) rezultă $(\alpha^2-\beta^2)\int_0^1 xuv\,dx=0$, de unde se obţine relaţia a). Apoi tot din (*) rezultă

$$\int_0^1 xuv\,dx=\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left[J_\nu(\beta)\alpha J_\nu'(\alpha)-J_\nu(\alpha)\beta J_\nu'(\beta)\right]$$

şi făcînd $\beta\to\alpha$ se obţine

$$\int_0^1 xJ_\nu(\alpha x)^2\,dx=\lim_{\beta\to\alpha}\frac{\alpha J_\nu'(\alpha)J_\nu(\beta)-J_\nu(\alpha)\beta J_\nu'(\beta)}{\beta^2-\alpha^2}$$

şi aplicînd regula lui l'Hôpital în raport cu β, rezultă

$$\int_0^1 xJ_\nu(\alpha x)^2\,dx=\frac{1}{2}(J_\nu'(\alpha))^2$$

OBSERVAŢIE. Se poate arăta că zerourile funcţiei J_ν (pentru $\nu>-1$) sînt reale, simple (cu excepţia eventual a lui $x=0$), izolate şi dispuse simetric în raport cu $x=0$. Aşadar, zerourile pozitive ale lui J_ν pot fi dispuse într–un şir $\alpha_1^{(\nu)}<\alpha_2^{(\nu)}<\alpha_3^{(\nu)}<\ldots$. De exemplu pentru J_0 primele trei zerouri sînt

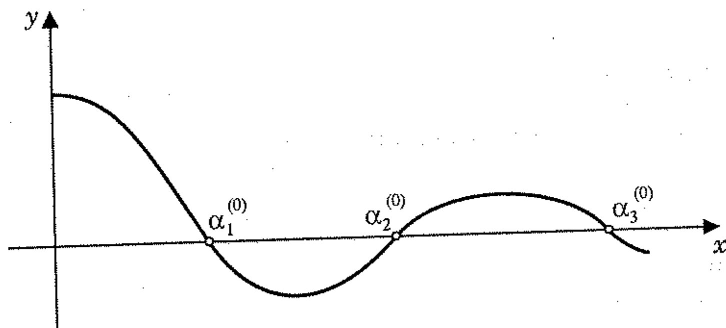


Figura IX.4

$\alpha_1^{(0)} = 2,4048...$, $\alpha_2^{(0)} = 5,5201...$, $\alpha_3^{(0)} = 8,6537...$, iar graficul lui J_0 amintește de o sinusoidă atenuată și arată ca în figura IX. 4.

Se poate arăta că funcțiile Bessel au următoarea expresie asimptotică pentru $x \to \infty$: $J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + o(x^{-\frac{3}{2}})$. Rezultă atunci formula aproximativă $\alpha_k^{(\nu)} \simeq \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\nu + k\pi$ și expresii asimptotice corespunzătoare pentru funcțiile Neumann, Hankel etc. Pentru detalii trimitem la [A14]. Un rezultat important, pe care îl acceptăm fără demonstrație afirmă că în spațiul Hilbert $L_2(\rho)$ pe intervalul $[0, 1]$ cu funcția pondere $\rho(x) = x$, **sistemul de funcții** Bessel $J_\nu(\alpha_k^{(\nu)} x)$ **este ortogonal complet** (ortogonalitatea a fost probată în teorema 3.4.). Deci orice funcție $f \in L_2(\rho)$ poate fi dezvoltată în serie de funcții Bessel de indice $\nu > -1$.

APLICAȚIE. Considerăm un cilindru circular drept omogen de rază R și un reper ortogonal $Oxyz$ astfel încît Oz să fie axa cilindrului. Cilindrul este definit prin $x^2 + y^2 \leq R^2$, $-\infty < z < \infty$.

Notăm cu $u(x, y, z, t)$ temperatura în punctul (x, y, z) al cilindrului și la momentul t. Ne propunem să determinăm distribuția temperaturii nestaționare în cilindru în ipoteza că ea depinde numai de ρ și t, se cunoaște temperatura la momentul $t = 0$ ca funcție de ρ și pe fața laterală temperatura este constantă egală cu u_0.

Problema revine la a rezolva ecuația căldurii $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$ ($a > 0$ constant), cu condițiile

$$u\big|_{x^2+y^2=R^2} = u_0 \quad \text{și} \quad u(x, y, z, 0) = f(\rho),\ 0 \leq \rho \leq R$$

Făcînd schimbarea de funcție $u = u_0 + v$ și trecînd la coordonate cilindrice, problema revine la a determina funcția $v(\rho, t)$ care verifică ecuația

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho} \right) \qquad (1)$$

cu condiția limită

$$v(R, t) = 0 \text{ pentru orice } t \geq 0 \qquad (2)$$

și condiția inițială

$$v(\rho, 0) = f(\rho) \text{ cu } f : [\,0, R\,] \to \mathbb{R} \text{ continuă dată.} \qquad (3)$$

Aplicăm metoda separării variabilelor și căutăm pentru ecuația (1) soluții de forma

$$v(\rho, t) = X(\rho)T(t) \qquad (4)$$

Va rezulta $XT' = a^2(X''T + \frac{1}{\rho}X'T)$, de unde $\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X'' + \frac{1}{\rho}X'}{X} = k$, constant.

Din relația $T' = a^2 kT$ rezultă $T = Ae^{ka^2 t}$ și din rațiuni fizice, k este strict

negativ [căci dacă $k > 0$, rezultă $u(\rho, t) = u_0 + Ae^{ka^2 t}X(\rho)$ şi pentru $t \to \infty$ ar rezulta că temperatura creşte indefinit; iar dacă $k = 0$ ar rezulta că procesul este staţionar]. Notăm $k = -\lambda^2$ cu $\lambda > 0$ deci $T(t) = Ae^{-\lambda^2 a^2 t}$.

Pe de altă parte, $X'' + \frac{1}{\rho}X' = -\lambda^2 X$ şi facem schimbarea de variabilă independentă $r = \lambda\rho$;

$$X'(\rho) = \frac{dX}{d\rho} = \lambda X'(r) \quad \text{şi} \quad X''(\rho) = \lambda^2 X''(r)$$

deci

$$X''(r) + \frac{1}{r}X'(r) + X(r) = 0$$

Aceasta este o ecuaţie Bessel de indice $\nu = 0$ şi are soluţia $X = J_0(r) = J_0(\lambda\rho)$. Deoarece $X\big|_{\rho=R} = 0$ conform (4) şi (2), rezultă $J_0(\lambda R) = 0$ deci $\lambda R = \alpha_n^{(0)}$ cu $n \geq 1$ întreg şi ca atare, $\lambda = \frac{\alpha_n^{(0)}}{R}$, $n \geq 1$. Am demonstrat astfel că ecuaţia (1) are soluţiile

$$v_n(\rho, t) = A_n e^{-\frac{\alpha_n^{(0)2}}{R^2}a^2 t} J_0\left(\frac{\alpha_n^{(0)}}{R}\rho\right),\ n \geq 1$$

Aplicînd principiul suprapunerii efectelor, ecuaţia (1) are soluţia

$$v(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{\alpha_n^{(0)2} a^2 t}{R^2}} J_0\left(\frac{\alpha_n^{(0)}}{R}\rho\right)$$

Pentru a determina constantele A_n, punem acum condiţia iniţială (3) :

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\alpha_n^{(0)}}{R}\rho\right)$$

Înlocuim $\rho = Rx$ deci $f(Rx) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\alpha_n^{(0)}x\right)$. Înmulţind această relaţie cu $xJ_0(\alpha_m^{(0)}x)$ şi integrînd pe intervalul [0, 1], rezultă

$$\int_0^1 xf(Rx)J_0\left(\alpha_m^{(0)}x\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^1 xJ_0\left(\alpha_m^{(0)}x\right)J_0\left(\alpha_n^{(0)}x\right)dx$$

Ţinînd cont de teorema 3.4. a), b) se obţine

$$\int_0^1 xf(Rx)J_0(\alpha_m^{(0)}x)\,dx = A_m \int_0^1 xJ_0(\alpha_m^{(0)}x)^2\,dx$$

şi

$$A_m = \frac{2}{J_0'\left(\alpha_m^{(0)}\right)^2}\int_0^1 xf(Rx)J_0\left(\alpha_m^{(0)}x\right)dx,\ m \geq 1$$

Soluţia analitică a problemei puse iniţial este

$$u(\rho, t) = u_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\frac{\alpha_m^{(0)} a^2 t}{R^2}} J_0\left(\frac{\alpha_m^{(0)}}{R}\rho\right)$$

cu A_m determinat anterior.

§4. Soluții fundamentale ale unor operatori diferențiali

Utilizînd distribuțiile vom determina soluțiile elementare (sau fundamentale, cum se mai spune) ale cîtorva ecuații ale fizicii matematice, indicînd şi unele aplicații semnificative.

4.1. Cîteva relații pentru operatori ai fizicii matematice

În capitolul 8, §3 am definit distribuțiile de o variabilă. Fără dificultăți principiale, elementele de teoria distribuțiilor se extind la cazul mai multor variabile. Vom nota cu $\mathscr{D}$ spațiul funcțiilor de testare (funcții indefinit derivabile $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, nule în afara unui compact); un şir φ_p din $\mathscr{D}$ converge în $\mathscr{D}$ către zero, pentru $p \to \infty$, dacă toate funcțiile φ_p sînt nule în afara aceluiaşi compact K şi pentru orice multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $D^\alpha \varphi_p \to 0$ uniform pe K pentru $p \to \infty$ $\left(D^\alpha \varphi = \dfrac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)$. O distribuție n–dimensională va fi o aplicație $\mathbb{C}$ – liniară $f: \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ astfel încît

$$(\forall)\varphi_p \xrightarrow{\text{în } \mathscr{D}} 0,\ f(\varphi_p) \xrightarrow{\text{în } \mathbb{C}} 0 \text{ pentru } p \to \infty.$$

Dacă $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ este un multi-indice, atunci

$$(D^\alpha f)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} f(D^\alpha \varphi),\ (\forall)\varphi \in \mathscr{D}$$

Se extind în mod firesc diferitele operații cu distribuții şi se evidențiază clasele de distribuții regulate, cu suport compact, temperate etc. Distribuția Dirac n – dimensională este $\delta : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$, $\varphi \to \varphi(0)$ unde $0 = (\overbrace{0, \dots, 0}^{n \text{ ori}})$.

Transformata Fourier a unei funcții $f(\underline{x})$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ presupusă absolut integrabilă este $F(\underline{\omega})$, $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, unde $F(\underline{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x}) e^{-(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n)} d\underline{x}$. Dacă $f \in \mathscr{S}$, atunci $F \in \mathscr{S}$. Se extinde transformarea Fourier pentru distribuții temperate, cu formule similare celor din cazul 1 – dimensional.

Vom stabili acum cîteva proprietăți de calcul cu distribuții, legate de operatorii diferențiali întîlniți în acest capitol.

Sînt necesare unele pregătiri. O submulțime $S \subset \mathbb{R}^n$ se zice **suprafață de clasă** C^p ($p \geq 1$) dacă orice punct $a \in S$ are o vecinătate V astfel încît există o funcție $\omega_a : V \to \mathbb{R}$ de clasă C^p cu gradientul nenul în orice punct şi $S \cap V = \{x \in V | \omega_a(x) = 0\}$. Suprafața S se zice **netedă pe porțiuni** dacă este

reuniunea unui număr finit de suprafețe de clasă C^1. Dacă $G \subset \mathbb{R}^n$ este un domeniu (deschis conex) și frontiera $S = \overline{G} \setminus G$ a lui G este o suprafață netedă pe porțiuni, ceea ce vom presupune în continuare, atunci în orice punct $x \in S$ se poate considera versorul $\vec{n} = \vec{n}_x$ al normalei exterioare la S.

O funcție $f : \overline{G} \to \mathbb{R}$ se zice de clasă $C^k(\overline{G})$ dacă are derivate parțiale pînă la ordinul k continue pe G și prelungibile prin continuitate la frontieră.

LEMĂ. (G. Green, 1793–1841). **Dacă G este mărginit și dacă f, $\varphi \in C^2(\overline{G})$, atunci**

$$\int_G (f\Delta\varphi - \varphi\Delta f)\,\mathrm{d}\underline{x} = \int_S \left(f\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}n} - \varphi\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}n} \right)\mathrm{d}\sigma$$

DEMONSTRAȚIE. Aplicăm formula Gauss–Ostrogradski pentru $\vec{v} = f\nabla\varphi$ deci

$$\int_S f(\nabla\varphi \cdot \vec{n})\,\mathrm{d}\sigma = \int_G (f\nabla\varphi)\,\mathrm{d}\underline{x} = \int_G (f\Delta\varphi + \nabla f \cdot \nabla\varphi)\,\mathrm{d}\underline{x}$$

Apoi schimbăm rolurile lui f, φ și scădem relațiile obținute, ținînd cont că

$$\vec{n} \cdot \nabla\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}n},\ \vec{n} \cdot \nabla f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}n}.$$

COROLAR. Dacă φ este armonică, atunci $\int_S \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}n}\mathrm{d}\sigma = 0$.

Este suficient să aplicăm lema lui Green pentru $f \equiv 1$, ținînd cont că $\Delta\varphi \equiv 0$, $\Delta f \equiv 0$ și $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}n} \equiv 0$.

TEOREMA 4.1.

a) **Fie $n = 2$ și funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,**

$$(1)\qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2} & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ A & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

cu A o constantă reală oarecare. Atunci f este local integrabilă pe $\mathbb{R}^2$ (deci o distribuție regulată) și $\Delta \underline{f} = \delta$.

b) **Fie $n = 3$ și funcția $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,**

$$(2)\qquad g(x,y,z) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \text{dacă} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ A & \text{dacă} \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

Atunci g este local integrabilă pe $\mathbb{R}^3$ și $\Delta \underline{g} = \delta$.

DEMONSTRAȚIE. a) Arătăm mai întîi că f este integrabilă pe orice disc compact D. Dacă $0 \notin D$, f este continuă pe D deci integrabilă, iar dacă $0 \in D$ și $B(0,r) \subset D$, este suficient să observăm că

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \iint_{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le r^2} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_\varepsilon^r \rho\ln\rho\,d\rho =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (r\ln r - \varepsilon\ln\varepsilon) = r\ln r < \infty$$

Aşadar, f este local integrabilă şi se identifică cu distribuţia

$$\underline{f}\in\mathscr{D}',\ \underline{f}(\varphi)=\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\varphi(x,y)\,dx\,dy,\ (\forall)\varphi\in\mathscr{D}$$

Avem de arătat că $\Delta\underline{f}(\varphi)=\delta(\varphi)$, adică $\underline{f}(\Delta\varphi)=\delta(\varphi)$ deci

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\Delta\varphi(x,y)\,dx\,dy=\varphi(0),\ (\forall)\varphi\in\mathscr{D}$$

Dar φ este nulă în afara unui disc $x^2+y^2\le R^2$ şi avem de arătat că

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le R^2} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,\Delta\varphi\,dx\,dy = 2\pi\varphi(0)$$

Aplicăm acum lema lui Green pentru $G=\{\varepsilon^2\le x^2+y^2\le R^2\}$, observînd că $\Delta\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)=0,\ (x,y)\in G$; Avem atunci de arătat că:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\int_{S_\varepsilon}+\int_{S_R}\right)\left(\ln r\frac{d\varphi}{dn}-\varphi\frac{d}{dn}\ln r\right)ds = 2\pi\varphi(0)$$

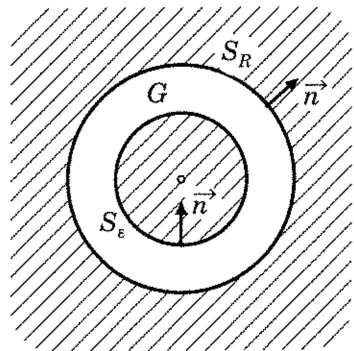


Figura IX.5.

Dar $\dfrac{d}{dn}(\ln r)=\dfrac{d}{dr}(\ln r)=\dfrac{1}{r}$ iar φ este nulă pe S_R şi folosind corolarul lemei rămîne să arătăm că $\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}}\frac{1}{\varepsilon}\int_{S_\varepsilon}\varphi\,ds=2\pi\varphi(0)$, ceea ce este evident.

b) Fie $r = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ şi $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Avem grad $g=\dfrac{\vec{r}}{4\pi r^3}$ în $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ şi

$\Delta g=\operatorname{div}\dfrac{\vec{r}}{4\pi r^3}$. Rămîne să arătăm că $\operatorname{div}\dfrac{\vec{r}}{r^3}=4\pi\delta$. În sens clasic avem $\operatorname{div}\dfrac{\vec{r}}{r^3}=0$ în $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$. Apoi în general

$$(\operatorname{div}\vec{v})(\varphi)=-\int_{\mathbb{R}^3}(\vec{v}\cdot\nabla\varphi)\,d\underline{x},\ (\forall)\,\varphi\in\mathscr{D}$$

şi rămîne să observăm că

$$\left(\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3}\right)(\varphi)=-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\vec{r}}{r^3}\nabla\varphi\,d\underline{x}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<\|x\|<\frac{1}{\varepsilon}}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\nabla\varphi(x)\right)d\underline{x}\overset{G-O}{=}$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<\|x\|<\frac{1}{\varepsilon}}\operatorname{div}\left(\frac{\varphi(x)}{r^3}\vec{r}\right)d\underline{x}=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\|x\|=\varepsilon}\varphi(x)\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^3}\,d\sigma=4\pi\varphi(o)=(4\pi\delta)(\varphi)$$

TEOREMA 4.2. Fie (3) $\mathscr{E}(\underline{x}, t) = \dfrac{e^{-\frac{\|x\|^2}{4a^2t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n} u(t)$, **unde** u **este treapta unitate şi** $a > 0$ **este constantă. Această funcţie este local integrabilă în** $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ **şi**

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} - a^2 \Delta \mathscr{E} = \delta(\underline{x}, t) \qquad (4)$$

DEMONSTRAŢIE. Dacă $t < 0$ atunci $\mathscr{E} = 0$ şi dacă $t \geq 0$ avem $\mathscr{E} \geq 0$. Pentru $t > 0$ avem

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{E}(\underline{x}, t)\, d\underline{x} = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{-\|x\|^2}{4a^2t}} d\underline{x} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u_i^2}\, du_i = 1$$

Aşadar, $\mathscr{E}$ va fi local integrabilă în $\mathbb{R}^{n+1}$.

Rămîne să demonstrăm (4) şi pentru aceasta aplicăm transformarea Fourier în raport cu $\underline{x}$, observînd că $\mathscr{F}\{\Delta \mathscr{E}\} = -\|\underline{\omega}^2\| \mathscr{F}\{\mathscr{E}\}$ şi

$$\mathscr{F}\{\delta(\underline{x}, t)\} = \mathscr{F}\{\delta(\underline{x}) \cdot \delta(t)\} = \mathscr{F}\{\delta(\underline{x})\} \cdot \delta(t) = \underline{1}(\underline{\omega})\delta(t)$$

Avem de arătat că

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t}\right\} + a^2\|\underline{\omega}\|^2 \mathscr{F}\{\mathscr{E}\} = \underline{1}(\underline{\omega})\delta(t) \quad \text{adică} \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}\{\mathscr{E}\} + a^2\|\underline{\omega}\|^2 \mathscr{F}\{\mathscr{E}\} = \underline{1}(\underline{\omega})\delta(t)$$

Dar

$$\mathscr{F}\{\mathscr{E}\} = u(t)\, e^{-a^2\|\underline{\omega}\|^2 t}$$

verifică această relaţie (am demonstrat la pag . 481 că pentru operatorul $Lx = \dfrac{dx}{dt} + k^2 x$, punînd $\mathscr{E} = e^{-k^2 t} u(t)$, avem $L\mathscr{E} = \delta$).

TEOREMA 4.3. Fie

(5) $\mathscr{E}(x, t) = \dfrac{1}{2a} u(at - |x|)$, $a > 0$ **fiind constant. Atunci** $\mathscr{E}$ **este local integrabilă pe** $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ **şi în plus verifică relaţia**

$$\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial x^2} = \delta(x, t) \qquad (6)$$

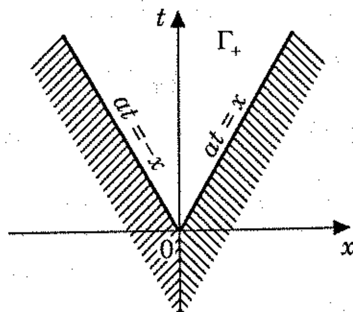


Figura IX. 6.

DEMONSTRAŢIE. Regiunea din planul xOt, $\Gamma_+ = \{at - |x| \geq 0\}$ se numeşte "conul viitorului". Funcţia $\mathscr{E}$ este nulă în complementara lui Γ_+ şi în plus pentru orice compact $K \subset \mathbb{R}^2$

$$\iint_K \mathscr{E}(x, t)\, dx\, dt = \frac{1}{2a} \iint_{K \cap \Gamma_+} u(at - |x|)\, dx\, dt = \frac{1}{2a} \text{ aria } (K \cap \Gamma_+) < \infty.$$

Aşadar, funcţia $\mathscr{E}$ este local integrabilă în $\mathbb{R}^2$. Rămîne să demonstrăm (6), adică $(\forall)\ \varphi = \varphi(x, t) \in \mathscr{D}$, să verificăm relaţia :

$$\left(\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial x^2}\right)(\varphi) = \varphi(0,0).$$

Avem

$$\left(\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial x^2}\right)(\varphi) = \mathscr{E}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathscr{E}(x,t)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2a}\iint_{\Gamma_+}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x \int_{|x|/a}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\,\mathrm{d}t - \frac{a}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\int_{-at}^{at}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x = I_1 - I_2$$

Dar,

$$I_1 = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int_{|x|/a}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, \frac{|x|}{a})\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2a}\left[\int_0^{\infty}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, \frac{x}{a})\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, -\frac{x}{a})\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\int_0^{\infty}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(at,t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\infty}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(-at,t)\,\mathrm{d}t\right] = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(at,t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(-at,t)\right]\mathrm{d}t$$

Apoi

$$I_2 = -\frac{a}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\int_{-at}^{at}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x = -\frac{a}{2}\int_0^{\infty}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(at,t) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(-at,t)\right]\mathrm{d}t$$

deci

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(at,t) + a\frac{\partial \varphi}{\partial x}(at,t)\right]\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(-at,t) - a\frac{\partial \varphi}{\partial x}(-at,t)\right]\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(at,t)\right]\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(-at,t)\right]\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\varphi(at,t)\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{2}\varphi(-at,t)\Big|_0^{\infty} = \varphi(0,0)$$

deoarece $\varphi \in \mathscr{D}$ (deci φ este nulă în afara unui compact din $\mathbb{R}^2$).

TEOREMA 4.4. Considerăm operatorul $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ al lui Pompeiu şi fie funcția

$$(7) \qquad f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\; f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi z}, & z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \\ \mathrm{A}, & z = 0 \text{ cu } A \in \mathbb{C} \text{ constantă} \end{cases}$$

Atunci f este local integrabilă şi $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\underline{f} = \delta(z)$.

DEMONSTRAȚIE. Faptul că f este local integrabilă este imediat (dacă $\varepsilon > 0$ atunci

$$\iint_{|z|\le\varepsilon}\frac{1}{\pi z}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\iint_{x^2+y^2\le\varepsilon^2}\frac{1}{x+iy}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\varepsilon}\frac{1}{\rho\cos\theta + i\rho\sin\theta}\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}\mathrm{d}\theta = 0)$$

Apoi pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\varphi) = -f\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}\right) = -\dfrac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} \dfrac{1}{z}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}\, dx \wedge dy$

Dar alegem $R > 0$ astfel ca $\varphi \equiv 0$ în $x^2 + y^2 \geq R^2$.
Rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\varphi) = -\frac{1}{\pi}\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \iint_{\varepsilon^2 \leq x^2+y^2 \leq R^2} \frac{1}{z}\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}\, dx \wedge dy$$

În general, dacă $D \subset \mathbb{C}$ este un domeniu mărginit cu frontiera o curbă închisă orientată γ de clasă C^1 pe porțiuni, atunci pentru orice $g \in C^1(\overline{D})$ nulă în afara lui $\overline{D}$, $(\forall) \in \mathscr{D}$ are loc formula Green–Riemann :

$$\int_\gamma g(z)\varphi(z)\, dz = 2i\iint_D \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(g\varphi)\, dx \wedge dy.$$

Aplicînd aceasta pentru $D = \{\varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $g = \dfrac{1}{z}$ şi observînd că

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{z}\varphi\right) = \frac{1}{z}\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} + \varphi\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z}\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}$$

(deoarece $\dfrac{1}{z}$ este olomorfă în D), rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\varphi) = \frac{i}{2\pi}\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \oint_{|z|=\varepsilon} \frac{1}{z}\varphi(z)\, dz \overset{z=\varepsilon e^{i\theta}}{=} -\frac{i}{2\pi}\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon} e^{-i\theta}\varphi(\varepsilon e^{i\theta})\varepsilon i e^{i\theta}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon e^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(0)\, d\theta = \varphi(0)$$

pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}$, deci $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \delta$ şi teorema 4.4. este stabilită.

4.2. Noțiunea de soluție fundamentală şi exemple

Fie o ecuație diferențială cu derivate parțiale de ordin $m \geq 1$

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\underline{x}) D^\alpha u = f(\underline{x}) \qquad (8)$$

unde $f \in \mathscr{D}'$ este o distribuție dată şi a_α sînt coeficienți funcții de clasă $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. (Reamintim că $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ pentru $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ cu $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ şi $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ întregi ≥ 0).

Introducînd operatorul $L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\underline{x}) D^\alpha$, ecuația anterioară se scrie

$$Lu = f(\underline{x}) \qquad (8')$$

DEFINIȚIA 4.1. Se numeşte **soluție în distribuții** (sau **soluție generalizată**) a ecuației (8) orice distribuție $u \in \mathscr{D}'$ care satisface (8) în sensul teoriei distribuțiilor, adică $(Lu)(\varphi) = f(\varphi)$, pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}$.

Este evident că orice soluție în sens clasic (adică funcție) a ecuației (8) este și soluție în sens distribuțional, trecînd la distribuția asociată.

DEFINIȚIA 4.2. Se numește **soluție fundamentală (soluție elementară** sau cu o terminologie mai veche, **funcție de influență)** pentru operatorul L, orice distribuție $\mathscr{E} \in \mathscr{D}'$ astfel încît $L\,\mathscr{E} = \delta$. (Distribuția ε nu este unică).

Cunoașterea unei soluții fundamentale a unui operator L (presupus cu coeficienți constanți) permite deterrminarea unei soluții a ecuației neomogene $Lu = f$, cu $f \in \mathscr{D}'$. Mai precis, are loc :

TEOREMA 4.5. Fie $\mathscr{E}$ soluția fundamentală a unui operator L cu coeficienți constanți. Dacă $f \in \mathscr{D}'$ are proprietatea că există $\mathscr{E} * f$ atunci ecuația $Lu = f$ are soluția $u = \mathscr{E} * f$ în $\mathscr{D}'$. În plus această soluție este unică în clasa distribuțiilor din $\mathscr{D}'$ convolutabile cu $\mathscr{E}$.

DEMONSTRAȚIE. Avem

$L(\mathscr{E}*f) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha(\mathscr{E}*f) = (\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha \mathscr{E})*f = (L\,\mathscr{E})*f = \delta * f = f$. Să presupunem că u_1, u_2 ar fi soluții (convolutabile cu $\mathscr{E}$) ale ecuației $Lu = f$ deci $Lu_1 = Lu_2 = f$.

Notăm $v = u_1 - u_2$ deci $Lv = 0$ și conform ipotezei există $v * \mathscr{E}$. Atunci

$$v = v*\delta = v*(L\,\mathscr{E}) = L(v*\mathscr{E}) = (Lv)*\mathscr{E} = 0*\mathscr{E} = 0.$$

INTERPRETARE FIZICĂ. Să considerăm sistemul din figura IX. 7 asimilînd intrarea f ca o "perturbație" iar ieșirea u (de fapt soluția ecuației $Lu = f$) ca o "influență". "Perturbația" $f(x)$ poate fi considerată ca sumă a perturbațiilor punctuale $f(a)\delta_a(x)$, în sensul că $f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(a)\delta_a(x)\,\mathrm{d}a$ (aceasta fiind de fapt o retranscreire a relației $f = f * \delta$). Fiecare perturbație punctuală $f(a)\delta_a = f(a)\delta(x-a)$ produce influența $f(a)\mathscr{E}(x-a)$; într-adevăr,

Figura IX. 7.

$$L(f(a)\mathscr{E}(x-a)) = f(a)L(\mathscr{E}*\delta_a) = f(a)(L(\mathscr{E})*\delta_a) = f(a)(\delta*\delta_a) = f(a)\delta_a.$$

Atunci $\mathscr{E}*f = \int f(a)\mathscr{E}(x-a)\,\mathrm{d}a$ apare ca "suprapunerea" acestor influențe punctuale.

Exemple de soluții fundamentale

1) Fie operatorul liniar cu coeficienți constanți (în cazul 1-dimensional)

$$L = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} + a_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + a_n 1$$

cu $a_1, \ldots, a_n$ constante reale sau complexe. Am văzut la pag. 479 că dacă $z(t)$ este soluția ecuației omogene $Lz = 0$ astfel încît $z(0) = z'(0) = \ldots = z^{(n-2)}(0) = 0$ și $z^{(n-1)}(0) = 1$, atunci o soluție fundamentală a operatorului L este

$$\mathscr{E}(t) = z(t)\underline{u}(t)$$

În particular, pentru $Lx = x' + ax$ avem $\mathscr{E}(t) = e^{-at}\underline{u}(t)$ și pentru

$$Lx'' = ax'' + a^2 x,\ \mathscr{E}(t) = \frac{\sin at}{t}\underline{u}(t).$$

2) Pentru "operatorul caloric" $L = \frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta$ (în cazul n-dimensional), soluția fundamentală este

$$\mathscr{E}(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{e^{-\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{4a^2 t}}}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \underline{u}(t)$$

conform teoremei 4.2. Pentru orice distribuție $f(x, t) \in \mathscr{D}'$, nulă pentru $t < 0$, distribuția $V = \mathscr{E} * f$ se numește **potențial caloric** de densitate f. Așadar, ecuația $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f$ are soluția $u(\underline{x}, t) = \int_0^t \mathrm{d}\sigma \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi, \sigma)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\sigma)}\right)^n} e^{\frac{-\|x-\xi\|^2}{4a^2(t-\sigma)}} \mathrm{d}\xi$, de exemplu pentru f funcție continuă și mărginită (ceea ce asigură că există $\mathscr{E} * f$).

3) "Operatorul coardei vibrante"

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

are soluția fundamentală

$$\mathscr{E}_1(x, t) = \frac{1}{2a} u(at - |x|)$$

conform teoremei 4.3. Astfel, o soluție a ecuației

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad (f \text{ continuă}) \quad \text{este} \quad u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \mathrm{d}\sigma \int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\xi, \sigma)\, \mathrm{d}\xi$$

Pentru membrana vibrantă, adică

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

soluția fundamentală este

$$\mathscr{E}_2(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a \sqrt{a^2 t^2 - x^2 - y^2}} u(at - \sqrt{x^2 + y^2})$$

Se poate arăta că în cazul ecuației undelor în spațiul tridimensional, operatorul $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta$ are ca soluție elementară distribuția $\mathscr{E}_3$ definită prin

$$\mathscr{E}_3(\varphi) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\left(x, y, z, \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{a}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z, \ (\forall)\ \varphi \in \mathscr{D}$$

Pentru orice distribuție $f(\underline{x}, t) \in \mathscr{D}'$ (în cazul $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$), produsul de convoluție $V_n = \mathscr{E}_n * f$ se numește **potențialul întîrziat cu densitate** f, unde $\mathscr{E}_n$ este soluția elementară a operatorului undelor.

4) Conform teoremei 4.1. operatorul Δ al lui Laplace are ca soluție fundamentală $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ în plan și $g(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi r}$,

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ în spaţiu.

5) În fine, operatorul $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ de derivare areolară are conform teoremei 4.4. soluţia elementară $\mathscr{E}(x, y) = \frac{1}{\pi z}$.

4.3. Rezolvarea unor probleme de tip Cauchy

Din exemplele date anterior am văzut că multe procese care conduc la ecuaţii cu derivate parţiale sînt descrise prin funcţii $u(x_1, \ldots, x_n, t)$, indicînd că procesele au loc în domenii spaţiale $(x_1, \ldots, x_n) \in G$ unde G are frontiera o suprafaţă S, presupusă netedă pe porţiuni, şi se desfăşoară în intervale temporale $t \in [0, T]$. Aşadar, procesele au loc în domenii cilindrice de forma

$$D = G \times [0, T] \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

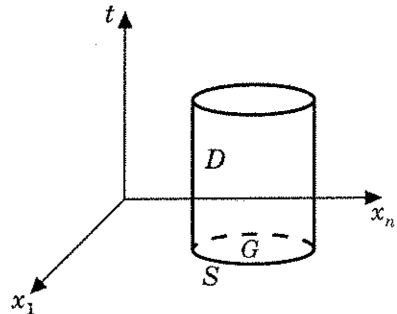


Figura IX. 8.

Frontiera D este alcătuită din $S \times [0, T]$, $\overline{G} \times \{0\}$ şi $\overline{G} \times \{T\}$. Am văzut că pentru determinarea proceselor sînt necesare condiţii iniţiale (care precizează starea iniţială) şi condiţii la frontieră (care precizează regimul proceselor la frontiera domeniului în care se desfăşoară). Numai în acest caz se obţin soluţii unice. În teoria ecuaţiilor fizicii matematice se întîlnesc trei tipuri de **probleme la limită** (iniţiale sau la frontieră) :

1) **probleme de tip Cauchy** pentru ecuaţiile cvasiliniare de tip hiperbolic sau parabolic (în care $G = \mathbb{R}^n$ şi se dau numai condiţii iniţiale);

2) **probleme Dirichlet-Neumann** pentru ecuaţiile de tip eliptic (în care se dau condiţii la frontiera S a lui G).

3) **probleme mixte** pentru ecuaţii de tip hiperbolic sau parabolic (în care $G \neq \mathbb{R}^n$ şi se dau atît condiţii iniţiale cît şi condiţii la frontiera lui G).

De exemplu pentru ecuaţia coardei vibrante $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ o problemă Cauchy poate consta în a determina soluţia $u(x, t)$ cu condiţiile $u(x, 0) = u_0(x)$ şi $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)$ cu u_0, u_1 funcţii date. Pentru ecuaţia căldurii $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ problema Cauchy cere aflarea soluţiei $u(x, t)$ pentru care $u(x, 0) = u_0$ prescris etc.

Am văzut (prin exemplul lui Hadamard) că pentru ecuaţii de tip eliptic problema Cauchy este incorect pusă. De aceea pentru ecuaţii de tip eliptic se formulează probleme de alt tip (de exemplu să se afle soluţia u în G cunoscînd $u \mid S$ sau cunoscînd $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} | S$).

În cele ce urmează arătăm modul cum cunoaşterea soluției fundamentale permite rezolvarea unor probleme de tip Cauchy.

a) **Problema Cauchy pentru ecuații diferențiale liniare ordinare cu coeficienți constanți.**

Fie ecuația $Lx = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}x' + a_n x = f(t)$, pe intervalul $t \in (0, \infty)$ cu condițiile inițiale

$$x^{(k)}(0_+) = x_k, \quad 0 \le k \le n-1$$

unde f este o funcție continuă dată pe $[0, \infty]$. Fie $x(t)$ soluția acestei probleme.

Considerăm funcțiile

$$\tilde{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{dacă} \quad t \ge 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad t < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{x}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{dacă} \quad t > 0 \\ x(0_+) & \text{dacă} \quad t = 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad t < 0 \end{cases}$$

identificate cu distribuțiile regulate asociate.

Avem

$$\tilde{x}^{(k)} = (x^{(k)}(t))_- + \sum_{j=1}^{k} x_j \delta^{(k-j)}(t), \quad \text{pentru } 1 \le k \le n.$$

Atunci

$$L\tilde{x} = (L\tilde{x}(t))_- + x_0 \delta^{(n-1)}(t) + (a_{n-1}x_0 + \ldots + a_1 x_{n-2} + x_{n-1})\delta(t) = \tilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \delta^{(k)}(t)$$

unde

$$b_0 = a_{n-1}x_0 + \ldots + a_1 x_{n-2} + x_{n-1}, \ldots, b_{n-2} = a_1 x_0 + x_1, \ b_{n-1} = x_0$$

deci distribuția $\tilde{x}$ va satisface ecuația

$$Ly = \tilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \delta^{(k)}(t)$$

Fie $\mathscr{E}(t) = z(t)\underline{u}(t)$ soluția fundamentală a operatorului L (deci $Lz = 0$, $z(0) = z'(0) = \ldots = z^{(n-2)}(0)$ şi $z^{(n-1)}(0) = 1$). Soluția unică în $\mathscr{D}'_+$ (conform teoremei 4.5.) a ecuației

$$L\tilde{x} = \tilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \delta^{(k)}(t)$$

va fi

$$\tilde{x} = \mathscr{E} * (\tilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \delta^{(k)}(t)) = \mathscr{E} * \tilde{f} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \mathscr{E}^{(k)}(t) =$$

$$= u(t) \int_0^t z(t-\sigma) f(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma + u(t) \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^{(k)}(t);$$

am folosit mai sus faptul că

$$\mathscr{E}^{(k)}(t) = (z(t)u(t))^{(k)} = z^{(k)}(t)u(t) \quad \text{pentru } 0 \le k \le n-1.$$

Aşadar, soluţia problemei Cauchy iniţială prelungită cu 0 pentru $t < 0$ va fi, pentru $t > 0$

$$x(t) = \int_0^t z(t-\sigma)f(\sigma)\,d\sigma + \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^{(k)}(t)$$

EXEMPLE. 1) Fie ecuaţia $x' + ax = f(t)$, $a \in \mathbb{R}$ constant, cu condiţia $x(0_+) = x_0$. Soluţia pe $(0, \infty)$ va fi

$$x(t) = \int_0^t e^{-a(t-\sigma)} f(\sigma)\,d\sigma + x_0 e^{-at}$$

2) Pentru ecuaţia pendulului $x'' + \omega^2 x = f(t)$ ($\omega > 0$ constant), cu condiţiile iniţiale $x(0_+) = x_0$, $x'(0_+) = x_1$, soluţia pe intervalul $(0, \infty)$ va fi

$$x(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\sigma)\sin\omega(t-\sigma)\,d\sigma + x_0\cos\omega t + x_1\frac{\sin\omega t}{\omega}$$

b) **Problema Cauchy pentru ecuaţia undelor**

Fie ecuaţia $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = f(\underline{x}, t)$ cu condiţiile $u|_{t=0_+} = u_0(\underline{x})$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0_+} = u_1(\underline{x})$.

Presupunem că f este continuă pentru $t \ge 0$ şi că u_0, u_1 sînt continue date pe $\mathbb{R}^n$. Procedăm ca mai sus şi considerăm funcţiile

$$\tilde{u}(\underline{x}, t) = \begin{cases} u(\underline{x}, t), & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{f}(\underline{x}, t) = \begin{cases} f(\underline{x}, t), & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Atunci $\tilde{u}$ satisface în $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ecuaţia :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = \tilde{f}(\underline{x}, t) + u_0(\underline{x})\delta'(t) + u_1(\underline{x})\delta(t) \qquad (9)$$

Într-adevăr, $(\forall)\ \varphi \in \mathscr{D}$ avem

$$\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t^2} - a^2\Delta\tilde{u}\right)(\varphi) = \tilde{u}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - a^2\Delta\varphi\right) = \int_0^\infty dt\int_{\mathbb{R}^n} u\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - a^2\Delta\varphi\right)d\underline{x} =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon > 0}} \int_\varepsilon^\infty dt\int_{\mathbb{R}^n} u\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - a^2\Delta\varphi\right)d\underline{x} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\varepsilon^\infty dt\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u\right)d\underline{x} - \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\underline{x}, \varepsilon)\,u(\underline{x}, \varepsilon)\,d\underline{x} + \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial u}{\partial t}(\underline{x}, \varepsilon)\,\varphi(\underline{x}, \varepsilon)\,d\underline{x}\right] =$$

$$= \int_0^\infty dt\int_{\mathbb{R}^n} f\varphi\,d\underline{x} - \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\underline{x}, 0)\,u(\underline{x}, 0)\,d\underline{x} + \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial u}{\partial t}(\underline{x}, 0)\,\varphi(\underline{x}, 0)\,d\underline{x} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{f}\varphi - \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\underline{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\underline{x},0)\mathrm{d}\underline{x} + \int_{\mathbb{R}^n} u_1(\underline{x})\varphi(\underline{x},0)\mathrm{d}\underline{x} = (\tilde{f} + u_0(\underline{x})\delta'(t) + u_1(\underline{x})\delta(t))(\varphi)$$

Notînd cu $\mathscr{E}(\underline{x}, t)$ soluția fundamentală a operatorului undelor, soluția problemei inițiale va fi

$$u(\underline{x}, t) = \mathscr{E}(x, t) * \left[\tilde{f}(\underline{x}, t) + u_0(\underline{x})\delta'(t) + u_1(\underline{x})\delta(t)\right] \qquad (10)$$

Pentru $n = 1, 2, 3$ se obțin formule diferite, propagarea undelor făcîndu-se diferit.

c) **Problema Cauchy pentru ecuația căldurii**

Să considerăm ecuația căldurii $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(\underline{x}, t)$ cu condiția inițială $u|_{t=0_+} = u_0(\underline{x})$ cu f funcție continuă pentru $t \geq 0$ și u_0 continuă în $\mathbb{R}^n$. Procedînd ca mai înainte, se obține soluția explicită a acestei probleme, exprimată prin **formula clasică a lui Poisson** :

$$u(\underline{x}, t) = \int_0^t \mathrm{d}\sigma \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\underline{v}, \sigma)}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\sigma)}\right)^n} e^{-\frac{\|\underline{x}-\underline{v}\|^2}{4a^2(t-\sigma)}} \mathrm{d}\underline{v} + \frac{u(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\underline{v}) e^{\frac{-\|\underline{x}-\underline{v}\|^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\underline{v}$$

În cazul $f \equiv 0$, $n = 1$, regăsim formula $u(x,t) = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u_0(v) e^{-\frac{(x-v)^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}v$, demonstrată la pagina 548, pentru $a = 1$.

4.4. Probleme la limită pentru ecuații de tip eliptic. Rezolvarea problemei Dirichlet

Fie G un domeniu în $\mathbb{R}^n$ cu frontiera o suprafață S netedă pe porțiuni.

Presupunem că $p \in C^1(\overline{G})$, $q \in C^0(\overline{G})$, $p > 0$, $q \geq 0$ și considerăm operatorul L definit prin

$$Lu = -\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu \text{ , pentru orice } u \in C^2(\overline{G}).$$

Dăm o listă de proprietăți ale operatorului L.

1) **Ecuația $Lu = 0$ este de tip eliptic.**

Într-adevăr, este suficient să observăm că ecuația se scrie

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} - qu = 0$$

2) **Pentru orice $u \in C^2(\overline{G})$ și $v \in C^1(\overline{G})$ are loc formula Green (I)** :

$$\int_G v(Lu)\,\mathrm{d}\underline{x} = \int_G p \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \mathrm{d}\underline{x} + \int_G qvu\,\mathrm{d}\underline{x} - \int_S pv \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} \mathrm{d}\sigma$$

Într-adevăr

$$\int_G v(Lu)\,\mathrm{d}\underline{x} = \int_G v[-\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + qu]\,\mathrm{d}\underline{x} =$$

$$= -\int_G \operatorname{div}(pv \operatorname{grad} u)\,\mathrm{d}\underline{x} + \int_G p \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} \mathrm{d}\underline{x} + \int_G qvu\,\mathrm{d}\underline{x} \qquad (11)$$

Aplicînd formula Gauss-Ostrogradski în prima integrală, rezultă formula (11).

3) **Fie** $u, v \in C^2(G)$. **Atunci are lor formula Green (II)** :

$$\int_G (vLu - uLv)\,\mathrm{d}x = \int_S p\left(u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n} - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right)\mathrm{d}\sigma \qquad (12)$$

Este suficient să aplicăm formula Green (I) de două ori, intervertind u și v și scăzînd relațiile obținute.

Pentru $p \equiv 1$, $q \equiv 0$ formulele (11) și (12) capătă forma lor clasică, sub care vor fi utilizate în continuare :

$$\int_G v\Delta u\,\mathrm{d}\underline{x} = -\int_G \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{d}\underline{x} + \int_S v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\,\mathrm{d}\sigma \qquad (13)$$

$$\int_G (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}\underline{x} = \int_S \left(v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} - u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n}\right)\mathrm{d}\sigma \qquad (14)$$

De la cursul de analiză, reamintim că se notează cu $L^2(G)$ mulțimea funcțiilor $u : G \to \mathbb{C}$ astfel încît $\int_G |u(\underline{x})|^2\,\mathrm{d}\underline{x} < \infty$ și că acesta este un spațiu Hilbert relativ la produsul scalar $< u, v >= \int_G u(\underline{x})\overline{v}(\underline{x})\,\mathrm{d}\underline{x}$ (în continuare vom folosi doar funcții cu valori reale).

Introducem următoarele două spații Hilbert (de fapt subspații închise ale lui $L^2(G)$:

$$H_1 = \{u \in C^2(\overline{G}) | u,\ Lu \in L^2(G) \text{ și } u \,|\, S = 0\}$$

$$H_2 = \{u \in C^2(\overline{G}) \,|\, u,\ Lu \in L^2(G) \text{ și } \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right| S = 0\}$$

Cu aceste pregătiri continuăm lista proprietăților operatorului L.

4) **Operatorul** $L : H_1 \to H_1$ **este autoadjunct ; același lucru și pentru** $L : H_2 \to H_2$.

Într-adevăr, $(\forall)\ u, v \in H_1$ avem

$$< Lu, v > - < u, Lv >= \int_G (vLu - uLv)\,\mathrm{d}\underline{x} \overset{cf.(12)}{=} \int_S p\left(u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n} - v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\right)\mathrm{d}\sigma = 0$$

căci $u \,|\, S = 0$, $v \,|\, S = 0$; așadar, $< Lu, v > = < u, Lv >$.

5) L **satisface condiția de pozitivitate**

$$< Lu, u > \ \geq 0,\ (\forall)\ u \in H_1 \text{ (respectiv } (\forall)\ u \in H_2).$$

Într-adevăr, $< Lu, u > = \int_G u(Lu)\,\mathrm{d}\underline{x} \overset{cf.(11)}{=} \int_G (p.\|\mathrm{grad}\,u\|^2 + qu^2)\,\mathrm{d}\underline{x}$ și acest număr este ≥ 0, deoarece $p > 0$, $q \geq 0$.

6) **Valorile proprii ale operatorului** L (restrîns la H_1 sau H_2) **sînt reale și pozitive.**

De exemplu, dacă $\lambda \in \mathbb{C}$ și $Lw = \lambda w$ cu $w \neq 0$ (cu valori complexe), atunci $< Lw, \overline{w} > = < \lambda w, \overline{w} > = \lambda < w,\ \overline{w} > = \lambda\|w\|^2$; pe de altă parte, conform 5)

$$< Lw, \overline{w} > = < w, L\overline{w} >=< w, \overline{\lambda w} > = \overline{\lambda}\|w\|^2.$$

Ca atare, $\lambda \in \mathbb{R}$; în plus, dacă $u \in H_1$, $u \neq 0$, atunci
$<Lu, u> = <\lambda u, u> = \lambda <u, u> = \lambda \|u\|^2$ şi conform (5) va rezulta $\lambda \geq 0$.

Se poate arăta că mulţimea valorilor proprii ale operatorului $L : H_1 \to H_1$ este numărabilă, iar funcţiile (vectorii) proprii formează o mulţime numărabilă densă în $L^2(G)$.

Un rol aparte în studiul ecuaţiilor de tip eliptic îl au **funcţiile armonice** în G, adică funcţiile $u \in C^2(G)$, $u : G \to \mathbb{R}$ astfel încît $\Delta u = 0$. În $G = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, soluţiile elementare ale lui Δ sînt exemple binecunoscute de funcţii armonice.

Astfel, pentru $n = 3$, funcţia $\psi(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ este armonică în $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ şi pentru $n = 2$, funcţia $\psi(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ este armonică în $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

TEOREMA 4.6. (formula celor 3 potenţiale). Fie $G \subset \mathbb{R}^3$ şi $u \in C^2(\overline{G})$, nulă în afara lui $\overline{G}$. Atunci $(\forall)$ $\underline{x} \in G$,

$$u(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_G \frac{\Delta u(\underline{y})}{\|\underline{x}-\underline{y}\|}\,\mathrm{d}\underline{y} + \frac{1}{4\pi}\int_S \left[\frac{1}{\|\underline{x}-\underline{y}\|}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} - u(\underline{y})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\frac{1}{\|\underline{x}-\underline{y}\|}\right)\right]\mathrm{d}\sigma_y \quad (*)$$

(Cele trei integrale poartă numele de potenţiale – de volum, de simplu strat şi de dublu strat respectiv).

DEMONSTRAŢIE. Punctul $\underline{x}$ este fixat în G (dacă $\underline{x} \notin \overline{G}$ relaţia (*) este evidentă). Vom nota $r_y = \|\underline{x}-\underline{y}\|$, modulul vectorului $\overrightarrow{xy}$ (vectorul de poziţie al punctului $\underline{y}$, cu originea în $\underline{x}$);

Funcţia $v : \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{x}\} \to \mathbb{R}$, $v(\underline{y}) = \dfrac{1}{r_y}$ este evident armonică. Alegem o bilă B_ρ centrată în $\underline{x}$ de rază ρ, situată în G şi aplicăm formula (14) pentru domeniul $G \setminus \overline{B}_\rho$ şi pentru funcţiile $u, v = \dfrac{1}{r}$ (omitem indicele y) :

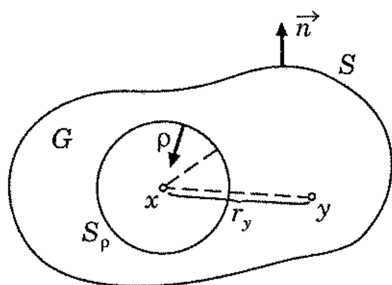


Figura IX.9.

$$\int_{G\setminus\overline{B}_\rho} \frac{1}{r}\Delta(y)\,\mathrm{d}\underline{y} = \int_S \left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} - u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}\sigma + \int_{S_\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} - u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}\sigma$$

Dar pe sfera S_ρ avem $r_y = \rho, \vec{n} = -\dfrac{\vec{r}}{\rho}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\dfrac{1}{r}\right) = \vec{n}\,\mathrm{grad}\left(\dfrac{1}{r}\right) = \dfrac{\vec{r}}{r^3}\left(-\dfrac{\vec{r}}{\rho}\right) = \dfrac{1}{\rho^2}$

deci

$$\int_{G\setminus\overline{B}_\rho} \frac{1}{r}\Delta u(y)\,\mathrm{d}\underline{y} = \int_S \left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n} - u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] + \frac{1}{\rho}\int_{S_\rho}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}n}\mathrm{d}v - \frac{1}{\rho^2}\int_{S_\rho} u\,\mathrm{d}\sigma.$$

Aplicînd formule de medie pentru integralele pe S_ρ, se observă că

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\int_{S_\rho}\frac{du}{dn}\,d\sigma=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\left(\frac{du}{dn}\right)_\xi 4\pi\rho^2=0$$

şi

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho^2}\int_{S_\rho}u\,d\sigma=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho^2}u(\xi)4\pi\rho^2=4\pi u(\underline{x})$$

ξ fiind un punct din bila B_ρ. Observînd în fine că $\lim\limits_{\rho\to 0}\int_{B_\rho}\frac{1}{r}\Delta u(y)\,d\underline{y}=0$ (ceea ce rezultă trecînd la coordonate sferice centrate în $\underline{x}$), rezultă

$$\int_G\frac{1}{r}\Delta u(\underline{y})\,d\underline{y}=\int_S\left[\frac{1}{r}\frac{du}{dn}-u\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)\right]d\sigma-4\pi u(\underline{x})$$

de unde se obţine formula (*).

COROLAR 1. Dacă u este armonică în $G\subset\mathbb{R}^3$, atunci valorile lui u în G pot fi exprimate prin valorile lui u şi ale lui $\frac{du}{dn}$ pe frontiera lui G.

Demonstraţia este evidentă, formula (*) devenind

$$u(\underline{x})=\frac{1}{4\pi}\int_S\left[\frac{1}{r_y}\frac{du}{dn}-u(y)\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r_y}\right)\right]d\sigma_y$$

pentru orice $\underline{x}\in G$.

COROLAR 2 (Gauss). Fie $u:\overline{G}\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă, armonică în G. Atunci pentru orice punct $\underline{x}\in G$ valoarea $u(\underline{x})$ este media valorilor lui u pe suprafaţa unei bile $B(\underline{x},r)\subset G$:

$$u(\underline{x})=\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\|\underline{y}-\underline{x}\|=r}u(\underline{y})\,d\sigma_y \qquad (15)$$

(Această proprietate exprimă "armonia" repartizării valorilor lui u şi justifică terminologia).

DEMONSTRAŢIE. Aplicăm formula (*) a celor 3 potenţiale pentru bila $B(\underline{x},r)$ şi rezultă

$$u(\underline{x})=\frac{1}{4\pi}\int_{\|y-x\|=r}\left[\frac{1}{\|y-x\|}\frac{du}{dn}-u(y)\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\|y-x\|}\right)\right]d\sigma_y=$$

$$=\frac{1}{4\pi r}\int_{\|y-x\|=r}\frac{du}{dn}\,d\sigma_y-\frac{1}{4\pi}\int_{\|y-x\|=r}u(y)\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\|y-x\|}\right)d\sigma_y$$

Dar în general,

$$\int_{\mathrm{Fr}\,G}\frac{du}{dn}\,d\sigma=0$$

pentru u armonică în G, ceea ce rezultă din formula (14) în care facem $v\equiv 1$.

Atunci prima integrală de mai sus dispare şi rezultă

$$u(\underline{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\|y\|=r} u(y)\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma_y = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\|y-x\|=r} u(y)\, d\sigma_y$$

În cele ce urmează, ne vom ocupa de rezolvarea problemei Dirichlet care constă în a determina o funcţie $u:\overline{G}\to\mathbb{R}$, continuă în $\overline{G}$, verificînd o ecuaţie Poisson (Laplace sau Helmholtz) în domeniul $G\subset\mathbb{R}^3$ şi egală cu o funcţie continuă dată u_0 pe $S = \operatorname{Fr} G$. În acest scop, este utilă noţiunea de funcţie Green.

DEFINIŢIA 4.3. Se numeşte **funcţie Green pentru** G o funcţie $\mathscr{G}(x, y)$ definită pentru orice $x\in\overline{G}$, $y\in\overline{G}$ cu $x\neq y$, cu proprietăţile următoare:

1) $\mathscr{G}(x, y)\geq 0$ şi $\mathscr{G}(x, y) = \mathscr{G}(y, x)$ pentru orice $x, y\in G$, $x\neq y$;

2) pentru orice $y\in G$, $\mathscr{G}(x, y)$ este armonică (în x) şi poate fi scrisă sub forma $\mathscr{G}(x, y) = \dfrac{1}{4\pi\|x-y\|} + g(x, y)$ unde g este continuă în $\overline{G}$ şi armonică în G (ca funcţie de x);

3) $(\forall)\, y\in G$, funcţia $\mathscr{G}$ este nulă pe S şi spre infinit, adică $\mathscr{G}(x, y) = 0$ pentru orice $x\in S$ şi $\lim\limits_{\|x\|\to\infty}\mathscr{G}(x, y) = 0$.

Aşadar, $(\forall)\, y\in G$, $\mathscr{G}(x, y)$ este armonică (în x) în domeniul $G\setminus\{y\}$, se anulează pe S şi tinde către $+\infty$ pentru $x\to y$.

EXEMPLE.

1) Fie $G = B(0, R)$, bila $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\leq R^2$. Pentru orice $y\in G$, $y\neq 0$ notăm cu y^* acel unic punct exterior sferei astfel încît $0, y, y^*$ sînt coliniare şi

$$\|y\|\cdot\|y^*\| = R^2$$

$$\text{(deci } y^* = \frac{R^2}{\|y\|^2}y\text{)}.$$

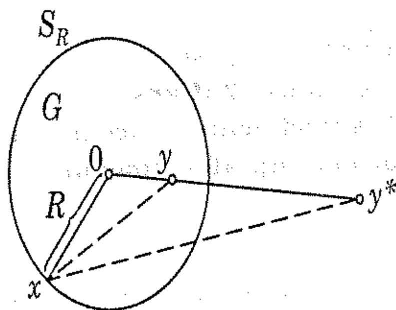


Figura IX.10.

Se caută funcţia Green sub forma

$$\mathscr{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi\|x-y\|} - \frac{A}{4\pi\|x-y^*\|}$$

unde A este o constantă ce trebuie determinată. Funcţia $g(x, y) = -\dfrac{A}{4\pi\|x-y^*\|}$ este armonică în $G = B(0, R)$ şi este de clasă C^∞ în $\overline{G}$. Alegem A astfel încît $\mathscr{G}$ să se anuleze pe sfera $S_R = \operatorname{Fr} G$. Pentru aceasta observăm că dacă $x\in S_R$, atunci triunghiurile Oxy şi Oxy^* sînt asemenea (avînd un unghi comun şi laturile proproţionale). Rezultă că $\dfrac{R}{\|y\|} = \dfrac{\|x-y^*\|}{\|x-y\|}$ şi ca atare, $A = \dfrac{R}{\|y\|}$. În concluzie,

$$\mathscr{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi\|x-y\|} - \frac{R\|y\|}{4\pi\left\|R^2y - \|y\|^2x\right\|}$$

Pentru $y = 0$ definim $\mathscr{G}(x,0) = \dfrac{1}{4\pi\|x\|} - \dfrac{1}{4\pi R}$.

Aceasta este funcția Green pentru bila sferică (verificînd condițiile 1,2,3 din definiția 4.3.).

2) Fie G semispațiul, $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 > 0\}$. Fie $y = (y_1, y_2, y_3) \in G$ și $y^* = (y_1, y_2, -y_3)$ simetricul lui y față de planul $S = \{x_3 = 0\}$ care este frontiera lui G.

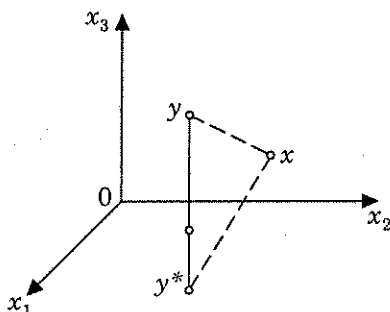


Figura IX. 11.

Funcția Green a semispațiului G este

$$\mathscr{G}(x, y) = \frac{1}{4\pi\|x-y\|} - \frac{1}{4\pi\|x-y^*\|}$$

Arătăm acum modul cum funcția Green poate fi utilizată pentru rezolvarea problemei lui Dirichlet. Considerăm problema determinării funcției $u \in C^2(\overline{G})$, astfel încît

$$\Delta u = -q(x) \text{ în } G \text{ și } \quad u \,|\, S = u_0$$

(unde $q : G \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă dată astfel încît $\int_G q^2(\underline{x})\, d\underline{x} < \infty$ și $u_0 : S \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă dată). Se verifică ușor că soluția acestei probleme este unică, iar teorema următoare dă explicit această soluție cu ajutorul funcției Green. Anume :

TEOREMA 4.7. Soluția problemei anterioare este funcția $u : \overline{G} \to \mathbb{R}$,

$$u(x) = -\int_S \frac{d\mathscr{G}}{dn_y} u_0(y)\, d\sigma_y + \int_G \mathscr{G}(x, y) q(y)\, dy \qquad (16)$$

DEMONSTRAȚIE. Aplicînd formula celor trei potențiale (teorema 4.6.) rezultă

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_G \frac{q(y)}{\|x-y\|}\, dy + \frac{1}{4\pi}\int_S \left[\frac{1}{\|x-y\|}\frac{du}{dn} - u_0(y)\frac{d}{dn}\frac{1}{\|x-y\|}\right] d\sigma_y$$

Pe de altă parte, $\mathscr{G}(x,y) = \dfrac{1}{4\pi\|x-y\|} + g(x,y)$ și aplicînd formula (14) pentru funcțiile $u(y)$ și $g(x, y)$, avem

$$0 = \int_S \left[\frac{du}{dn} g(x,y) - u_0(y)\frac{dg}{dn}\right] d\sigma_y + \int_G q(y) g(x,y)\, dy$$

pentru orice $x \in G$. Adunînd această relație cu cea anterioară, rezultă

$$u(x) = \int_G q(y)\left[\frac{1}{4\pi\|x-y\|} + g(x,y)\right] dy +$$

$$+\int_S \left[g(x,y) + \frac{1}{4\pi\|x-y\|}\frac{du}{dn} - u_0(y)\left(\frac{dg}{dn} + \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\|x-y\|}\right)\right)\right] d\sigma_y$$

Ținînd cont de egalitățile $\frac{1}{4\pi\|x-y\|}+g(x,y)=\mathscr{G}(x,y)$ în $G\times G$ și $g(x,y)=-\frac{1}{4\pi\|x-y\|}$ pentru $x\to G, y\to S$, rezultă tocmai formula (16) din enunț.

EXEMPLU. În cazul bile sferice $G=B(0,R)$ avem

$$\left.\frac{d\mathscr{G}}{dn_y}\right|_{S_R}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\|x-y\|}-\frac{R\|y\|}{\left\|x\|y\|^2-R^2y\right\|}\right)\Bigg|_{\|y\|=R}$$

unde $\rho=\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}=\|y\|$. Notînd $\gamma=$ unghiul $x0y$, avem

$$\left.\frac{d\mathscr{G}}{dn_y}\right|_{S_R}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\left(\|x\|^2-2\rho\|x\|\cos\gamma+\rho^2\right)^{-\frac{1}{2}}-R\left(R^4-2R^2\|x\|\rho\cos\gamma+\|x\|^2\rho^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\Bigg|_{\rho=R}=$$

$$=\frac{\|x\|^2-R^2}{4\pi R(\|x\|^2-2R\|x\|\cos\gamma+R^2)^{3/2}}=\frac{\|x\|^2-R^2}{4\pi R\|x-y\|^3}$$

unde $y\in S_R$. Soluția explicită a ecuației Laplace $\Delta u=0$ în $B(0,R)$ cu $u|_{S_R}=u_0$ va fi conform teoremei 4.7. :

$$u(x)=\frac{R^2-\|x\|^2}{4\pi R}\int_{\|y\|=R}\frac{u_0(y)}{\|x-y\|^3}\,d\sigma_y$$

pentru $\|x\|<R$.

Noțiunea de funcție Green poate fi dată și în cazul plan, dar aici se recomandă folosirea variabilei complexe. Stabilim ca ilustrare soluția explicită a problemei Dirichlet în cazul discului și în cazul semiplanului.

a) **Fie f o funcție olomorfă în $G=\{|z|<R\}$ și continuă în $\overline{G}$. Pentru orice $z=\rho e^{i\theta}\in G$ avem**

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}f(Re^{i\varphi})\,d\varphi \qquad (17)$$

Într-adevăr, conform formulei integrale a lui Cauchy,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Fr}\,G}\frac{f(u)}{u-z}\,du$$

Punctul $\frac{R^2}{\overline{z}}$ fiind exterior lui G, rezultă $0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Fr}\,G}\frac{f(u)}{u-\frac{R^2}{\overline{z}}}\,du$

și scăzînd relațiile anterioare, se obține

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Fr}\,G}\left(\frac{1}{u-z}-\frac{1}{u-\frac{R^2}{\overline{z}}}\right)f(u)\,du$$

Înlocuind $z=\rho e^{i\theta}$ şi $u=Re^{i\varphi}$, se obţine formula (17).

Separînd părţile reale şi imaginare, adică scriind $f=u+iv$ (cu u, v armonice), formula (17) devine

$$u(\rho,\theta)=\frac{R^2-\rho^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u_0(\varphi)}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}\,d\varphi \quad \text{unde}$$

am pus $u_0(\varphi)=u(Re^{i\varphi})$. Am regăsit pe altă cale formula de la pagina 544.

b) Considerăm semiplanul $G=\{\operatorname{Im} z>0\}$ şi fixăm $\zeta\in G$. Alegem $R>0$ suficient de mare şi notăm cu C conturul din figura IX. 12.

Dacă f este olomorfă în G, rezultă

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz$$

şi

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z-\overline{\zeta}}\,dz$$

de unde prin scădere,

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\zeta-\overline{\zeta}}{(z-\zeta)(z-\overline{\zeta})}f(z)\,dz.$$

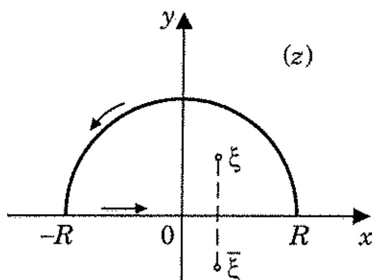


Figura IX. 12.

Punînd $\zeta=\xi+i\eta$ deci $\overline{\zeta}=\xi-i\eta$ şi făcînd $R\to\infty$, integrala pe semicerc tinde către zero şi rezultă formula

$$f(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2}f(x)\,dx$$

Punînd $u=\operatorname{Re} f$, rezultă

$$u(\xi,\eta)=\frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x)\,dx}{(x-\xi)^2+\eta^2} \qquad (18)$$

formulă valabilă pentru orice funcţie armonică în semiplanul superior.

Dacă se cunosc valorile lui u pe axa Ox, atunci formula (18) dă valorile în orice punct (ξ,η) din semiplanul superior.

§ 5. Metode numerice pentru rezolvarea ecuaţiilor cu derivate parţiale

Indicăm pe scurt cîteva din metodele numerice cele mai utilizate, fără a intra în dezvoltări teoretice.

5.1. Metoda diferenţelor finite

a) Vom ilustra această metodă mai întîi în cazul ecuaţiei propagării căldurii într-o bară omogenă mărginită.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad x\in[0,a],\ t\in[0,T] \qquad (1)$$

cu condiţiile $u(x,0)=f(x),\ u(0,t)=g_1(t),\ u(a,t)=g_2(t)$ (2)

Soluția $u(x, t)$ se caută în dreptunghiul $D = [0, a] \times [0, T]$.

Divizăm intervalul $[0, a]$ în N părți egale prin punctele $x_n = nh$, $h = \frac{a}{N}$; apoi divizăm intervalul $[0, T]$ în M părți egale prin punctele $t_m = mk$, $k = \frac{T}{M}$. Perechea (h, k) se numește **bipas al rețelei.** Un nod oarecare al rețelei este (x_n, t_m) cu $0 \le n \le N$, $0 \le m \le M$, iar valoarea funcției u în acest nod se notează

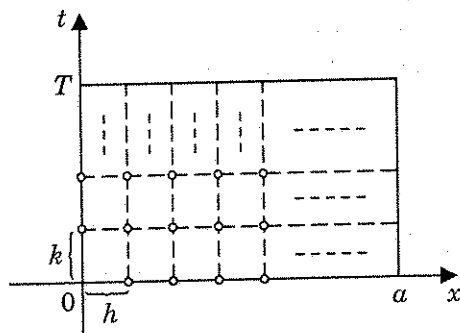


Figura IX. 13.

$$u_n^m = u(x_n, t_m)$$

Derivata parțială $\frac{\partial u}{\partial t}$ se poate aproxima într-un nod curent (x_n, t_m) prin raportul $\frac{1}{k}(u_n^{m+1} - u_n^m)$, iar derivata $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ prin $\frac{1}{h^2}(u_{n+1}^{m+1} + u_{n-1}^{m+1} - 2u_n^{m+1})$. Atunci ecuației (1) i se asociază schema cu diferențe

$$\frac{1}{k}(u_n^{m+1} - u_n^m) = \frac{c^2}{h^2}(u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}) \qquad (3)$$

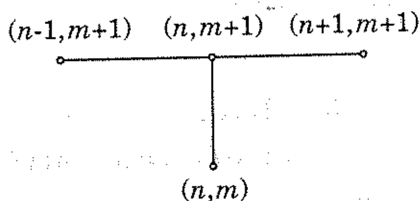
$1 \le n \le N-1$. Numărul ecuațiilor (3) este mai mic decît numărul necunoscutelor u_n^{m+1}, $0 \le n \le N$. Dar avem la îndemînă condițiile (2), ceea ce va conduce la relațiile :

$$u_n^0 = f(x_n),\ u_0^{m+1} = g_1(t_{m+1}),\ u_N^{m+1} = g_2(t_{m+1}) \qquad (4)$$

pentru $0 \le n \le N$ și $0 \le m \le M-1$.

Deoarece f, g_1, g_2 sînt cunoscute, din relațiile (4) se determină valorile lui u în nodurile situate pe axa Ox, ca și valorile lui u în nodurile de pe laturile $x = 0$ și $x = a$.

"Șablonul" din figura IX.14 indică tocmai configurația vîrfurilor utilizate în sistemul (3).



"Șablonul"

Figura IX.14.

Din relațiile (3) și (4) rezultă :

$$(5) \quad \begin{cases} u_{n-1}^{m+1} - \left(2 + \frac{h^2}{c^2 k}\right)u_n^{m+1} + u_{n+1}^{m+1} = \frac{-h^2}{c^2 k}u_n^m, & 1 \le n \le N-1 \\ u_0^{m+1} = g_1(t_{m+1}), & u_N^{m+1} = g_2(t_{m+1}). \end{cases}$$

Pentru $m = 0$ relațiile (5) devin

$$u_{n-1}^1 - \left(2 + \frac{h^2}{c^2 k}\right) u_n^1 + u_{n+1}^1 = -\frac{h^2}{c^2 k} u_n^0, \quad 1 \le n \le N-1$$

Făcînd $n = 1, 2, ..., N-1$ se obține un sistem liniar de $N-1$ ecuații și $N+1$ necunoscute $u_0^1, u_1^1, \dots, u_{N-1}^1, u_N^1$. Dar $u_0^1 = g_1(t_1)$ și $u_N^1 = g_2(t_1)$ sînt cunoscute și rămîne un sistem liniar de $N-1$ ecuații cu $N-1$ necunoscute, în general compatibil determinat. Așadar, u_n^1, $0 \le n \le N$ sînt determinate.

Pentru $m = 1$ relațiile (5) se transformă într-un sistem liniar cu necunoscutele u_n^2, $0 \le n \le N$ etc. După M pași se obțin valorile u_n^m în toate nodurile rețelei. Cu aceasta este determinată (cu aproximație) temperatura $u(x, t)$ în fiecare punct $x \in [0, a]$ al barei și la fiecare moment $t \in [0, T]$.

Se pun probleme de alegerea bipasului (h, k), de convergență, de stabilitate a soluțiilor la perturbații etc., analizate în lucrările de specialitate.

b) Considerăm acum problema Dirichlet pentru ecuația lui Helmholtz:

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \mu\varphi = f \qquad (6)$$

în dreptunghiul $D = [0, 1] \times [0, 1]$, cu condiția

$$\varphi = 0 \text{ pe Fr. D.} \qquad (7)$$

Parametrul μ se consideră constant și pozitiv, iar f este o funcție continuă cunoscută pe D.

Alegem o rețea uniformă, divizînd intervalul [0, 1] în N părți egale și luînd bipasul $h = k = \frac{1}{N}$. Pentru un nod $(x_n, y_m) = (nh, mh)$ notăm

$$\varphi_n^m = \varphi(x_n, y_m) \text{ și } f_n^m = f(x_n, y_m)$$

Condiția (7) arată că $\varphi_n^m = 0$ pentru nodurile de pe frontiera dreptunghiului D.

Introducem notațiile următoare :

$$\varphi_m = \begin{pmatrix} \varphi_1^m \\ \vdots \\ \varphi_{N-1}^m \end{pmatrix}, \quad f_m = \begin{pmatrix} f_1^m \\ \vdots \\ f_{N-1}^m \end{pmatrix} \quad \text{pentru } m = 1, ..., N-1$$

și considerăm matricea tribandă de ordin $N-1$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Discretizînd ecuația (6), adică scriind-o într-un nod curent sub forma

$$-\frac{\varphi_{n+1}^m - 2\varphi_n^m + \varphi_{n-1}^m}{h^2} - \frac{\varphi_n^{m-1} - 2\varphi_n^m + \varphi_n^{m+1}}{h^2} + \mu\varphi_n^m = f_n^m$$

rezultă

$$\frac{4\varphi_n^m - \varphi_{n-1}^m - \varphi_{n+1}^m - \varphi_n^{m-1} - \varphi_n^{m+1}}{h^2} + \mu\varphi_n^m = f_n^m \qquad (8)$$

S-a folosit deci "şablonul" din figura IX. 15.

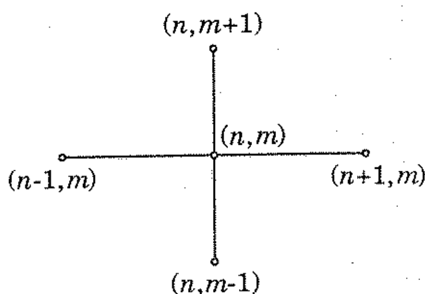


Figura IV. 15.

Un calcul uşor arată că introducînd matricea

$$B = A + (2 + \mu h^2) I_{N-1}$$

relaţiile (8) anterioare se scriu concentrat sub forma

$$B\varphi_1 - \varphi_2 = h^2 f_1$$

$$-\varphi_{m-1} + B\varphi_m - \varphi_{m+1} = h^2 f_m \quad \text{pentru} \quad 2 \le m \le N-2 \qquad (9)$$

$$-\varphi_{N-2} + B\varphi_{N-1} = h^2 f_{N-1}$$

Scopul nostru este să determinăm vectorii φ_m, $1 \le m \le N-1$, deoarece aceasta asigură cunoaşterea funcţiei φ în nodurile reţelei considerate.

Aplicăm o metodă elegantă datorată lui G. Marciuk, bazată pe folosirea transformării Fourier rapide.

Pentru calculul valorilor şi vectorilor proprii ai matricii A se consideră sistemul $Au^{(p)} = \lambda_p(A)u^{(p)}$, $1 \le p \le N-1$. Din ecuaţia caracteristică $\det(A - \lambda I_{N-1}) = 0$ rezultă $\lambda_p(A) = 2(1 - \cos\frac{p\pi}{N})$ şi versorii proprii corespunzători sînt

$$u^{(p)} = \begin{pmatrix} u_1^{(p)} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{(p)} \end{pmatrix}, \quad \text{unde} \quad u_m^{(p)} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sin\frac{m\pi p}{N}$$

(constanta multiplicativă $\sqrt{\frac{2}{N}}$ asigură că $\|u^{(p)}\| = 1$).

Deoarece matricea A este simetrică, vectorii $u^{(p)}$, $1 \le p \le N-1$ formează o bază pentru spaţiul $\mathbb{R}^{N-1}$. Considerăm acum reprezentările vectorilor φ_m şi f_m relativ la această bază

$$\varphi_m = \sum_{p=1}^{N-1} \Phi_{pm} u^{(p)}, \quad f_m = \sum_{p=1}^{N-1} F_{pm} u^{(p)}, \quad 1 \le m \le N-1 \qquad (10)$$

Înlocuind în (9) şi ţinînd cont că $u^{(p)}$ sînt vectori proprii şi pentru matricea B dar cu valorile proprii $\lambda_p = \lambda_p(A) + 2\mu h^2$, rezultă pentru orice p fixat sistemul liniar tri-bandă

$$\begin{cases} \lambda_p \Phi_{p1} - \Phi_{p2} = F_{p1} \\ -\Phi_{p,m-1} + \lambda_p \Phi_{p,m} - \Phi_{p,m+1} = F_{pm} \quad \text{pentru } m = 2, \dots, N-2 \\ -\Phi_{p,N-2} + \lambda_p \Phi_{p,N-1} = F_{p,N-1} \end{cases}$$

Rezolvînd acest sistem liniar (de exemplu cu algoritmul Gauss) se determină Φ_{pm} pentru $1 \le p, m \le N-1$ deci vectorii φ_m şi cu aceasta problema este rezolvată.

Unde se aplică transformarea Fourier rapidă? Mai întîi, deoarece funcţia f este cunoscută, se cunosc f_m şi pentru calculul componentelor F_{pm} conform (10) se aplică algoritmul TFR. Anume

$$F_{pm} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{r=1}^{N-1} f_r^m \sin\frac{p\pi r}{N} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{r=0}^{2N-1} f_r^m \sin\frac{2p\pi r}{2N}$$

unde am pus $f_0^m = f_N^m = f_{N+1}^m = \ldots = f_{2N-1}^m = 0$. Fie $\tilde{\omega} = e^{i\frac{\pi}{N}}$; atunci

$F_{pm} = \sqrt{\frac{2}{N}} \operatorname{Im}(\sum_{r=0}^{M-1} f_r^m \tilde{\omega}^{rm})$, unde $M = 2N$ şi $p = 1, \ldots, N-1$. Sumele respective se obţin prin TFR. În mod similar, după ce se determină Φ_{pm}, calculul sumelor care dau φ_m cu formulele (10) se poate de asemenea efectua prin TFR.

Metoda anterioară se aplică cu unele adaptări şi pentru ecuaţiile Laplace sau Poisson.

5.2. Metode variaţionale

Metodele variaţionale sînt intim legate de determinarea extremelor unor funcţionale. La originea acestor metode se află rezultatele clasice de calcul variaţional (ecuaţiile Euler–Lagrange) pe care le amintim pe scurt.

Fie E un spaţiu vectorial normat real şi $\Phi : A \to \mathbb{R}$ o funcţie definită pe o submulţime $A \subset E$. O astfel de funcţie este uneori numită **funcţională.** Un element $y_0 \in A$ se numeşte un punct de **minim local** (reaspectiv de **maxim local**) al lui Φ dacă există $r > 0$ astfel încît $(\forall)\, y \in A$, $\|y - y_0\| < r$, să avem $\Phi(y) \ge \Phi(y_0)$ (respectiv $\Phi(y) \le \Phi(y_0)$).

Presupunem că $(\forall)\, h \in E$, funcţia $\varphi(t) = \Phi(y_0 + th)$ este derivabilă în punctul $t = 0$. Atunci derivata $\delta_h\Phi(y_0) = \varphi'(0)$ se numeşte **variaţia întîi a lui Φ în y_0 pe direcţia h.**

TEOREMA 5.1. **(Fermat). Dacă $\Phi : A \to \mathbb{R}$ este o funcţională definită pe un deschis $A \subset E$ şi y_0 este un punct de extrem local pentru Φ, atunci $\delta_h\Phi(y_0) = 0$ pentru orice $h \in E$.**

DEMONSTRAŢIE. Dacă $h = 0$, atunci evident $\delta_h\Phi(y_o) = 0$. Presupunem că $h \ne 0$ şi că y_0 este punct de minim local. Alegem $r > 0$ astfel încît $B(y_0, r) \subset A$ şi $\Phi(y) \ge \Phi(y_0)$, $(\forall)\, y \in B(y_0, r)$. Aşadar $\varphi(t) \ge \varphi(0)$ pentru orice $|t| < \frac{r}{\|h\|}$.

Atunci conform teoremei clasice a lui Fermat rezultă $\varphi'(0) = 0$ adică $\delta_h\Phi(y_0) = 0$.

EXEMPLE. 1) Presupunem $E = C^1_{[a,b]}$ şi fie o aplicaţie

$\Phi : E \to \mathbb{R}$, $\Phi(y(x)) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx$ unde f este o funcţie dată de clasă C^2. Atunci pentru orice $y_0 \in E$, $h \in E$, avem

$$\varphi(t) = \int_a^b f(x, y_0 + th, y_0' + th')\, dx$$

şi

$$\delta_h \Phi(y_0) = \varphi'(0) = \int_a^b \frac{d}{dt} f(x, \overbrace{y_0 + th}^{y}, \overbrace{y_0' + th'}^{y'})\Big|_{t=0} dx = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} h + \frac{\partial f}{\partial y'} h'\right) dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} h\, dx + \frac{\partial f}{\partial y} h \Big|_a^b - \int_a^b h \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] h\, dx + \frac{\partial f}{\partial y} h(b) - \frac{\partial f}{\partial y} h(a)$$

Dacă $y_0 = y_0(x)$ este un punct de extrem, adică o curbă extremală din $C^2_{[a,b]}$, atunci conform teoremei lui Fermat $\delta_h \Phi(y_0) = 0$ **pentru orice** $h(a) = h(b) = 0$; în particular rezultă că

$$\int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] h\, dx = 0$$

pentru orice $h \in C^1_{[a,b]}$ cu $h(a) = h(b) = 0$, deci y_0 este o soluţie a ecuaţiei

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

numită **ecuaţia Euler–Lagrange asociată lui** Φ.

2) În cazul cînd $E = F^n$, unde $F = C^1_{[t_0, t_1]}$ şi $\Phi : E \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x_1'(t), \ldots, x_n'(t), x_1(t), \ldots, x_n(t))\, dt,$$

seturile de n funcţii $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ din F care extremează funcţionala Φ vor fi soluţii ale **sistemului Euler–Lagrange**

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i'}\right) = 0, \quad 1 \le i \le n$$

3) Să considerăm acum o funcţională de tipul $\Phi : E \to \mathbb{R}$, $\Phi(u) = \iint_\Delta f(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy$, unde f este o funcţie de clasă C^2 iar E este spaţiul funcţiilor $u \in C^1(\Delta)$ adică funcţii $u(x, y)$ de clasă C^1 pe un deschis mărginit din $\mathbb{R}^2$ care conţine compactul Δ. (Bineînţeles $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$).

Atunci funcţiile $u \in E$ care extremează Φ verifică în mod necesar **ecuaţia Euler–Lagrange–Gauss** :

$$\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u_y}\right)=0$$

Pentru detalii trimitem la [A 12].

Să considerăm acum funcționala

$$\Phi(u)=\iint_{\Delta}\left[u_x^2+u_y^2+2uq(x,y)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

definită pe spațiul funcțiilor $u(x,y)\in C^1(\Delta)$ pentru care $u|_{\mathrm{Fr}\,\Delta}=u_0$ dat. În acest caz,

$$\frac{\partial f}{\partial u}=2q,\quad \frac{\partial f}{\partial u_x}=2u_x,\quad \frac{\partial f}{\partial u_y}=2u_y$$

şi ecuația lui Euler–Lagrange–Gauss devine

$$2q-\frac{\partial}{\partial x}(2u_x)-\frac{\partial}{\partial y}(2u_y)=0,\text{adică } \Delta u=q$$

Aşadar, rezolvarea problemei Dirichlet $\Delta u=q$, $u|_{\mathrm{Fr}\,\Delta}=u_0$ corespunde determinării funcțiilor u care extremează Φ.

Reținem astfel că există ecuații cu derivate parțiale care sînt ecuații Euler–Lagrange–Gauss asociate unor funcționale. Astfel ecuația Poisson $\Delta u=q$ este tocmai în această situație. De asemenea, o ecuație diferențială de tipul $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p(x)y')+q(x)y=r(x)$ pentru $x\in[a,b]$ cu $p\in C^1_{[a,b]}$ şi q,r continue pe $[a,b]$ este tocmai ecuația Euler–Lagrange asociată funcționalei

$$\Phi(y)=\int_a^b(py'^2+qy^2-2ry)\,\mathrm{d}x.$$

Rămîne deci să indicăm o metodă numerică pentru determinarea extremelor unor funcționale $\Phi:E\to\mathbb{R}$. Pentru aceasta să considerăm un subspațiu vectorial $E_1\hookrightarrow E$ finit dimensional cu baza $\mathcal{B}=\{u_1,\dots,u_n\}$. Orice element $u\in E_1$ se reprezintă în mod unic sub forma $u=\sum_{i=1}^{n}c_iu_i$ cu c_i scalari reali. Dacă n este suficient de mare şi baza $\mathcal{B}$ este aleasă convenabil, în locul determinării extremelor lui Φ se recomandă problema finitistă a găsirii extremelor restricției $\Phi|E_1$. Dar $(\forall)\ u\in E_1$,

$$\Phi(u)=g\ (c_1\ ,\dots,c_n)$$

şi în mod necesar $\frac{\partial g}{\partial c_1}=0,\dots,\frac{\partial g}{\partial c_n}=0$. Se determină $c_1,\dots,c_n$ şi elementul $u=\sum_{i=1}^{n}c_iu_i$ corespunzător, care extremează, cu aproximație, pe Φ.

SUBIECTE DATE LA PROBA SCRISĂ A EXAMENULUI DE MATEMATICI SPECIALE

Prezentăm mai jos cîteva seturi de subiecte date la anii I şi II la facultăţile de automatică şi electronică, în sesiunile din vara şi iarna anilor 1993–1994.

ANUL I

I. 1. Criteriul de diagonalizare; enunţ şi demonstraţie.

2. Fie $V = \mathbb{R}^2$ $(n \geq 2)$ şi $f : V \to V$ un operator liniar de rang 1. Să se arate că :

a) matricea lui f într-o bază oarecare este de forma

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

cu $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i, j \leq n)$

b) există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încît $f^2 = \alpha f$, iar spectrul lui f este $\sigma(f) = \{0, \alpha\}$.

3. Să se determine forma canonică Jordan pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

şi apoi să se calculeze A^{1995}.

II. 1. Reducerea formelor pătratice la sumă de pătrate prin transformări ortogonale ; interpretare geometrică.

2. Fie $h : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ o aplicaţie liniară avînd în bazele canonice matricea asociată

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Să se calculeze $h(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3)$ unde a_k, $0 \leq k \leq 3$, sînt constante reale şi să se interpreteze rezultatul.

3. a) Dacă $1 \leq m \leq n$ sînt numere întregi, se numeşte codificare binară de tip (m, n) orice aplicaţie injectivă $\varphi : \mathbb{B}^m \to \mathbb{B}^n$. Să se arate că pentru orice

matrice $A \in M_{n,m}(\mathbb{B})$ de rang m $(m \leq n)$, aplicaţia $\varphi : \mathbb{B}^m \to \mathbb{B}^n$, $\varphi(x) = Ax^T$ este o codificare binară.

b) Să se calculeze A^{1996} pentru

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

III.1. Ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi.

2. Fie $A(t) = (a_{ij}(t))_{1\leq i,\, j\leq 3}$, $t \in I$ o matrice antisimetrică de funcţii continue pe un interval I.

a) Să se arate că sistemul $x' = A(t)\cdot x$ admite o integrală primă de forma $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = C$ (C = constantă). Deduceţi că orice soluţie a sistemului este mărginită, ca funcţie $x : I \to \mathbb{R}^3$.

b) Să se afle soluţia generală a sistemului diferenţial $x' = Ax$ unde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

şi să se determine o a doua integrală primă a sistemului. Deduceţi că în $\mathbb{R}^3$ curbele integrale sînt cercuri.

3. Să se afle valorile parametrului $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca ecuaţia
$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$ să admită soluţii nenule verificînd condiţiile bilocale
$y(1) = 0$, $y(e^2) = 0$.

4. Fie $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ funcţii de clasă C^1 într-un deschis $U \subset \mathbb{R}^3$, astfel încît ∇f, ∇g să fie liniar independenţi în orice punct din U. Să se determine liniile de cîmp ale cîmpului de vectori $\vec{v} = \nabla f \times \nabla g$.

IV.1. Matricea de tranziţie a unui sistem $x' = A(t)x$.

2. Fie

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Să se calculeze e^{At}, $t \in \mathbb{R}$ şi să se determine soluţia sistemului

$$x' = Ax + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ satisfăcînd condiţia iniţială } x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Să se indice soluţia generală a următoarelor ecuaţii diferenţiale, pe intervalele indicate :

a) $3x^2y' + x^2y^2 + 2 = 0$, $I = (0, \infty)$

b) $y'' + y' = x + e^x$, $I = \mathbb{R}$

c) $x^2y'' - 2y = \sin(\ln x)$, $I = (0, \infty)$.

4. Se consideră sistemul diferențial

$$\begin{cases} \dot{x} = -1 + 2y + x^2 + xy + y^2 \\ \dot{y} = -2x - x^2 \end{cases}$$

Să se determine pozițiile de echilibru și să se precizeze dacă echilibrul este sau nu stabil.

ANUL II

V. 1. Transformarea "z"; proprietăți de calcul.

2. Să se calculeze

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{2z} - \cos 9z}{\operatorname{sh} \pi i z} dz.$$

3. Să se rezolve în clasa $\mathcal{O}$ sistemul diferențial $x' = x - 2y + 1$, $y' = -3x$ cu condițiile inițiale $x(0_+) = 0$, $y(0_+) = 1$.

4. Să se determine soluția problemei Cauchy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 16\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 48\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ u(0, y) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = y.$$

VI. 1. Formula integrală Cauchy și consecințe ale ei.

2. Să se calculeze $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + x)\cos x}{x^4 + 13x^2 + 36} dx$, cu ajutorul reziduurilor.

3. Să se determine imaginea Laplace și imaginea Fourier pentru semnalul

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = |t - 1| \text{ pentru } t \in [0, 2] \text{ și } f(t) = 0 \text{ în rest.}$$

4. Să se rezolve problema Dirichlet $\Delta u = 0$ în discul $\rho < 2$, $u|_{\rho=2} = \sin\theta$ (în coordonate polare).

VII. 1. Problema Dirichlet pentru disc.

2. Să se determine soluția problemei

$$y'' + \omega y = t\cos\omega t, \ y(0_+) = 0, \ y'(0_+) = \frac{1}{\omega} \quad (\omega > 0 \text{ constant})$$

3. Folosind transformarea "z", să se determine șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ pentru care

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n, \ n \geq 0 \text{ și } x_0 = 2x_1 = 2.$$

4. Să se determine imaginea benzii $-\pi/4 < x < \pi/4$ prin transformarea

$$w = \operatorname{tg} z.$$

BIBLIOGRAFIE

A. Manuale de matematică

1. V.I. Arnold - **Ecuații diferențiale ordinare**, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1978.
2. V. Barbu - **Ecuații diferențiale**, Editura Junimea, Iași, 1985.
3. I.V. Belko. A.A. Burdun ș.a. - **Geometrie diferențială** (l. rusă), B.G.U., Minsk, 1982.
4. Ligia Brînzănescu - **Algebră liniară și Geometrie analitică**, Lit. UPB, 1993.
5. P. Flondor, O. Stănășilă - **Lecții de analiză matematică**, Editura ALL, București, 1993.
6. A.I. Kostrikin, Iu. Manin - **Algebră liniară și geometrie** (l. rusă), Izd. Mosk. univ., Moscova, 1980.
7. O. Stănășilă - **Analiza matematică**, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981; **Noțiuni și tehnici de matematică discretă**, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985.
8. V.N. Tutubalin - **Teoria probabilităților** (l. rusă). Izd. Univ. Moscova, 1972.
9. V.S. Vladimirov - **Ecuațiile fizicii matematice**, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1980.

B. Culegeri de probleme recomandate

1. V. Brînzănescu, O. Stănășilă (coordonatori) - **Lumea liniară**, Lit. IPB, București, 1981; **100 probleme**, Edit. IPB, 1982 (în colaborare cu Ana Niță).
2. C. Dicu, O. Mălăncioiu, C. Radu, C. Udriște - **Probleme de algebră, geometrie și ecuații diferențiale**, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
3. Șt. Dincă, R. Ursianu - **Probleme rezolvate de matematici speciale**, I, II - Lit. I.P.B. 1977.
4. M. Dumitrescu, D. Florea, C. Tudor - **Probleme de teoria probabilităților**, Editura Tehnică, București, 1985.
5. A. Filipov - **Culegere de probleme de ecuații diferențiale** (l. franceză), Editura Mir, Moscova, 1976.

C. Lucrări recomandate pentru învățarea modelării matematice

1. V.I. Arnold - **Metode matematice ale mecanicii clasice**, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1980.
2. C. Berbente ș.a. - **Metode numerice în aviație**, Lit. IPB, 1988.
3. I. Constantin - **Răspunsul circuitelor la semnale**, Lit. UPB, 1992.
4. M. Iosifescu - **Lanțuri Markov și aplicații**, Editura Tehnică, București, 1977.
5. G.I. Marciuk - **Metode de analiză numerică**, Editura Academiei Române, București, 1983.
6. V. Neagoe, O. Stănășilă - **Teoria recunoașterii formelor**, Editura Academiei Române, 1992.
7. Ana Niță - **Ecuații diferențiale**, Lit. UPB, 1992.

8. Gh. Oprişan, A. Vlad - **Aplicații ale teoriei probabilităților în electronică** I, II, Lit. UPB, 1984; 1989.
9. I.M. Popescu - **Fizica I,II**, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981-1983.
10. J.G. Simmonds - **A brief on tensor analysis**, Springer Verlag, Berlin, 1982.
11. D. Stanomir, O. Stănăşilă - **Metode matematice în teoria semnalelor**, Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.
12. R.Ursianu - **Elemente de analiză funcțională**, Lit. UPB, 1994.

ADDENDA

La încheierea acestui manual atât de încărcat cu noțiuni și teoreme, majoritatea datorate matematicienilor de demult, care au formulat probleme încă nerezolvate, trebuie adăugat că în ultimii 50 de ani s-au dezvoltat multe domenii noi ca: Teoria varietăților, Teoria distribuțiilor, Teoria bifurcațiilor (numită comercial Teoria catastrofelor), Analiza Fourier discretă, Control optimal, Chaos și fractali, Noile teorii geometrice ale fizicii și astrofizicii etc.

Spre deosebire de alte discipline științifice, matematica nu își reneagă rezultatele vechi, ci le încorporează, le împletește cu cele noi într-o construcție unitară, astfel încât fiecare generație are multe de învățat și multe de făcut. Nu există matematici continue sau discrete, pentru ingineri, medici sau părinți, *nu există matematici aplicate, ci numai aplicații ale unei matematici unice și indivizibile.*

În 1993 s-a realizat un sondaj în mediile universitare americane cu participarea multor studenți, profesori, cercetători și utilizatori avizați, care au răspuns la întrebarea: "Care sunt după dv. cele mai remarcabile rezultate ale matematicii?" și iată în ordine primele 10 opțiuni:

1. $e^{i\pi} = -1$ (*Euler*).
2. Mulțimea numerelor prime este infinită (*Euclid*).
3. Relația lui *Euler* pentru poliedre convexe ($V + F = M + 2$) și existența celor 5 poliedre convexe regulate ale lui *Platon*.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (*Euler*)
5. $\sqrt{2}$ este irațional (*Euclid*) și π este transcendent (*Lindemann*).
6. Intervalul $[0, 1]$ este echipotent cu pătratul $[0, 1] \times [0, 1]$ (*Cantor*).
7. Teorema *Hamilton-Cayley*.
8. Teorema reziduurilor (*Cauchy*).
9. Clopotul lui *Gauss* și teorema limită centrală.
10. Orice aplicație continuă a discului unitate în el însuși are un punct fix (*Brouwer*).

O bucurie a cunoașterii, dincolo de examene, diplome și deșertăciuni!
Există și o altă bucurie, uneori răsplătită, anume de a aplica matematica.
Dar numai cea înțeleasă poartă noroc și asta vă dorim!

TITLUL	PRET	NR.EX.
1000 DE PROBLEME REZOLVATE ŞI EXERCIŢII FUNDAMENTALE, Ana Niţă, Tatiana Stănăşilă	44900 lei	
GHIDUL BACALAUREATULUI. SUBIECTE DE MATEMATICA DATE INTRE 1966 – 1996 CU REZOLVARI COMPLETE, Ion Cracea, Liviu Cracea, *272 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-9156-65-7*	39900 lei	
ALGEBRĂ LINIARĂ, GEOMETRIE ANALITICĂ ŞI DIFERENŢIALĂ. TEORIE, EXEMPLE, PROBLEME, Constantin I. Radu, *288 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-9156-65-8*	19900 lei	
ALGEBRĂ LINIARĂ.TEORIE ŞI PROBLEME REZOLVATE, Teodor Stihi, *160 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-571-179-6*	9900 lei	
MATEMATICA PTR. CICLUL PRIMAR..TESTE,LOGICA,JOC, Viorel G. Dumitru, Alexandrina Dumitru, Viorica Fatu	24900 lei	
FURTUNI PE MĂRILE ELIPSEI ŞI ALTE POVESTIRI DESPRE CURBE DE ORDIN SUPERIOR, Viorel Gh. Vodă, *296 pag., 13 x 20 cm., ISBN 973-9229-19-0*	34900 lei	
LECŢII DE ANALIZĂ MATEMATICĂ ŞI EXERCIŢII REZOLVATE, Paul Flondor, Octavian Stănăşilă, *336 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-95933-2-1*	24900 lei	
MATEMATICI SPECIALE TEORIE, EXEMPLE, APLICAŢII, Vasile Brânzănescu, Octavian Stănăşilă, *592 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-9154-64-9*	13980 lei	
ITINERAR ELEMENTAR IN ALGEBRA SUPERIOARA, Toma Albu, Ion D. Ion	29900 lei	
MATEMATICĂ - clasa a III-a. Caietul elevului, Mihail Roşu, Niculina Ilarion, *112 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-9229-72-7*	9900 lei	
MATEMATICĂ - clasa a III-a. Ghidul învăţătorului, Mihail Roşu, Niculina Ilarion,	12900 lei	
MATEMATICĂ - clasa a III-a. Caietul elevului, Alexandrina Dumitru, Gheorghe Herescu, *112 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-9229-71-9*	9900 lei	
MATEMATICĂ - clasa a III-a. Ghidul învăţătorului, Alexandrina Dumitru, Gheorghe Herescu, *152 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-9229-73-5*	12900 lei	
871 DE PROBLEME DE MATEMATICĂ - vol. I, II Eliferie Rogai, Laurenţiu Modan, *368/368 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-9229-16-6/-17-4*	34900 lei	
ABORDARE GLOBALĂ A GEOMETRIEI TRIUNGHIULUI CU IMPLICAŢII CREATIVE, Constantin C. Florea, Corina Daniela C. Florea, *176 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-571-134-6*	9900 lei	
MATEMATICĂ PENTRU PERFECŢIONAREA ÎNVĂŢĂTORILOR, Mihail Roşu, Magdalena Roman, *160 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-97048-3-2*	9900 lei	
NUMERE COMPLEXE ÎN MATEMATICA DE LICEU, Marian Dincă, Marcel Chiriţă, *176 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-9229-02-6*	13900 lei	
PROBLEME ALESE DE GEOMETRIE PENTRU LICEE, Mihai Popescu, *544 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-9229-33-6*	49900 lei	

TITLUL	PRET	NR.EX.
ALGEBRĂ LINIARĂ. TEORIE ŞI PROBLEME REZOLVATE, Teodor Stihi, *160 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-571-179-6*	9900 lei	
SINTEZE BIOLOGICE, Gheorghe Mohan, Aurel Ardelean, *536 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-571-196-6*	74900 lei	
ISTORIA BIOLOGIEI ÎN DATE, Gh. Mohan, L. Gavrilã, A. Ardelean, C-tin Pârvu, *768 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-571-113-3*	49500 lei	
LECŢII DE ANALIZĂ MATEMATICĂ ŞI EXERCIŢII REZOLVATE, Paul Flondor, Octavian Stãnã°ilã, *336 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-95933-2-1*	24900 lei	
FIZICA - vol. I, Cornelia Moþoc, *464 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-9156-31-2*	24900 lei	
TEORIA SISTEMELOR SINTEZA ROBUSTÃ, METODE NUMERICE DE CALCUL Vlad Ionescu, Andras Varga, *520 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-9156-72-X*	24900 lei	
ALGEBRÃ LINIARÃ, GEOMETRIE ANALITICÃ ªI DIFERENÞIALÃ. TEORIE, EXEMPLE, PROBLEME, Constantin I. Radu, *288 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-9156-65-8*	19900 lei	
FIZICÃ NUCLEARÃ. CULEGERE DE PROBLEME, A. C. Ion, R. Ion-Mihai, O. G. Duliu, M. Penescu, *304 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-9156-70-6*	14900 lei	
SIMULAREA MONTE-CARLO A TRANSPORTULUI RADIAÞIILOR, Octavian Sima, *264 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-9156-69-X*	14900 lei	
SISTEME EXPERT, Dorin-Ioniþã Cârstoiu, *304 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-9156-92-1*	14900 lei	
STABILIZAREA SISTEMELOR LINIARE, Vasile Drãgan, Aristide Halanay, *268 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-9156-73-8*	14900 lei	
MATEMATICI SPECIALE TEORIE, EXEMPLE, APLICAÞII, Vasile Brânzãnescu, Octavian Stãnã°ilã, *592 pag., 17 x 24 cm., ISBN 973-9154-64-9*	13980 lei	